УДК 519.25

А.П. Сарычев

ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ РЕГРЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. Рассмотрена задача моделирования в классе систем регрессионных уравнений со случайными коэффициентами в условиях неопределенности по степени статистической зависимости между коэффициентами уравнений и между случайными составляющими выходных переменных объекта. Разработана итерационная процедура для оценивания параметров в системе регрессионных уравнений. Эффективность процедуры подтверждена методом статистических испытаний.

Ключевые слова: задача структурно-параметрической идентификации.

Статистические методы математического моделирования технических систем, для которых отсутствуют точные априорные гипотезы, являются современным инструментом описания и прогнозирования состояния таких систем. Распространенным классом моделей линейных по параметрам в задачах структурной идентификации является класс систем регрессионных уравнений со случайными коэффициентами.

Структурная неопределенность при моделировании в классе систем регрессионных уравнений со случайными коэффициентами может проявляться в виде неопределенности по степени статистической зависимости между коэффициентами уравнений и в виде неопределенности по степени статистической зависимости между случайными составляющими разных выходных переменных объекта. Если такие зависимости существуют, а ковариационные матрицы случайных коэффициентов и ковариационная матрица случайных составляющих разных выходных переменных неизвестны, то задача оценивания сводится к задаче минимизации функционала, который представляет собой логарифм определителя ковариационной матрицы остатков регрессионных уравнений. Известным методом решения этой задачи является так называемый "двухшаговый" метод: на первом шаге параметры регрессионных уравнений оцениваются методом наименьших квадратов независимо для каждой выходной переменной, а на втором шаге они оцениваются совместно с использованием оценки ковариационной матрицы, полученной на первом шаге по остаткам регрессионных уравнений [1, 2]. Этот метод традиционно считался эвристическим, и поэтому его аналитическое обоснование и обобщение представляет собой актуальную задачу.

1. Априорные предположения об объекте

Пусть статический объект описывается множеством m входных переменных $\overset{o}{X} = \{\overset{o}{x}_1, \overset{o}{x}_2, \dots, \overset{o}{x}_m\}$ и множеством h выходных переменных $Y = \{y(1), y(2), \dots, y(h)\}$. Пусть модель функционирования объекта представляет собой систему регрессионных уравнений

$$y_i(k) = \overset{o}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\ \boldsymbol{\theta}_i(k) + \zeta_i(k), \quad k = 1, 2, \dots, h, \quad i = 1, 2, \dots, n, \qquad (1)$$

где k – номер выходной переменной; $y_i(k)$ – i-е наблюдение выходной переменной с номером k; $\overset{o}{\mathbf{x}}_i(k)$ – $(m(k)\times 1)$-вектор i-го наблюдения множества входов $\overset{o}{X}(k) \subseteq X$, $\overset{o}{X}(k) \neq \varnothing$ ($\varnothing$ – пустое множество), которые участвуют в формировании выходной переменной $y(k)$; $\boldsymbol{\theta}_i(k)$ – ненаблюдаемый случайный $(m(k)\times 1)$-вектор коэффициентов; $\zeta_i(k)$ – ненаблюдаемая случайная величина; n – объем выборки наблюдений.

Пусть для случайного вектора $\boldsymbol{\theta}_i(k)$ выполняется

$$\boldsymbol{\theta}_i(k) = \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k) + \boldsymbol{\eta}_i(k), \quad k = 1, 2, \dots, h, \quad i = 1, 2, \dots, n, \qquad (2)$$

где $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k) = (\overset{o}{\theta}_1(k), \overset{o}{\theta}_2(k), \dots, \overset{o}{\theta}_{m(k)}(k))^{\mathrm{T}}$ – неизвестный детерминированный $(m(k)\times 1)$-вектор; $\boldsymbol{\eta}_i(k)$ – случайный $(m(k)\times 1)$-вектор.

Пусть $\boldsymbol{\eta}_i(k) = (\eta_{1i}(k), \eta_{2i}(k), \dots, \eta_{m(k),i}(k))^{\mathrm{T}}$ распределен по $m(k)$-мерному нормальному закону: $\boldsymbol{\eta}_i(k) \sim N(\mathbf{0}_{m(k)}, \boldsymbol{\Sigma}_\eta(k,k))$, а относительно случайных векторов $\boldsymbol{\eta}_i(k),\ k = 1, 2, \dots, h,$ выполнены предположения:

$$E\{\boldsymbol{\eta}_i(k)\} = \mathbf{0}_{m(k)}, \quad i = 1, 2 \dots, n; \qquad (3)$$

$$E\{\boldsymbol{\eta}_i(k)\boldsymbol{\eta}_i^{\mathrm{T}}(k)\} = \boldsymbol{\Sigma}_\eta(k,k); \qquad (4)$$

 ISSN 1562-9945

$$E\{\boldsymbol{\eta}_i(k)\boldsymbol{\eta}_i^{\mathrm{T}}(q)\}=\boldsymbol{\Sigma}_{\eta}(k,q),\ \ q=1,2,...,h,\ \ k\neq q; \tag{5}$$

$$E\{\boldsymbol{\eta}_{i_1}(k)\boldsymbol{\eta}_{i_2}^{\mathrm{T}}(q)\}=\mathbf{O}_{(m(k)\times m(q))},\ \ k,q=1,2,...,h,\ \ i_1,i_2=1,2,...,n,\ \ i_1\neq i_2, \tag{6}$$

где $E\{\cdot\}$ – знак математического ожидания по всем реализациям случайных векторов $\boldsymbol{\eta}_i(k)$ и $\boldsymbol{\eta}_i(q)$; $\mathbf{0}_{m(k)}$ – нулевой $(m(k)\times 1)$-вектор; $\boldsymbol{\Sigma}_{\eta}(k,q)$ – неизвестная ковариационная $(m(k)\times m(q))$-матрица; $\mathbf{O}_{(m(k)\times m(q))}$ – нулевая $(m(k)\times m(q))$-матрица.

Пусть относительно $\zeta(k)$, $k=1,2,\dots,h$, выполняются предположения:

$$E\{\boldsymbol{\zeta}(k)\}=\mathbf{0}_n,\ \ E\{\boldsymbol{\zeta}(k)\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(k)\}=\sigma_{\zeta}(k,k)\,\mathbf{I}_n,\ \ k=1,2,\dots,h; \tag{7}$$

$$E\{\boldsymbol{\zeta}(k)\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(q)\}=\sigma_{\zeta}(k,q)\,\mathbf{I}_n,\ \ k,q=1,2,\dots,h;\ \ k\neq q; \tag{8}$$

$$E\{\zeta_{i_1}(k)\zeta_{i_2}(q)\}=0,\ \ i_1,i_2=1,\dots,n,\ \ i_1\neq i_2,\ \ k,q=1,2,...,h, \tag{9}$$

где $E\{\cdot\}$ – знак математического ожидания по всем реализациям случайных векторов $\boldsymbol{\zeta}(k)$ и $\boldsymbol{\zeta}(q)$; $\mathbf{0}_n$ – нулевой $(n\times 1)$-вектор; $\sigma_{\zeta}(k,k)$ – дисперсия случайной величины $\zeta_i(k)$, $i=1,2,\dots,n$, ограниченная величина; $\sigma_{\zeta}(k,q)$ – ковариация случайных величин $\zeta_i(k)$ и $\zeta_i(q)$, $i=1,2,\dots,n$, ограниченная величина; $\mathbf{I}_n$ – единичная $(n\times n)$-матрица.

Пусть в результате наблюдения для каждой выходной переменной $y(k)$, $k=1,2,...,h$, получены: 1) $\overset{o}{\mathbf{X}}(k)$ – $(n\times m(k))$-матрица n наблюдений $m(k)$ входов множества $\overset{o}{X}(k)$, имеющая полный ранг, равный $m(k)$; 2) $\mathbf{y}(k)$ – $(n\times 1)$-вектор соответствующих наблюдений выходной переменной $y(k)$.

В соответствии с (1)–(2) для наблюдений выполняется

$$y_i(k)=\overset{o}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\ \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k)+\overset{o}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\ \boldsymbol{\eta}_i(k)+\zeta_i(k)=$$

$$=\overset{o}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\ \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k)+\xi_i(k)=\overset{o}{y}_i(k)+\xi_i(k),\ \ k=1,2,\dots,h, \tag{10}$$

где для случайной величины $\xi_i(k)$ введено обозначение

$$\xi_i(k)=\overset{o}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\ \boldsymbol{\eta}_i(k)+\zeta_i(k). \tag{11}$$

Для математического ожидания $\xi_i(k)$, учитывая (3) и (7), получаем

$$E\{\xi_i(k)\}=0,\quad k=1,2,\dots,h,\quad i=1,2,\dots,n, \tag{12}$$

а для ковариаций случайных величин $\xi_i(k)\xi_i(k)$, $\xi_i(k)\xi_i(q)$, $\xi_i(k)\xi_j(q)$ с учетом соответственно **(4)–(6)** и **(7)–(9)** получаем

$$E\{\xi_i(k)\xi_i(k)\}=\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\mathbf{\Sigma}_\eta(k,k)\,\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i(k)+\sigma_\zeta(k,k)=[\mathbf{\Sigma}_\xi(k,k)]_{ii},\quad k=1,2,\dots,h \tag{13}$$

$$E\{\xi_i(k)\xi_i(q)\}=\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\mathbf{\Sigma}_\eta(k,q)\,\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i(q)+\sigma_\zeta(k,q)=[\mathbf{\Sigma}_\xi(k,q)]_{ii},\quad k\neq q; \tag{14}$$

$$E\{\xi_i(k)\xi_j(q)\}=0,\quad k,q=1,2,\dots,h,\quad i,j=1,2,\dots,n,\quad j\neq i. \tag{15}$$

Запишем **(10)–(15)** в обобщённом виде. Для этого введём обозначения

$$\mathbf{Y}=[\mathbf{y}(1),\mathbf{y}(2),\dots,\mathbf{y}(h)],\qquad \overset{\circ}{\mathbf{Y}}=[\overset{\circ}{\mathbf{y}}(1),\overset{\circ}{\mathbf{y}}(2),\dots,\overset{\circ}{\mathbf{y}}(h)], \tag{16}$$

$$\mathbf{\Xi}=[\boldsymbol{\xi}(1),\boldsymbol{\xi}(2),\dots,\boldsymbol{\xi}(h)]. \tag{17}$$

Тогда **(10)** и **(12)** соответственно принимают вид

$$\mathbf{Y}=\overset{\circ}{\mathbf{Y}}+\mathbf{\Xi}, \tag{18}$$

$$E\{\mathbf{\Xi}\}=\mathbf{O}_{(n\times h)}, \tag{19}$$

где $\mathbf{O}_{(n\times h)}$ – нулевая $(n\times h)$-матрица.

Для (k,q)-элемента ковариационной матрицы случайных векторов $\boldsymbol{\xi}(1),\boldsymbol{\xi}(2),\dots,\boldsymbol{\xi}(h)$ в **(17)** получаем

$$[\mathrm{Cov}\{\mathbf{\Xi}\}]_{kq}=E\{[\mathbf{\Xi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Xi}]_{kq}\}=E\{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\xi}(q)\}=E\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i(k)\xi_i(q)\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E\{\xi_i(k)\xi_i(q)\}=\sum_{i=1}^{n}\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\mathbf{\Sigma}_\eta(k,q)\,\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i(q)+n\cdot\sigma_\zeta(k,q), \tag{20}$$

а для ее (k,k)-элемента –

$$[\mathrm{Cov}\{\mathbf{\Xi}\}]_{kk}=E\{[\mathbf{\Xi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Xi}]_{kk}\}=\sum_{i=1}^{n}\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\mathbf{\Sigma}_\eta(k,k)\,\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i(k)+n\cdot\sigma_\zeta(k,k). \tag{21}$$

2. Вывод формул для оценивания коэффициентов

Запишем **(10)–(15)** в объединенном виде. Введем обозначения

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\mathbf{y}(1)\\ \hline \mathbf{y}(2)\\ \hline \vdots\\ \hline \mathbf{y}(h)\end{pmatrix},\quad \overset{\circ}{\mathbf{y}}=\begin{pmatrix}\overset{\circ}{\mathbf{y}}(1)\\ \hline \overset{\circ}{\mathbf{y}}(2)\\ \hline \vdots\\ \hline \overset{\circ}{\mathbf{y}}(h)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}(1)\\ \hline \boldsymbol{\theta}(2)\\ \hline \vdots\\ \hline \boldsymbol{\theta}(h)\end{pmatrix},\quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}=\begin{pmatrix}\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(1)\\ \hline \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(2)\\ \hline \vdots\\ \hline \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(h)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}(1)\\ \hline \boldsymbol{\xi}(2)\\ \hline \vdots\\ \hline \boldsymbol{\xi}(h)\end{pmatrix}, \tag{22}$$

ISSN 1562-9945

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \overset{\circ}{\mathbf{X}}(1) & \mathbf{O}_{(n\times m(2))} & \cdots & \mathbf{O}_{(n\times m(h))} \\ \hline \mathbf{O}_{(n\times m(1))} & \overset{\circ}{\mathbf{X}}(2) & \cdots & \mathbf{O}_{(n\times m(h))} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{O}_{(n\times m(1))} & \mathbf{O}_{(n\times m(2))} & \cdots & \overset{\circ}{\mathbf{X}}(h) \end{array} \right], \tag{23}$$

где $\mathbf{y}$ – объединенный $(N\times 1)$-вектор наблюдаемых зашумленных значений;

$\overset{\circ}{\mathbf{y}}$ – $(N\times 1)$-вектор ненаблюдаемых значений; $\boldsymbol{\theta}$ – ненаблюдаемый случайный $(M\times 1)$-вектор коэффициентов; $\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}$ – неизвестный детерминированный $(M\times 1)$-вектор коэффициентов; ξ – $(N\times 1)$-вектор ненаблюдаемых случайных аддитивных составляющих; $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ – объединенная $(N\times M)$-матрица регрессоров; $N = n\,h$; $M = m(1) + m(2) + \ldots + m(h)$.

С учетом (22)–(23) систему (1) можно записать

$$\mathbf{y} = \overset{\circ}{\mathbf{y}} + \xi = \underline{\underline{\mathbf{R}}}\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} + \xi . \tag{24}$$

Необходимо найти оценку неизвестных коэффициентов $\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}$ в виде

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\ \mathbf{y}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}(1) \\ \hline \mathbf{d}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{d}(h) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{d}(k,1) \\ \hline \mathbf{d}(k,2) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{d}(k,h) \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,\ldots,h, \tag{25}$$

где $(M\times N)$-матрицу $\mathbf{C}$, которая зависит от $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$, требуется определить.

Будем искать такую матрицу $\mathbf{C}$, при которой логарифм определителя ковариационной матрицы оценки коэффициентов (25) принимает минимальное значение и оценки коэффициентов несмещены. Математическое ожидание и ковариационную матрицу оценки (25) вычислим по всем возможным реализациям случайных величин $\xi(k)$, $k = 1,2,\ldots,h$. Для математического ожидания оценки (25) должно выполняться

$$E\{\mathbf{d}\} = E\{\mathbf{C}\,\mathbf{y}\} = E\{\mathbf{C}\,(\overset{\circ}{\mathbf{y}} + \xi)\} = E\{\mathbf{C}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}\} + E\{\mathbf{C}\,\xi\} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} . \tag{26}$$

Справедливость (26) следует, с учетом (12), из условий

$$\mathbf{C}\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \mathbf{I}_M, \quad E\{\mathbf{C}\xi\} = \mathbf{0}_M, \tag{27}$$

где первое условие – требование несмещенности оценок, а второе – требование независимости элементов матрицы $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ от величин $\xi(k)$, $k = 1, 2, \dots, h$.

Пусть $(N \times N)$-матрица $\mathbf{\Sigma}_{\xi}$ – ковариационная матрица введенного в (22) объединенного $(N \times 1)$-вектора ненаблюдаемых случайных составляющих $\boldsymbol{\xi}$:

$$\mathbf{\Sigma}_{\xi} = E\{\,\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{\Sigma}_{\xi}(1,1) & \mathbf{\Sigma}_{\xi}(1,2) & \cdots & \mathbf{\Sigma}_{\xi}(1,h) \\ \hline \mathbf{\Sigma}_{\xi}(2,1) & \mathbf{\Sigma}_{\xi}(2,2) & \cdots & \mathbf{\Sigma}_{\xi}(2,h) \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{\Sigma}_{\xi}(h,1) & \mathbf{\Sigma}_{\xi}(h,2) & \cdots & \mathbf{\Sigma}_{\xi}(h,h) \end{array}\right], \tag{28}$$

где $\mathbf{\Sigma}_{\xi}(k,q) = E\{\boldsymbol{\xi}(k)\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(q)\}$ – $(n \times n)$-матрица.

Для ковариационной матрицы вектора оценок (25) выполняется

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{d}) = E\{(\mathbf{d} - \overset{o}{\boldsymbol{\theta}})(\mathbf{d} - \overset{o}{\boldsymbol{\theta}})^{\mathrm{T}}\} = E\{(\mathbf{C}\overset{o}{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} - \overset{o}{\boldsymbol{\theta}})(\mathbf{C}\overset{o}{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} - \overset{o}{\boldsymbol{\theta}})^{\mathrm{T}}\} =$$

$$E\{\mathbf{C}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\} = \mathbf{C}\mathbf{\Sigma}_{\xi}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}, \tag{29}$$

где $E\{\cdot\}$ – операция математического ожидания, введенная в (26).

Запишем функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{C}, \mathbf{\Lambda}) = \ln(\det[\mathbf{C}\mathbf{\Sigma}_{\xi}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}]) + \mathrm{tr}[\mathbf{\Lambda}_L(\mathbf{C}\underline{\underline{\mathbf{R}}} - \mathbf{I}_M)], \tag{30}$$

где $\mathbf{\Lambda}_L$ – диагональная $(M \times M)$-матрица неопределенных множителей.

Тогда необходимые условия оптимальности имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{C}} = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{C}}\Big(\ln(\det[\mathbf{C}\mathbf{\Sigma}_{\xi}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}])\Big) + \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{C}}\big(\mathrm{tr}[\mathbf{\Lambda}_L(\mathbf{C}\underline{\underline{\mathbf{R}}} - \mathbf{I}_M)]\big) = \mathbf{O}_{M\times N}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{\Lambda}_L} = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{\Lambda}_L}\Big(\mathrm{tr}[\mathbf{\Lambda}_L(\mathbf{C}\underline{\underline{\mathbf{R}}} - \mathbf{I}_M)]\Big) = \mathbf{C}\underline{\underline{\mathbf{R}}} - \mathbf{I}_M = \mathbf{O}_{M\times M}. \end{cases} \tag{31}$$

Применяя правила матричного дифференцирования, из (31) получаем

$$\mathbf{C} = (\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}. \tag{32}$$

Для математического ожидания и ковариационной матрицы оценки (25) с учётом (32) выполняется

$$E\{\mathbf{d}\} = E\{\mathbf{C}\mathbf{y}\} = E\{(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}(\underline{\underline{\mathbf{R}}}\overset{o}{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\xi})\} = \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}, \tag{33}$$

 ISSN 1562-9945

$$\mathrm{Cov}\{(\mathbf{d}-\overset{o}{\boldsymbol{\theta}})(\mathbf{d}-\overset{o}{\boldsymbol{\theta}})^{\mathrm{T}}\}=$$
$$=E\{(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\xi\xi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}\}=(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}. \quad (34)$$

Вычислим матрицу $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}$, т. е. дисперсии и ковариации случайных величин $\xi_i(k)$, $i=1,2,\dots,n$, $k=1,2,\dots,h$. Учитывая (13)–(15), для $(n\times n)$-матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}(k,q)$ – (k,q)-блока матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}$ – получаем

$$[\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}(k,q)]_{ii}=[[\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}]_{kq}]_{ii}=\overset{o}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\Sigma}_{\eta}(k,q)\overset{o}{\mathbf{x}}{}_i(q)+\sigma_{\zeta}(k,q)=$$
$$=[\boldsymbol{\Lambda}_{\eta}(k,q)]_{ii}+\sigma_{\zeta}(k,q), \quad (35)$$

где $\boldsymbol{\Lambda}_{\eta}(k,q)$ – диагональная $(n\times n)$-матрица.

В целом матрица $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}$ с учётом (35) имеет вид

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}=\boldsymbol{\Lambda}_{\eta}+\boldsymbol{\Sigma}_{\zeta}\otimes\mathbf{I}_n, \quad (36)$$

где $\boldsymbol{\Sigma}_{\zeta}\otimes\mathbf{I}_n$ – кронекеровское произведение матриц; $\mathbf{I}_n$ – единичная $(n\times n)$-матрица.

Из (22)–(36) следует, что для оценок коэффициентов выполняется:

$$\hat{\mathbf{d}}(k)=\mathbf{C}_{k\bullet}\,\mathbf{y}=\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}\,\mathbf{y}(q)=\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}\,(\overset{o}{\mathbf{y}}(q)+\xi(q))=$$
$$=\sum_{q=1}^{h}\left[(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\right]_{kq}(\overset{o}{\mathbf{y}}(q)+\xi(q))=\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k)+\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}\,\xi(q), \quad (37)$$

где использованы свойства обратной матрицы, которые следуют из равенства $\mathbf{H}\times\mathbf{H}^{-1}=\mathbf{I}$: $\sum_{l=1}^{h}[\mathbf{H}]_{kl}\times[\mathbf{H}^{-1}]_{lq}=1$, если $k=q$, и $\sum_{l=1}^{h}[\mathbf{H}]_{kl}\times[\mathbf{H}^{-1}]_{lq}=0$, если $k\neq q$.

3. Итерационная процедура оценивания коэффициентов

Пусть $\hat{\mathbf{d}}(r)$ – оценка вектора коэффициентов $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}$, а $\hat{\mathbf{d}}(k;r)$, $k=1,2,\dots,h$ – оценка вектора коэффициентов $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k)$ в виде (25), полученные на итерации с номером r. Тогда для системы регрессионных уравнений выполняется

$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{X}(k)\hat{\mathbf{d}}(k;r)+\mathbf{u}(k;r)=\hat{\mathbf{y}}(k;r)+\mathbf{u}(k;r),\ \ k=1,2,\dots,h, \quad (38)$$

где $\hat{\mathbf{y}}(k;r)$ – $(n\times 1)$-вектор выходов модели, а $\mathbf{u}(k;r)$ – $(n\times 1)$-вектор остатков модели для k-й переменной на итерации с номером r.

Введем в рассмотрение матрицу наблюдений $\mathbf{Y}$, матрицу выходов $\hat{\mathbf{Y}}$ и матрицу остатков $\mathbf{U}$ системы моделей (38):

$$\mathbf{Y}=[\mathbf{y}(1),\mathbf{y}(2),...,\mathbf{y}(h)],\quad \hat{\mathbf{Y}}(r)=[\hat{\mathbf{y}}(1,r),\hat{\mathbf{y}}(2,r),...,\hat{\mathbf{y}}(h,r)], \tag{39}$$

$$\mathbf{U}(r)=[\mathbf{u}(1,r),\mathbf{u}(2,r),...,\mathbf{u}(h,r)], \tag{40}$$

для которых выполняется

$$\mathbf{U}(r)=\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{Y}}(r)=[\mathbf{y}(1)-\hat{\mathbf{y}}(1,r),\mathbf{y}(2)-\hat{\mathbf{y}}(2,r),...,\mathbf{y}(h)-\hat{\mathbf{y}}(h,r)]. \tag{41}$$

В выражение (36) для матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_\xi$ входят неизвестные матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta$ и $\boldsymbol{\Sigma}_\eta(k,q)$, $k,q=1,2,...,h$. Используем это для построения итерационной процедуры вычисления неизвестных коэффициентов.

Рассмотрим в данной работе относительно простой случай, в котором выполняется $\boldsymbol{\Sigma}_\eta(k,q)=\mathbf{O}_{(m(k)\times m(q))}$, $k,q=1,2,...,h,\ k\neq q$, т. е. флуктуации коэффициентов в моделях для разных выходных переменных независимы.

В этом случае недиагональные элементы матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta$ и недиагональные блоки матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_\xi$ определяем (оцениваем) соответственно по формулам:

$$[\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\zeta(r)]_{kq}=(n-1)^{-1}[\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(r)\mathbf{U}(r)]_{kq},\quad k\neq q, \tag{42}$$

$$[\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\xi(r)]_{kq}=[\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\zeta(r)]_{kq}\otimes\mathbf{I}_n,\quad k\neq q. \tag{43}$$

Диагональные элементы матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta$, элементы матриц $\boldsymbol{\Sigma}_\eta(k,k)$, $k=1,2,...,h$, и затем диагональные блоки матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_\xi$ оцениваем, решая вспомогательную задачу регрессионного анализа.

Введем матрицу

$$\mathbf{M}=\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{u}(1)\\ \hline \mathbf{u}(2)\\ \hline \vdots\\ \hline \mathbf{u}(h)\end{pmatrix}\left(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(1)\ \vdots\ \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(2)\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(h)\right)=\left[\begin{array}{c|c|c|c}\mathbf{M}(1,1) & \mathbf{M}(1,2) & \cdots & \mathbf{M}(1,h)\\ \hline \mathbf{M}(2,1) & \mathbf{M}(2,2) & \cdots & \mathbf{M}(2,h)\\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hline \mathbf{M}(h,1) & \mathbf{M}(h,2) & \cdots & \mathbf{M}(h,h)\end{array}\right], \tag{44}$$

 ISSN 1562-9945

для (k,k)-блока которой выполняется

$$\mathbf{M}(k,k)=\mathbf{u}(k)\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(k)=$$

$$=\begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_n(k) \end{pmatrix}\big(u_1(k),\, u_2(k),\dots,u_n(k)\big)=\begin{bmatrix} u_1(k)u_1(k) & u_1(k)u_2(k) & \cdots & u_1(k)u_n(k) \\ u_2(k)u_1(k) & u_2(k)u_2(k) & \cdots & u_2(k)u_n(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n(k)u_1(k) & u_n(k)u_2(k) & \vdots & u_n(k)u_n(k) \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(45)}$$

Опираясь на **(35)**, будем предполагать, что для неизвестных элементов матриц $\mathbf{\Sigma}_{\eta}(k,k)$ и неизвестных диагональных элементов матрицы $\sigma_{\zeta}(k,k)=[\mathbf{\Sigma}_{\zeta}]_{kk}$, $k=1,2,...,h$, выполняется:

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\mathbf{\Sigma}_{\eta}(k,k)\,\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i(k)+\sigma_{\zeta}(k,k)=u_i(k)u_i(k)+\varepsilon_i\,, \qquad \textbf{(46)}$$

где $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma_{\varepsilon})$ – случайная величина, распределенная по нормальному закону.

Запишем **(46)** в развернутом виде

$$\sum_{l=1}^{m(k)}\overset{\circ}{x}{}_{il}(k)[\mathbf{\Sigma}_{\eta}(k,k)]_{ll}\,\overset{\circ}{x}{}_{il}(k)+\sum_{l=1}^{m(k)}\sum_{s=1}^{m(k)}2\cdot\overset{\circ}{x}{}_{il}(k)[\mathbf{\Sigma}_{\eta}(k,k)]_{ls}\,\overset{\circ}{x}{}_{is}(k)+\sigma_{\zeta}(k,k)=$$

$$=u_i(k)u_i(k)+\varepsilon_i\,. \qquad \textbf{(47)}$$

Для неизвестных коэффициентов в регрессионном уравнении **(47)** введем новые обозначения, присваивая номера коэффициентам, соответствующим элементам ковариационной матрицы $\mathbf{\Sigma}_{\eta}(k,k)$, построчно слева направо с учетом её симметричности:

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} & c_m \\ c_2 & c_{m+1} & \cdots & c_{2m-2} & c_{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{m-1} & c_{2m-2} & \cdots & c_{m(\eta)-2} & c_{m(\eta)-1} \\ c_m & & \cdots & c_{m(\eta)-1} & c_{m(\eta)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{11} & (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{12} & \cdots & (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{1,m-1} & (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{1m} \\ (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{21} & (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{22} & \cdots & (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{2,m-1} & (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{m-1,1} & (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{m-1,2} & \cdots & (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{m-1,m-1} & (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{m-1,m} \\ (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{m1} & (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{m2} & \cdots & (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{m,m-1} & (\mathbf{\Sigma}_{\eta})_{m,m} \end{bmatrix}, \textbf{(48)}$$

где $m_{\eta}=(m^2(k)+m(k))/2$ – число оцениваемых элементов матрицы $\mathbf{\Sigma}_{\eta}(k,k)$. Отметим, что с целью сокращения формулы в **(48)** вместо $\mathbf{\Sigma}_{\eta}(k,k)$ записано $\mathbf{\Sigma}_{\eta}$, а вместо $m(k)$ – m.

Для неизвестной величины $\sigma_{\zeta}(k,k)$ введем обозначение $c_0=\sigma_{\zeta}(k,k)$.

Соответственно **(48)** введем новые обозначения и для векторов регрессоров

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{z}_1)_i & (\mathbf{z}_2)_i & \cdots & (\mathbf{z}_m)_i \\ (\mathbf{z}_2)_i & (\mathbf{z}_{m+1})_i & \cdots & (\mathbf{z}_{2m-1})_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{z}_m)_i & (\mathbf{z}_{2m-1})_i & \cdots & (\mathbf{z}_{m(\eta)})_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_{i1} \cdot \overset{\circ}{x}_{i1} & \overset{\circ}{x}_{i1} \cdot \overset{\circ}{x}_{i2} & \cdots & \overset{\circ}{x}_{i1} \cdot \overset{\circ}{x}_{im} \\ \overset{\circ}{x}_{i2} \cdot \overset{\circ}{x}_{i1} & \overset{\circ}{x}_{i2} \cdot \overset{\circ}{x}_{i2} & \cdots & \overset{\circ}{x}_{i2} \cdot \overset{\circ}{x}_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{\circ}{x}_{im} \cdot \overset{\circ}{x}_{i1} & \overset{\circ}{x}_{im} \cdot \overset{\circ}{x}_{i2} & \cdots & \overset{\circ}{x}_{im} \cdot \overset{\circ}{x}_{im} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

С учетом (49) матрицу регрессоров можно записать в виде

$$\mathbf{Z} = \left[\mathbf{1}_n, \mathbf{z}_1, 2\cdot\mathbf{z}_2, \ldots, 2\cdot\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_{m+1}, 2\cdot\mathbf{z}_{m+2}, \ldots, 2\cdot\mathbf{z}_{2m-1}, \ldots, \mathbf{z}_{m(\eta)-2}, 2\cdot\mathbf{z}_{m(\eta)-1}, \mathbf{z}_{m(\eta)} \right], \quad (50)$$

где $\mathbf{1}_n$ – $(n\times 1)$-вектор, состоящий из единиц.

Введем обозначения

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 \\ u_2 \cdot u_2 \\ \vdots \\ u_n \cdot u_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{m(\eta)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Тогда моделью во вспомогательной регрессионной задаче является

$$\mathbf{g} = \mathbf{Z}\mathbf{c} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (52)$$

а её решение имеет вид

$$\hat{\mathbf{c}} = (\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}. \quad (53)$$

Отметим, что вспомогательную задачу регрессионного анализа (44)–(53) необходимо решить для каждого $k = 1, 2, \ldots, h$.

Итерационная процедура вычисления коэффициентов в системе регрессионных уравнений предусматривает ряд итераций.

1. На итерации $r = 0$ полагаем $\boldsymbol{\Sigma}_\eta(k,k) = \mathbf{O}_{(m(k)\times m(k))}$, $k = 1, 2, \ldots, h$, и $\boldsymbol{\Sigma}_\xi = \mathbf{I}_N$ – единичная $(N\times N)$-матрица.

а) В качестве начального приближения получаем оценку обычного метода наименьших квадратов (МНК):

$$\hat{\mathbf{d}}(0) = (\underline{\underline{\mathbf{X}}}^{\mathrm{T}}\,\underline{\underline{\mathbf{X}}})^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{X}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}. \quad (54)$$

2. На итерации $r = 1, 2, \ldots, r^*$ производим вычисления в такой последовательности.

а) Вычисляем выходы моделей:

ISSN 1562-9945

$$\hat{\mathbf{y}}(k;r-1)=\mathbf{X}(k)\hat{\mathbf{d}}(k;r-1),\ k=1,2,...,h. \tag{55}$$

b) Вычисляем остатки моделей:

$$\mathbf{u}(k;r-1)=\mathbf{y}(k)-\hat{\mathbf{y}}(k;r-1)\ \ k=1,2,...,h. \tag{56}$$

c) Объединяем остатки в матрицу:

$$\mathbf{U}(r-1)=[\mathbf{u}(1,r-1),\mathbf{u}(2,r-1),...,\mathbf{u}(h,r-1)]. \tag{57}$$

d) Вычисляем оценку ковариационной матрицы $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\xi}(r-1)$:

недиагональные блоки матрицы $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\xi}(r-1)$ определяем (оцениваем) соответственно по формулам (42)–(43);

диагональные блоки матрицы $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\xi}(r-1)$ определяем соответственно по формулам (44)–(53), решая h вспомогательных задач регрессионного анализа.

e) Вычисляем оценку $\hat{\mathbf{d}}(r)$:

$$\hat{\mathbf{d}}(r)=(\underline{\underline{\mathbf{X}}}^{\mathrm{T}}[\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\xi}(r-1)]^{-1}\underline{\underline{\mathbf{X}}})^{-1}\underline{\underline{\mathbf{X}}}^{\mathrm{T}}[\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\xi}(r-1)]^{-1}\mathbf{y}, \tag{58}$$

f) Вычисляем целевой функционал:

$$\Phi(r)=(\det[(n-1)^{-1}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(r)\mathbf{U}(r)])^{1/h}. \tag{59}$$

3. Итерационный процесс заканчиваем на итерации r^* при выполнении условия

$$\delta^2=\Phi(r^*-1)-\Phi(r^*)\le\delta_0^2, \tag{60}$$

где δ_0^2 – заданная величина.

Эффективность итерационной процедуры (54)–(60) подтверждена методом статистических испытаний.

Отметим, что если коэффициенты в модели функционирования объекта (1) не являются случайными величинами, а детерминированы и постоянны, как было принято в [3], то матрица $\mathbf{\Lambda}_{\eta}$ является нулевой, ковариационная матрица $\mathbf{\Sigma}_{\xi}$ в (35) совпадает с ковариационной матрицей $\mathbf{\Sigma}_{\xi}$ в [3], а итерационная процедура (54)–(60) совпадает с итерационной процедурой [3].

4. Заключение

Рассмотрена задача моделирования в классе систем регрессионных уравнений со случайными коэффициентами в условиях неопределенности по степени статистической зависимости между коэффициентами уравнений и степени статистической зависимости между случайными составляющими разных выходных переменных объекта. Разработана итерационная процедура оценивания параметров системы регрессионных уравнений, эффективность которой подтверждена методом статистических испытаний. Аналогичные результаты использованы для моделирования в классе систем авто-регрессионных уравнений [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Greene W. H. Econometric analysis : – 5th edition. – New Jersey : Prentice Hall, 2003. – 1056 p.

2. Сарычев А. П. Идентификация состояний структурно-неопределенных систем / А. П. Сарычев – Днепропетровск : НАН Украины и НКА Украины, Ин-т технической механики, 2008. – 268 с.

3. Сарычев А. П. Итерационная процедура оценивания параметров системы регрессионных уравнений / А. П. Сарычев // Системные технологии. – Выпуск 3 (80). – 2012. – С. 145–152.

4. Сарычев А. П. Идентификация параметров систем авторегрессионных уравнений при известных ковариационных матрицах / А. П. Сарычев // Международный научно-технический журнал “Проблемы управления и информатики”. – 2012. – № 3. – С. 14–30.

 ISSN 1562-9945