УДК 794:622.765.55

В.Ф. Пожидаев, Н.С. Прядко, О.В. Грачев

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНЕГО РАЗМЕРА КЛАССА КРУПНОСТИ ЧАСТИЦ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

Аннотация. В данной работе предложен метод вычисления среднего размера класса крупности частиц сыпучих материалов, основанный на физических принципах. Найденая приближенная формула расчета среднего диаметра опробована для распределения частиц угля по классам.

Ключевые слова: крупность, среднее значение, обогащение.

Интенсификация извлечения полезных ископаемых требует уменьшения удельных затрат на извлечение классов крупности полезного продукта. Это в свою очередь, тесно связано с предельным законом распределения частиц по размерам [1]. Вопрос о распределении частиц по размерам внутри узкого класса крупности неотделим от вопроса об эквивалентном диаметре частиц этого класса. От метода определения среднего размера класса зависит точность расчетов в задачах обогащения полезных ископаемых, связанных с крупностью частиц.

Вопрос о нахождении среднего диаметра тесно связан с понятием определяющих физических признаков, которые требуется сохранить при моделировании. Чисто статистическое понимание среднего как математического ожидания случайной величины в данном случае лишено физического содержания [1].

Цель исследования – разработка метода вычисления среднего размера частиц при распределении их по классам крупности.

Будем считать известными значения a, b, γ где a и b – граничные диаметры класса крупности (a, b) и γ – выход этого класса.

Пусть $F(x)$ – функция распределения в весовых долях. Обозначим через $\phi(x)$ и $\Phi(x)$, соответственно, плотность и функцию распределения случайной величины x в вероятностном смысле. Между функциями $F(x)$ и $\Phi(x)$ существует взаимнооднозначная связь. Най-

ISSN 1562-9945

дем представления функции ϕ и Φ, справедливые внутри интервала (a,b).

Средний диаметр частиц $z(x)$ в интервале $(a,x)\subseteq(a,b)$ можно определить как математическое ожидание случайной величины при условии попадания ее в интервал (a,x). Тогда значение *z(x)* может быть определено из уравнения

$$z(x)\int_a^x \phi(x)dx = \int_a^x x\phi(x)dx\,. \tag{1}$$

Это же уравнение дает возможность найти плотность распределения $\phi(x)$, если известна эквивалентная крупность *z(x)*.

Если определяющими признаками являются совокупный объем и совокупная поверхность частиц, то

$$\int_a^x f(x)dx = z(x)\int_a^x \frac{f(x)dx}{x}\,. \tag{2}$$

Здесь $f(x)=F'(x)$ – плотность функции распределения в весовых долях. Точные результаты можно получить, если известна функция $F(x)$. Для аппроксимации кумулятивной кривой воспользуемся модифицированным, усеченным на отрезке $(0,D)$ законом Вейбулла

$$F(x)=1-\exp\left\{-\alpha\left(D/x-1\right)^{-\nu}\right\}, \tag{3}$$

где a и v параметры распределения, определяемые по результатам гранулометрического анализа.

Для *z* в интервале (a,b) справедливо выражение

$$z=\frac{\gamma D}{\gamma+\alpha\upsilon T\left(\upsilon-2,\alpha,\upsilon,D/\alpha-1,D/6-1\right)}, \tag{4}$$

где

$$T\left(p,\alpha,\upsilon,a,b\right)=\int_a^b x^p e^{-\alpha x^{\upsilon}}dx=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^k}{k!}\cdot\frac{b^{p+\upsilon k+1}-a^{p+\upsilon k+1}}{p+\upsilon k+1}. \tag{5}$$

Был проведен расчет величины *z* по формуле (4) для 20 различных сортов шламов углеобогатительных фабрик Донбасса. Эти расчеты использовались для сравнения с приближенными методами [2]. Недостатки такого подхода очевидны. Помимо выхода γ класса (a,b), необходимо знать параметры всей кумулятивной кривой, т.е. весь гранулометрический состав. Хотя результаты и получаются наи-

 ISSN 1562-9945

более точными, однако, как рабочий инструмент, такой подход не является удовлетворительным.

В силу сказанного, представляется целесообразным получить приближенную, однако удобную для практических применений формулу для вычисления величины z. Исходить будем из формулы (1). Разобьем интервал (a,b) на два равновесных интервала, получим $1/z=\frac{1}{2}(1/a+1/b)$. Разбивая на три интервала, найдем аналогично $\frac{1}{Z}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a+b}+\frac{1}{b}\right)$. Дробя диапазон (a,b) на k интервалов, т.е. полагая, что в этом диапазоне существует k – компонентная смесь, получим обобщенную формулу для среднего

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{a}+\sum_{i=1}^{k-2}\frac{k}{(k-i)a+ib}+\frac{1}{b}\right].$$

При $k\to\infty$, т.е. переходя от дискретного распределения величины x к непрерывному, получим эквивалентный диаметр интервала (a,b) $\frac{1}{z}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left[\frac{1}{a}+\sum\frac{k}{(k-i)a+ib}+\frac{1}{b}\right]=\frac{\ln {}^{b}\!/\!_{a}}{b-a}$. Следовательно, средний диаметр смеси частиц в интервале (a,b) получен в виде

$$z=\frac{b-a}{\ln {}^{b}\!/\!_{a}}. \qquad (6)$$

Формула проста и удобна для расчетов, поэтому представляет интерес оценить ее точность. Результаты сравнения показывают, что она дает несколько завышенные значения средних диаметров по сравнению с их точными значениями по формуле (4). Однако, относительные погрешности от применения этой формулы более, чем в два раза ниже по сравнению с z, рассчитанным как среднее арифметическое.

Для восстановления функции распределения частиц по размерам, если средний диаметр в интервале задан в виде (6), обратимся к формуле (1). Отсюда, с учетом сохранения выхода γ класса (a,b), получим для функции $\phi(x)$

$$\phi=\phi_1(x)=\frac{\gamma}{\ln {}^{b}\!/\!_{a}}\frac{1}{x}. \qquad (7)$$

Если же принимать средний размер частиц в интервале (a,b) равным $z=(a+b)/2$, то это равносильно условию равномерного распределения в этом интервале в виде $\phi=\phi_0(x)=\gamma/(b-a)$.

Естественным обобщением для приближений функции $\phi(x)$ на отрезке (a,b) является рассмотрение ее в виде $\phi=\phi_\theta(x)=C\cdot x^{-\theta}$. Из условия сохранения выхода γ, получим $\phi_\theta(x)=\dfrac{\gamma(\theta-1)a^{\theta-1}b^{\theta-1}}{b^{\theta-1}-a^{\theta-1}}x^{-\theta}$.

Находя z из формулы $z_\theta=\dfrac{1}{\gamma}\int_a^b x\phi_\theta(x)dx$, получим

$$z_\theta=\frac{(\theta-1)ab\left(b^{\theta-2}-a^{\theta-2}\right)}{(\theta-2)\left(b^{\theta-1}-a^{\theta-1}\right)} \tag{8}$$

или, что, то же самое, заменяя $t=b/a$, $\quad z_\theta=\dfrac{\theta-1}{\theta-2}a\dfrac{t^{\theta-2}-1}{t^{\theta-1}-1}$.

Последние три формулы определения z верны при $\theta\neq1$ и $\theta\neq2$. Для $\theta=2$ $\phi_2(x)=\dfrac{ab}{b-a}x^{-2}$, и, соответственно $z_2(x)=\dfrac{ax}{x-a}\ln\dfrac{x}{a}$.

Рассмотрим поведение функции $\phi(x)$ на отрезке (a,b). На концах этого отрезка функция принимает значения $\phi(a)=\dfrac{\upsilon\alpha^{1-1/\upsilon}}{\Gamma(1-1/\upsilon)}a^{\upsilon-2}e^{-\alpha a^\upsilon}$ и $\phi(b)=\dfrac{\upsilon\alpha^{1-1/\upsilon}}{\Gamma(1-1/\upsilon)}b^{\upsilon-2}e^{-\alpha b^\upsilon}$.

Функция $\phi_\theta(x)$ – принимает значение $C_a^{-\theta}$ и $C_b^{-\theta}$. Если потребовать одинакового прироста этих функций на отрезке (a,b), то, приравнивая отношение функций на концах интервала (a,b), получим $(b/a)^{2-\upsilon}\exp\left\{\alpha b^\upsilon-\alpha a^\upsilon\right\}=(b/a)^\theta$. Отсюда

$$\theta=2-\upsilon+\alpha\frac{b^\upsilon-a^\upsilon}{\ln b/a}. \tag{9}$$

Равенство (9) решает задачу о наилучшем приближении на отрезке плотности распределения $\phi(x)$ степенными функциями. Степень θ находится в зависимости от границ интервала (a,b) и параметров α и ν.

 ISSN 1562-9945

Эксперименты показали, что среднее значение для шламов $\theta = 2$, $z_2 = ab/z_1$. Для $\theta = 3$ $z_3 = \dfrac{2a^2}{a+b}$, но использование более высоких степеней нецелесообразно.

Для рядовых углей наилучшая степень $\theta = 1,5$. При этом $\phi_{1,5}(x) = \dfrac{0,5\sqrt{ab}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} x^{-1,5} = \dfrac{0,5\sqrt{at}}{\sqrt{t}-1} x^{-1,5}$. Эквивалентный диаметр из формулы (8) равен среднему геометрическому

$$Z = \sqrt{ab}\,. \qquad (10)$$

Для сравнения можно привести значения Z, рассчитанные по формуле (10) и осредненные по всем опытам

Таблица

Класс, мм	0,5-1	1-3	3-6	6-13	13-25	25-50	50-100
Zист	0,709	1,76	4,25	8,69	17,55	32,8	57
Z1.5	0,708	1,73	4,25	8,85	18	35,4	70

Таким образом, для шламов наилучшее приближение дает плотность распределения $\phi(x) = \dfrac{ab}{b-a} \cdot \dfrac{1}{x^2}$. Эквивалентный диаметр $z(x)$ класса $(a,x) \subseteq (a,b)$ равен $z(x) = \dfrac{ax}{x-a} \ln\dfrac{x}{a}$.

Если обозначить *t* – модуль класса (a,b), то эквивалентный диаметр для этого класса удобно находить по формуле $z = a\dfrac{t\ln t}{t-1}$. Коэффициент *a* = 1,3862, при *t* = 2; *a* = 1,182, если $t = \sqrt{2}$ и *a* = 1,6479, если *t* =3.

Для рядовых углей плотность $\phi(x)$, которая дает наилучшее приближение на отрезке (a,b), равна $\phi(x) = \dfrac{0,5\sqrt{at}}{\sqrt{t}-1} x^{-1,5}$, эквивалентный диаметр класса (a,x) равен $z(x) = \sqrt{ax} = a\sqrt{t}$.

Выводы

Предложенный метод расчета среднего размера класса частиц по крупности, основанный на физических принципах, позволяет решать задачи измельчения и обогащения с требуемой точностью. Получение формул для эквивалентных диаметров частиц класса при моделировании процессов позволяет одновременно определить закон распределения в этом классе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пилов П.И. Моделирование замкнутых циклов измельчения на основе гипотезы Риттенгера / П.И. Пилов, Н.С. Прядко // Збагачення корисних копалин.- НГУ– Дн-ск. – 2012.– №51 (92). - С. 98 – 107.
2. Пожидаев В.Ф. Прикладные задачи математической статистики. – Луганск: Издательство ВУГУ, 1998. – 153с.

 ISSN 1562-9945