УДК 519.216

И.П. Атаманюк

ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИМАЛЬНОГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО АЛГОРИТМА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Анотація. У роботі для вирішення задачі прогнозування випадкової послідовності зміни стану технічної системи запропонована інформаційна технологія визначення оптимальних значень інтервалу післядії і порядку нелінійного зв'язку випадкової послідовності, що досліджується. В основу алгоритму екстраполяції і технології обчислення його оптимальних характеристик покладено нелінійне канонічне розкладання.

Ключові слова: випадкова послідовність, алгоритм прогнозу, оптимальні характеристики.

Введение

Увеличение масштабов производства, сложности технических систем, ответственности выполняемых ими задач неизбежно влечет к ужесточению требований к надежности функционирования технических систем. Особый интерес вызывает задача индивидуального прогнозирования состояния и надежности. Ее решение позволяет не только получить оценку надежности каждого конкретного экземпляра изделий, но и при наличии развитого диагностического обеспечения перейти от технического обслуживания по срокам или ресурсу к планированию эксплуатации по фактическому состоянию. Поэтому разработка методов прогнозирования технического состояния и анализ возможностей применения существующих алгоритмов является важной и актуальной задачей.

Постановка задачи

Положим, что состояние некоторого технического объекта исчерпывающим образом определяется скалярным параметром X, изменение значений которого в дискретном ряде точек $t_i, i=\overline{1,I}$ описывается случайной последовательностью $\{X\}=X(i), i=\overline{1,I}$. Наиболее универсальным с точки зрения ограничений, накладываемых на исследуемую случайную последовательность, является алгоритм прогноза [3,4] на основе канонического разложения [1,2]:

$$m_x^{(\mu,l)}(h,i)=\begin{cases} M\left[X^h(i)\right], \mu=0 \\ m_x^{(\mu,l-1)}(h,i)+\left(x^l(\mu)-m_x^{(\mu,l-1)}(l,\mu)\right)\varphi_{h\mu}^{(l)}(i),\ l\neq 1 \\ m_x^{(\mu-1,N)}(h,i)+\left(x^l(\mu)-m_x^{(\mu-1,N)}(l,\mu)\right)\varphi_{h\mu}^{(l)}(i),\ l=1 \end{cases} \quad (1)$$

Параметры алгоритма определяются из соотношений

$$\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i)=\frac{M\left[W_\nu^{(\lambda)}\left(X^h(i)-M\left[X^h(i)\right]\right)\right]}{M\left[\left\{W_\nu^{(\lambda)}\right\}^2\right]}=\frac{1}{D_\lambda(\nu)}(M\left[X^\lambda(\nu)X^h(i)\right]-$$

$$-M\left[X^\lambda(\nu)\right]M\left[X^h(i)\right]-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{N}D_j(\mu)\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\beta_{h\mu}^{(j)}(i)-$$

$$-\sum_{j=1}^{\lambda-1}D_j(\nu)\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\beta_{h\nu}^{(j)}(i),\ \lambda=\overline{1,h}, \nu=\overline{1,i}, h=\overline{1,N}, i=\overline{1,I};$$

$$D_\lambda(\nu)=M\left[\left(\overset{0}{X}(\nu)\right)^{2\lambda}\right]-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{N}D_j(\mu)\left\{\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\right\}^2-\sum_{j=1}^{\lambda-1}D_j(\nu)\left\{\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\right\}^2,\ \nu=\overline{1,I}.$$

где $W_i^{(\lambda)}$ - случайные коэффициенты канонического разложения, $D_\lambda(\nu)$- дисперсия случайных коэффициентов, $\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i)$ - координатные функции.

$m_x^{(\mu,l)}(h,i)=M\left[X^h(i)\,/\,x^\nu(j),\ j=\overline{1,\mu-1};\ \nu=\overline{1,N};\ x^\nu(\mu),\nu=\overline{1,l}\right]$ для $h=1,\quad l=N,\ \mu=k$ является несмещенной оптимальной оценкой будущего значения $x(i),\ i=\overline{k+1,I}$ при условии, что для определения данной оценки используются значения $x^\nu(j),\ \nu=\overline{1,N},\ j=\overline{1,k}$, т.е. результаты измерений случайной последовательности $\{X\}$ в точках $t_j,\ j=\overline{1,k}$ предполагаются известными.

Единственным требованием для применения алгоритма (1) является конечность дисперсии прогнозируемой случайной последовательности, что, как правило, на практике всегда выполняется. Однако использование канонических разложений имеет очевидные особенности - при формировании разложения необходимо использовать такие значения его параметров: длительность последействия I, ре-

 ISSN 1562-9945

ально существующая в случайной последовательности, и порядок стохастической связи N, при которых в экстраполяторе (1) достигается максимально полный учет стохастических свойств исследуемой случайной последовательности. Определение оптимальных характеристик I и N является целью работы.

Основная часть

Механизм учета последействия и оценка стохастической связи в каноническом разложении заложен в координатных функциях [1]:

$$\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i) = \frac{M\left[W_\nu^{(\lambda)}\left(X(i) - M\left[X(i)\right]\right)\right]}{D_\lambda(\nu)} = \frac{M\left[W_\nu^{(\lambda)}\overset{o}{X}(i)\right]}{D_\lambda(\nu)},\ i > \nu, \qquad (2)$$

которые по определению отражают степень стохастической связи между коэффициентами $W_\nu^{(\lambda)}$ и последующими сечениями случайной последовательности $X(i),\ i > \nu$. Таким образом, можно полагать, что воздействие коэффициентов $W_\nu^{(\lambda)}$ в сечении t_ν на последующие значения случайной последовательности закончились, если, начиная с некоторого $i_{k_\nu} > \nu$ для произвольного λ справедливо $\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i) \equiv 0$. Соответственно интервал последействия k_ν определяется при этом как

$$k_\nu = i_{k_\nu} - \nu. \qquad (3)$$

В рассматриваемой ситуации формирование элементов канонического разложения осуществляется по конечной выборке объема L. Поэтому определение k_ν сводится к решению следующей задачи. По данным выборки получены оценки значений координатной функции $\beta_{1\nu}^{(\lambda)(L)}(i),\ \lambda = \overline{1,N},\ i = \overline{\nu, I}.$ Требуется определить такое значение $i_{k_\nu},\ \nu < i_k$, для которого с заданной степенью доверия выполняется тождество $\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i) \equiv 0,\ \ i > \nu$.

Механизм линеаризации, заложенный в модели (1) позволяет свести задачу оценки последействия и определения порядка нелинейности случайной последовательности к анализу линейной связи между $W_\nu^{(\lambda)}$ и $X(i),\ \nu < i$, стандартной количественной характеристикой которой является нормированный коэффициент корреляции

$$r^{(\lambda)}(\nu,i)=\frac{M\left[W_{\nu}^{(\lambda)}\overset{o}{X}(i)\right]}{\sqrt{D_{\lambda}(\nu)}\sqrt{D_{x}(i)}},\ \lambda=\overline{1,N},\ \nu=\overline{1,I},\ i=\overline{\nu,I}. \quad (4)$$

С учетом (2) последнее выражение приводится к окончательному виду

$$r^{(\lambda)}(\nu,i)=\frac{\sqrt{D_{\lambda}(\nu)}\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i)}{\sqrt{D_{x}(i)}},\ i>\nu. \quad (5)$$

где коэффициент корреляции выражен через элементы канонического разложения. Поскольку оценки всех этих элементов получены в процессе обработки исходных статистических данных, их использование в формуле (5) позволяет получить оценку $r^{(\lambda)(L)}(\nu,i)$ нормированного коэффициента корреляции для любых ν, λ и i. С использованием этой информации поставленная задача оценки значимости корреляционной связи коэффициента $W_{\nu}^{(\lambda)}$ с i-м сечением исследуемой случайной последовательности может быть сформулирована как задача проверки статистической гипотезы

$$r^{(\lambda)}(\nu,i)=0 \quad (6)$$

против альтернативы $r^{(\lambda)}(\nu,i)\neq 0$.

Как показано в работе [1], случайную величину

$$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+r^{(\lambda)(L)}(\nu,i)}{1-r^{(\lambda)(L)}(\nu,i)}\right]$$

следует считать распределенной нормально, с математическим ожиданием

$$m=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+r^{(\lambda)}(\nu,i)}{1-r^{(\lambda)}(\nu,i)}\right]+\frac{r^{(\lambda)}(\nu,i)}{2(L-1)}$$

и дисперсией $D=\dfrac{1}{L-3}$, так что величина

$$a^{(\lambda)}(\nu,i)=\sqrt{L-3}\left[\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+r^{(\lambda)(L)}(\nu,i)}{1-r^{(\lambda)(L)}(\nu,i)}\right]-\left(\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+r^{(\lambda)}(\nu,i)}{1-r^{(\lambda)}(\nu,i)}\right]+\frac{r^{(\lambda)}(\nu,i)}{2(L-1)}\right)\right]$$

имеет стандартное нормальное распределение $(0,1)$.

 ISSN 1562-9945

Таким образом, следует считать данные совместимыми с гипотетическим значением $r^{(\lambda)}(\nu,i)$ с уровнем значимости α если

$$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+r^{(\lambda)}(\nu,i)}{1-r^{(\lambda)}(\nu,i)}\right]+\frac{r^{(\lambda)}(\nu,i)}{2(L-1)}$$

лежит в пределах

$$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+r^{(\lambda)(L)}(\nu,i)}{1-r^{(\lambda)(L)}(\nu,i)}\right]\pm\frac{z_\alpha}{\sqrt{L-3}}$$

где z_α - значение стандартного нормального отклонения, соответствующего доверительной вероятности α. В других случаях гипотетическое значение $r^{(\lambda)}(\nu,i)$ следует забраковать.

Учитывая, что выполняется проверка равенства коэффициента корреляции нулю ($r^{(\lambda)}(\nu,i)=0$) случайная величина $a^{(\lambda)}(\nu,i)$ принимает вид

$$a^{(\lambda)}(\nu,i)=\frac{\sqrt{L-3}}{2}\ln\left[\frac{1+r^{(\lambda)(L)}(\nu,i)}{1-r^{(\lambda)(L)}(\nu,i)}\right]$$

и гипотеза (6) принимается, если выполняется условие

$$-z_\alpha < a^{(\lambda)}(\nu,i) < z_\alpha. \tag{7}$$

Гипотеза (6) проверяется многократно при возрастающем параметре λ до некоторого граничного значения $N^{(\nu,i)}$, при котором условие (7) истинно ($N^{(\nu,i)}$ - старший порядок нелинейной связи между сечениями t_ν и t_i). После чего интервал увеличивается ($i=i+1$) и процедура поиска старшего порядка нелинейности повторяется для нового интервала.

Если для некоторого i_{k_ν} из области $i>\nu$ и произвольного λ (как правило, достаточно проверки при $\lambda=1$: нелинейные связи затухают быстрее линейных) окажется справедливым утверждение $r^{(\lambda)}(\nu,i)=0,\ i>i_{k_\nu}^{(\lambda)}$, это означает, что интервал последействия для точки дискретизации t_ν равен $i_{k_\nu}-\nu$ и для всех $i>i_{k_\nu}$ значение координатной функции $\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i)$ должно быть принято нулю.

Проверка последействия для всех точек дискретизации t_ν, $\nu=\overline{1,I^*}$, в которых исследуется случайная последовательность $\{X\}$, позволяет сформировать значения параметров N и I алгоритма экстраполяции (1) как

$$I = \max_{\nu}\left(i_{k_\nu} - \nu\right), \tag{8}$$

$$N = \max_{\nu,i} N^{(\nu,i)}. \tag{9}$$

Выводы

Таким образом, на основе выражений (8) и (9) решена задача определения оптимальных значений интервала последействия I и порядка N нелинейной связи, что позволяет достичь максимальной точности экстраполяции будущих значений прогнозируемого параметра технического объекта с помощью алгоритма (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрицкий, В.Д. Фильтрация, экстраполяция и распознавание реализаций случайных функций / Кудрицкий В.Д. – К.:ФАДА, ЛТД, 2001. – 176 с.
2. Пугачев, В.С. Теория случайных функций и ее применение / В.С. Пугачев. – М.:Физматгиз, 1962. – 720 с.
3. Atamanyuk, I.P. The algorithm of optimal polynomial extrapolation of random processes / I.P.Atamanyuk, V.Y.Kondratenko, O.V. Kozlov, Y.P. Kondratenko // Lecture Notes in Business Information Processing, 2012. – 115 LNBIP. – PP. 78-87.
4. Атаманюк, И.П. Алгоритм оптимальной нелинейной экстраполяции реализации случайного процесса с фильтрацией погрешностей измерений / И.П. Атаманюк, Ю.П. Кондратенко // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34, №4. – С. 23-40.

 ISSN 1562-9945