УДК 519.876: 681.518

А.В. Рудакова

МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНКИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИСТЕМАМИ В КРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ ПРИ ДЕФИЦИТЕ ВРЕМЕНИ

Аннотация. В статье анализируется возможность применения непрерывных моделей для решения задач оперативного управления большими системами. Выдвинута гипотеза о том, что непрерывное представление динамики систем в виде оболочки дает более сильный оптимум, чем исходная задача, на основе которого можно определять наилучшее управление из множества возможных и оценивать качество управления Рассмотрены методы нахождения решения уравнений состояния в непрерывной форме, методы анализа устойчивости системы по непрерывному описанию, возможность корректной постановки задачи оптимального управления и применения методов вариационного исчисления для ее решения.

Ключевые слова. Большая распределенная система, критический режим функционирования, непрерывная модель, уравнения состояния, анализ устойчивости, оптимальное управление.

Постановка проблемы. Современные производственные комплексы характеризуются наличием множества подсистем, соединенных между собой разнообразными связями. При развитии системы, добавлении новых елементов, она приобретает новые свойства, что позволяет говорить об отнесении системы к категории больших распределенных систем. Примером таких систем являются энергетические системы, системы связи и телекоммуникаций, информационные системы и другие. При управлении интегрированными системами в критических режимах функционирования необходимо принимать ответственные решения при остром дефиците времени и максимальных штрафах за ошибку, что определяет сложность задач оперативного управления.

Анализ публикаций. Оперативное управление в распределенных производственных комплексах строится по иерархическому принципу и заключается в определении (оценивании) текущего состояния объекта, прогнозе возможного перехода системы в критический режим функционирования и выборе оптимальных управляющих воздействий на предстоящий период [1].

Современная теория управления базируется на описании систем в пространстве состояний, дальнейшей линеаризации в некоторой окрестности и применении для поиска оптимального управления стандартных методов [2]. Использование метода Белмана, например, приводит к необходимости решения системы n алгебраических нелинейных уравнений (n - порядок системы). При росте размерности систем происходит значительное увеличение времени расчетов, становится затруднительной оценка состояния объекта и, соответственно, неосуществимым определение оптимального управления такой системой [3]. Это приводит к ситуации, когда оператор должен принимать решение о выборе управления системой из множества возможных в условиях неопределенности и дефицита времени, что зачастую приводит к ошибочным действиям.

В пространстве состояний описание линейной системы имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bv, \qquad (1)$$
$$y = Cx + Dv,$$

где x - вектор состояния, $\dim(x) = n$; y - вектор выходов, $\dim(y) = r$; v - вектор входов системы, $\dim(v) = m$; A, B, C и D - матрицы уравнений состояния [4].

Описание систем в виде (1) можно привести к непрерывной форме, если вместо векторов и матриц использовать их непрерывные аналоги – одно- и двухмерные функции [5]. Непрерывные переменные целесообразно представлять в диапазоне [0,1], который разбивается на n интервалов согласно размерности дискретного вектора. Схема соответствия дискретных $i\ (j)$ и непрерывных переменных $\eta\ (\xi)$ приведена на рис. 1.

 ISSN 1562-9945

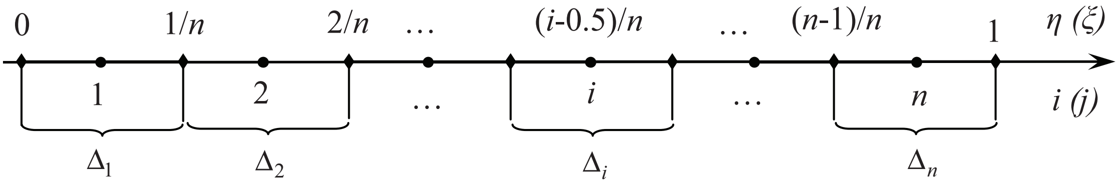

Рисунок 1 – Преобразование координат в единичный интервал

Для перехода от i к η можно использовать соотношения

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = \Delta = \frac{1}{n};\ \eta_i = \frac{i - 0.5}{n};\ i = \frac{\eta_i}{\Delta} + 0.5\,.$$

Можно отметить, что при $n \to \infty$ окресности i-х дискретных переменных $\Delta_i \to 0$, что соответствует приближению к точному непрерывному представлению.

Непрерывные аналоги векторов и матриц системы (1) соответственно можно обозначить как

$$x(t) \to \chi(\eta, t),\quad u(t) \to \upsilon(\mu, t),\quad y(t) \to \phi(\rho, t)$$

$$A = \{a_{i,j}\}_{n\times n} \to A(\eta, \xi),\qquad B = \{b_{i,k}\}_{n\times m} \to B(\eta, \mu),$$

$$C = \{c_{l,j}\}_{r\times n} \to \Gamma(\rho, \xi),\qquad D = \{d_{l,k}\}_{r\times m} \to \Delta(\rho, \mu).$$

Их аналитические выражения могут быть получены с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа [6] как функции переменных η, ξ для $i, j = \overline{1, n}$, μ – для $k = \overline{1, m}$ и ρ – для $l = \overline{1, r}$.

Непрерывная модель системы – аналог для модели в пространстве состояний (1) может быть записана в виде

$$\frac{d\chi(\eta, t)}{dt} = n\int_0^1 A(\eta, \xi)\,\chi(\xi, t)\,d\xi + m\int_0^1 B(\eta, \mu)\,\upsilon(\mu, t)\,d\mu, \tag{2}$$

$$\phi(\rho, t) = n\int_0^1 \Gamma(\rho, \xi)\,\chi(\xi, t)\,d\xi + r\int_0^1 \Delta(\rho, \mu)\,\upsilon(\mu, t)\,d\mu\,.$$

Обратный переход от модели непрерывного вида к традиционному представлению легко осуществляется с помощью δ- функций [5].

Мы предполагаем, что непрерывное представление динамики систем в виде оболочки дает более сильный оптимум, чем исходная (погружаемая) задача, на основе которого можно определять наилучшее управление (наиболее близкое к оптимальному) из множества возможных и оценивать качество управления.

Постановка задачи. Целью исследований является анализ возможности применения непрерывных моделей и разработка соответствующих методов для получения своевременных оценок оптимальных решений при управлении большими системами в критических режимах функционирования.

Основная часть. Для подтверждения гипотезы о целесообразности использования непрерывных моделей для решения задач оперативного управления большими системами необходимо рассмотреть методы нахождения решения уравнений состояния в непрерывной форме, методы анализа устойчивости системы по непрерывному описанию, возможность корректной постановки задачи оптимального управления и применения методов вариационного исчисления для ее решения.

1. Решение уравнения состояния.

Решение уравнения состояния в непрерывной форме можно получить используя метод разделения переменных [7]. Функции состояния и управления представляются как произведение двух функций зависящих от одной переменной:

$$\chi(\eta, t) = q(\eta) \cdot w(t)\,, \quad \upsilon(\mu, t) = s(\mu) \cdot p(t)\,. \tag{3}$$

При подстановке соотношений (3) в (2) получаем уравнения в виде

$$q(\eta)\frac{dw(t)}{dt} = n \cdot w(t)\int_0^1 A\left(\eta, \xi\right) q\left(\xi\right) d\xi + m \cdot p(t)\int_0^1 B\left(\eta, \mu\right) s\left(\mu\right) d\mu\,, \tag{4}$$

$$\phi(\rho, t) = n \cdot w(t)\int_0^1 \Gamma\left(\rho, \xi\right) q\left(\xi\right) d\xi + r \cdot p(t)\int_0^1 \Delta\left(\rho, \mu\right) s\left(\mu\right) d\mu\,.$$

Уравнение (4) можно привести к виду

$$\frac{dw(t)}{dt} = n \cdot C_1 \cdot w(t) + m \cdot C_2 \cdot p(t)\,,$$

решение которого легко получается методом интегрирующего множителя [6] в виде

$$w(t) = K \cdot e^{n \cdot C_1 \cdot (t - t_0)} + m \cdot C_2 \cdot e^{n \cdot C_1 \cdot t}\int_{t_0}^{t} p(t) \cdot e^{-n \cdot C_1 \cdot t} dt\,. \tag{5}$$

 ISSN 1562-9945

Если при разделении переменных принять, что $q(\eta)=\chi(\eta,t_0)=\chi_0(\eta)$, то в уравнении (5) постоянная интегрирования $K=1$, и решение уравнения (2) примет вид

$$\chi(\eta,t)=q(\eta)\cdot e^{n\cdot C_1\cdot(t-t_0)}+q(\eta)\cdot m\cdot C_2\cdot e^{n\cdot C_1\cdot t}\int_{t_0}^{t}p(t)\cdot e^{-n\cdot C_1\cdot t}dt. \qquad (6)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 могут быть сформированы разным образом.

Путем простого деления уравнения (4) на функцию $q(\eta)$:

$$C_1=C_1(\eta)=\frac{\int_0^1 A(\eta,\xi)\,q(\xi)\,d\xi}{q(\eta)} \text{ и } C_2=C_2(\eta)=\frac{\int_0^1 B(\eta,\mu)\,s(\mu)\,d\mu}{q(\eta)}.$$

Путем интегрирования уравнения (4) по η и дальнейшего выделения $\frac{dw(t)}{dt}$:

$$C_1=\frac{\int_0^1\left(\int_0^1 A(\eta,\xi)\,q(\xi)\,d\xi\right)d\eta}{\int_0^1 q(\eta)d\eta} \text{ и } C_2=\frac{\int_0^1\left(\int_0^1 B(\eta,\mu)\,s(\mu)\,d\mu\right)d\eta}{\int_0^1 q(\eta)d\eta}.$$

Путем умножения уравнения (4) на $A(\xi,\eta)$ и интегрирования по η.

$$C_1(\xi)=\frac{\int_0^1 A(\xi,\eta)\,J_1(\eta)\,d\eta}{J_1(\xi)} \text{ и } C_2(\xi)=\frac{\int_0^1 A(\xi,\eta)\,J_2(\eta)\,d\eta}{J_1(\xi)},$$

где

$$J_1(\xi)=\int_0^1 A(\xi,\eta)\,q(\eta)\,d\eta \text{ и } J_2(\eta)=\int_0^1 B(\eta,\mu)\,s(\mu)\,d\mu.$$

Моделирование показало, что первые два варианта преобразований уравнения (4) не приводит к адекватным результатам. А последний вариант преобразований дает решение уравнения состояния в непрерывной форме, которое обладает сходимостью к решению уравнений состояния в традиционной форме.

2. Анализ устойчивости систем

Для анализа устойчивости систем широко используются частотные методы, которые основаны на анализе модели системы в виде передаточных функций (в операторной форме) [2]. Предполагаем, что для анализа устойчивости систем по модели в виде оболочки можно использовать двухмерное преобразование Фурье (Лапласа) в виде [8]

$$\Theta(u,v)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}A(\eta,\xi)\cdot e^{-j\cdot 2\pi(u\cdot\eta+v\cdot\xi)}d\eta d\xi\,.$$

Анализ устойчивости в традиционном (дискретном) представлении заключается также в определении и проверке на отрицательность действительной части собственных значений λ_i $(i=\overline{1,n})$ матрицы A, а в непрерывном представлении устойчивая в окресности нуля система будет устойчивой при соблюдении условия $\operatorname{div} A(\eta,\xi)<0$ и в рассматриваемой окрестности Ω.

3. Задача оптимального управления

Целью управления в производственных системах обычно является обеспечение наилучшей траектории движения вектора состояния в заданном диапазоне, что формулируется в виде условий

$$x_{min}<x(t)<x_{max} \text{ или, аналогично, } \chi(\eta)_{min}<\chi(\eta,t)<\chi(\eta)_{max}\,. \qquad (7)$$

Функционал цели для задачи слежения (стабилизации движения вокруг программной траектории) формируется в квадратичном виде [4]. Непрерывное представление вектора состояний $\chi(\eta,t)$ позволяет функционал цели записать как

$$J=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\left(u^T(t)\cdot Q\cdot u(t)+n\int\limits_{0}^{1}\hat{\chi}(\eta,t)\,Br(\hat{\chi}(\eta,t))d\eta\right)dt\to\min\,, \qquad (8)$$

где $\hat{\chi}(\eta,t)=\dfrac{\chi(\eta,t)-\chi(\eta)_{min}}{\chi(\eta)_{max}-\chi(\eta)_{min}}$ - нормированные значения аналитического продолжения функции состояния, в заданном диапазоне (6), $\hat{\chi}(\eta,t)\in[0,1]$; $Br(\hat{\chi}(\eta,t))$ - барьерная функция, значения которой близко или равно нулю в допустимом диапазоне $[\chi(\eta)_{min}+\Delta\chi,\chi(\eta)_{max}-\Delta\chi]$, а с приближением к заданным границам диапазона (что соответствует критическому режиму функционирования системы) резко возрастает.

 ISSN 1562-9945

Таким образом, функционал цели (8) соответствует вариационной задаче

$$J = J\left(u(t), \hat{\chi}(t), t\right) \to \min \quad (9)$$

с ограничениями на управление

$$0 \le u \le U_0, \quad (10)$$

где U_0 - предельно допустимое значение компонент вектора управления.

Задача оптимального управления (9), (10) относится к вариационным задачам с выпуклым функционалом цели и с вырожденной динамикой, так как процесс управления проходит медленнее, чем переходные процессы в системе, а расчет управления можно осуществить намного быстрее, чем процессы развития критической ситуации (катастрофы), связанные с перегрузкой объектов. Подынтегральная функция выражения (8) не зависит от производных по u и по t. Поэтому формула Эйлера [2], на основе которой находится оптимальное управление u^*, примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

или

$$Qu^*(t) + \nabla_u \int_\Omega \hat{\chi}(\eta) \cdot Br(\hat{\chi}(\eta))d\eta = 0. \quad (11)$$

Траектория движения системы $\chi(\eta)$ непосредственно зависит от управления, то есть $\chi(\eta) = f_d(x, u, t) \approx f_n(\eta, \upsilon(\mu, t), t)$, может определяться путем измерений или из решения (6) уравнений состояния (2). Поэтому вектор оптимального управления u^* может быть найден из уравнения (11) как

$$u^*(t) = -Q^{-1}\nabla_u \int_\Omega \hat{\chi}(\eta) \cdot Br(\hat{\chi}(\eta))d\eta. \quad (12)$$

Таким образом, задача управления большой распределенной системой может быть погружена в задачу управления системой с распределенными параметрами, что обеспечивает единство алгоритмов решения и получения оценки управления.

Выводы. Переход к описанию систем с помощью непрерывной бесконечномерной оболочки можно осуществлять на основе приведеных преобразований однозначно.

Рассмотренными методами можно решать задачу построения решения непрерывного уравнения состояния, задачу анализа устойчивости, а также задачу поиска оптимального управления на основе непрерывной модели (2).

Выдвинутая гипотеза об оптимуме в задачах управления представляет практический интерес для принятии решений при управлении системами в критических режимах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский В.И. Интегрированные АСУ в промышленности. / В.И. Архангельский, И.Н. Богаенко, Н.А. Рюмшин – К.: НПК «Киевский институт автоматики», 1995. – 316с.
2. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учеб. Пособие. / Д.П. Ким– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464с.
3. Рудакова А.В. Анализ фундаментальных свойств развивающихся динамических систем. / А.В. Рудакова // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 2(41). – Херсон: ХНТУ, 2011. - С.27-31.
4. Справочник по теории автоматического управления. / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 712с.
5. Рудакова А.В. Использование аналитических продолжений в задачах оптимального управления большими системами в критических режимах. / А.В. Рудакова, Ю.А. Лебеденко // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 1(44). – Херсон: ХНТУ, 2012. - С.342-346.
6. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 832с.
7. Несис Е.И. Методы математической физики. / Е.И. Несис - М.: Просвещение, 1977.- 199с.
8. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. / Р. Гонсалес, Р. Вудс – М.: Техносфера, 2005. – 1072с.

 ISSN 1562-9945