УДК 519.25

А.П. Сарычев

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Исследована итерационная процедура метода параметрической идентификации для задач моделирования объектов с многомерным выходом в классе систем авторегрессионных уравнений, в которых случайные аддитивные составляющие в выходных переменных, как в законе функционирования, так и в модели наблюдения объекта, могут быть статистически зависимы, а множества входных переменных в уравнениях могут быть различными. Эффективность итерационной процедуры подтверждена методом статистических испытаний.

Ключевые слова: задача структурно-параметрической идентификации.

Моделирование в классе систем авторегрессионных уравнений является распространенным подходом в технических задачах управления и научных исследованиях. Возникающая при этом задача оценивания коэффициентов в системе авторегрессионных уравнений имеет особенность, которая состоит в том, что регрессоры в моделях этого класса содержат случайную составляющую (errors-in-variables problem). В этих условиях вместо обычного метода наименьших квадратов (МНК) необходимо применять обобщённый (ОМНК) с ковариационной матрицей оценивания Σ_ξ специального вида (total least squares). Конструирование ковариационной матрицы в конкретных условиях той или иной задачи, её зависимость от неизвестных параметров авторегрессионных уравнений и необходимость итерационного уточнения приводит к различным алгоритмам оценивания [1–7].

В данной работе методом статистических испытаний исследуется итерационная процедура для оценивания коэффициентов в одном классе систем авторегрессионных уравнений [8–9], в которых множества входных переменных в уравнениях могут быть различными, а случайные аддитивные составляющие в выходных переменных могут быть статистически зависимы как в модели функционирования, так и в модели наблюдения.

1. Рассматриваемый класс систем авторегрессионных уравнений

Пусть функционирование динамического объекта подчиняется закону в виде системы авторегрессионных уравнений

$$\begin{pmatrix} \overset{*}{x}_1(k) \\ \overset{*}{x}_2(k) \\ \vdots \\ \overset{*}{x}_i(k) \\ \vdots \\ \overset{*}{x}_n(k) \end{pmatrix} = \sum_{q=1}^{h} \begin{bmatrix} \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-1}(q) & \cdots & \overset{*}{x}_{1-p}(q) \\ \overset{*}{x}_1(q) & \overset{*}{x}_0(q) & \cdots & \overset{*}{x}_{2-p}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{*}{x}_{i-1}(q) & \overset{*}{x}_{i-2}(q) & \cdots & \overset{*}{x}_{i-p}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{*}{x}_{n-1}(q) & \overset{*}{x}_{n-2}(q) & \cdots & \overset{*}{x}_{n-p}(q) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \overset{o}{\theta}_1(k,q) \\ \overset{o}{\theta}_2(k,q) \\ \vdots \\ \overset{o}{\theta}_p(k,q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_0(k) \\ \zeta_1(k) \\ \vdots \\ \zeta_{i-1}(k) \\ \vdots \\ \zeta_{n-1}(k) \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

которую в матрично-векторной форме можно записать в виде:

$$\overset{*}{\mathbf{x}}(k) = \sum_{q=1}^{h} \overset{*}{\mathbf{Z}}(-p;q)\,\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q) + \boldsymbol{\zeta}(-1;k), \quad k = 1,2,\ldots,h, \qquad (2)$$

где $\overset{*}{\mathbf{x}}(k)$ – ненаблюдаемый $(n\times 1)$-вектор значений k-й выходной переменной объекта в дискретные моменты времени $t = t_i$, $i = 1,2,\ldots,n$; n – общее число наблюдений за объектом; p – число предыдущих значений выходных переменных, которые влияют на их текущее значение; $\overset{*}{\mathbf{Z}}(-p;q)$ – $(n\times p)$-матрица p предыдущих ненаблюдаемых значений q-й переменной, $q = 1,2,\ldots,h$, в обозначении этой матрицы -1 означает тот факт, что в (1)–(2) при формировании величины $\overset{*}{x}_i(k)$ участвуют величины $(\overset{*}{x}_{i-1}(q), \overset{*}{x}_{i-2}(q),\ldots,\overset{*}{x}_{i-p}(q))$; h – число выходных переменных, образующих множество X; $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)$ – $(p\times 1)$-вектор неизвестных детерминированных, не зависящих от времени коэффициентов; $\boldsymbol{\zeta}(-1;k)$ – ненаблюдаемый случайный $(n\times 1)$-вектор, в обозначении которого -1 означает, что в (1)–(2) при формировании величины $x_i(k)$ аддитивно участвует величина $\zeta_{i-1}(k)$.

В (1)–(2) предполагается, что в формировании текущего значения k-й выходной переменной участвуют все p предыдущих значений всех h выходных переменных объекта. В общем же случае не все

ISSN 1562-9945

переменные и не все предыдущие значения переменных могут участвовать в этом формировании. Для формализации записи моделей в таком общем случае введем в рассмотрение структурные матрицы, смысл которых проиллюстрируем на конкретном примере. Пусть на текущее значение выходной переменной с номером k влияют первое, второе и четвертое предыдущие значения переменной с номером q из заданного максимально возможного числа влияющих предыдущих значений $p=5$. Тогда вместо матрицы $\overset{*}{\mathbf{Z}}(-p;q)$ в системе авторегрессионных уравнений

(1)–(2) следует записать произведение матриц

$$\overset{*}{\mathbf{Z}}(-p;q)\mathbf{S}(k,q)=$$

$$=\begin{bmatrix} \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-1}(q) & \overset{*}{x}_{-2}(q) & \overset{*}{x}_{-3}(q) & \overset{*}{x}_{-4}(q) \\ \overset{*}{x}_1(q) & \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-1}(q) & \overset{*}{x}_{-2}(q) & \overset{*}{x}_{-3}(q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{*}{x}_{i-1}(q) & \overset{*}{x}_{i-2}(q) & \overset{*}{x}_{i-3}(q) & \overset{*}{x}_{i-4}(q) & \overset{*}{x}_{i-5}(q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{*}{x}_{n-1}(q) & \overset{*}{x}_{n-2}(q) & \overset{*}{x}_{n-3}(q) & \overset{*}{x}_{n-4}(q) & \overset{*}{x}_{n-5}(q) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-1}(q) & \overset{*}{x}_{-3}(q) \\ \overset{*}{x}_1(q) & \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-2}(q) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{*}{x}_{i-1}(q) & \overset{*}{x}_{i-2}(q) & \overset{*}{x}_{i-4}(q) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{*}{x}_{n-1}(q) & \overset{*}{x}_{n-2}(q) & \overset{*}{x}_{n-4}(q) \end{bmatrix}, \quad \textbf{(3)}$$

где (5×3)-матрица $\mathbf{S}(k,q)$ представляет собой структурную матрицу, отражающую влияние первого, второго и четвертого предыдущих значений переменной с номером q на текущее значение переменной состояния с номером k. Априорная информация о значении p и о том, какие именно предыдущие значения каждой из переменных определяют текущие значения выходных переменных в законе функционирования объекта **(1)–(2)**, представляется совокупностью структурных матриц $\mathbf{S}(k,q),\ k,q=1,2,...,h$, которые могут быть различными для разных выходных переменных. В дальнейшем будем предполагать, что эти структурные матрицы заданы.

С учетом введенных структурных матриц закон функционирования **(2)** для общего случая формирования выходных переменных можно записать

$$\overset{*}{\mathbf{x}}(k)=\sum_{q=1}^{h}\overset{*}{\mathbf{Z}}(-p;q)\mathbf{S}(k,q)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)+\boldsymbol{\zeta}(-1;k)=\overset{=}{\mathbf{x}}(k)+\boldsymbol{\zeta}(-1;k),\quad k=1,2,...,h, \quad \textbf{(4)}$$

где $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)$ – $(m(k,q)\times1)$-вектор неизвестных детерминированных коэффициентов; $m(k,q)$ – число столбцов в матрице $\mathbf{S}(k,q)$;

$m(k,1)+m(k,2)+\ldots\ +m(k,k)+\ldots+m(k,h)=m(k)$ – общее число неизвестных коэффициентов в модели для выходной переменной с номером k; $\overset{=}{\mathbf{x}}(k)$ – ненаблюдаемая составляющая $(n\times 1)$-вектора значений k-й переменной.

Пусть для наблюдений k-й выходной переменной объекта выполняется

$$x_i(k)=\overset{*}{x}_i(k)+\varepsilon_i(k),\ \ i=1,2,\ldots,n,\ \ k=1,2,\ldots,h\,, \tag{5}$$

где $x_i(k)$ – наблюдаемое значение k-й переменной, измеренное в момент време-ни $t=t_i$, $i=1,2,\ldots,n$; $\overset{*}{x}_i(k)$ – ненаблюдаемое значение k-й переменной; $\varepsilon_i(k)$ – случайная ненаблюдаемая ошибка измерения k-й переменной.

С учетом (5) модель наблюдения объекта в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{x}(k)=\overset{*}{\mathbf{x}}(k)+\boldsymbol{\varepsilon}(k),\ \ k=1,2,\ldots,h\,. \tag{6}$$

Пусть реализации случайных величин $\zeta_i(-1;k)$ и $\varepsilon_i(k),\ i=1,2,\ldots,n$, между наблюдениями статистически независимы, и для них выполняется:

$$E\{\boldsymbol{\zeta}(-1)\}=\mathbf{O}_{(n\times h)}\,,$$

$$E\{[\boldsymbol{\zeta}(-1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}(-1)\}=n\begin{bmatrix}\sigma_\zeta(1,1) & \sigma_\zeta(1,1) & \ldots & \sigma_\zeta(1,h)\\ \sigma_\zeta(2,1) & \sigma_\zeta(2,2) & \ldots & \sigma_\zeta(2,h)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_\zeta(h,1) & \sigma_\zeta(h,2) & \ldots & \sigma_\zeta(h,h)\end{bmatrix}=n\,\boldsymbol{\Sigma}_\zeta\,; \tag{7}$$

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=\mathbf{O}_{(n\times h)}\,,\qquad E\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\}=n\begin{bmatrix}\sigma_\varepsilon(1,1) & \sigma_\varepsilon(1,1) & \ldots & \sigma_\varepsilon(1,h)\\ \sigma_\varepsilon(2,1) & \sigma_\varepsilon(2,2) & \ldots & \sigma_\varepsilon(2,h)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_\varepsilon(h,1) & \sigma_\varepsilon(h,2) & \ldots & \sigma_\varepsilon(h,h)\end{bmatrix}=n\,\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\,, \tag{8}$$

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}(-1)\}=\mathbf{O}_{(h\times h)}\,, \tag{9}$$

где $\mathbf{O}_{(n\times h)}$ – нулевая $(n\times h)$-матрица; $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta$, $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ – ковариационные $(h\times h)$-матрицы в модели функционирования и модели наблюдения объекта соответственно.

ISSN 1562-9945

Пусть в результате наблюдения объекта в моменты времени $t = t_i$, $i = 1-2p, 2-2p, ..., -p, 1-p, 2-p, ..., 0, 1, 2, ..., n$, получена $((n+2p)\times h)$-матрица

$$\begin{bmatrix} x_{1-2p}(1) & x_{1-2p}(2) & \cdots & x_{1-2p}(h) \\ x_{2-2p}(1) & x_{2-2p}(2) & \cdots & x_{2-2p}(h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{-p}(1) & x_{-p}(2) & \cdots & x_{-p}(h) \\ \hdashline x_{1-p}(1) & x_{1-p}(2) & \cdots & x_{1-p}(h) \\ x_{2-p}(1) & x_{2-p}(2) & \cdots & x_{2-p}(h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{0}(1) & x_{0}(2) & \cdots & x_{0}(h) \\ \hdashline x_{1}(1) & x_{1}(2) & \cdots & x_{1}(h) \\ x_{2}(1) & x_{2}(2) & \cdots & x_{2}(h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n}(1) & x_{n}(2) & \cdots & x_{n}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(-1) \\ \hdashline \mathbf{X}(0) \\ \hdashline \mathbf{X} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Результаты наблюдения **(10)** выходных переменных X объекта **(1)–(9)** используются при оценивании неизвестных $m(k,q)$-векторов коэффициентов $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)$, $k,q = 1,2,...,h$.

2. Результаты исследования на основе модельных экспериментов

Для оценивания коэффициентов разработана итерационная процедура **[9]**, которая исследуется ниже с помощью метода статистических испытаний. В каждом испытании с помощью датчика случайных чисел имитировались "наблюдения" объекта из класса **(1)–(10)** при следующих значениях параметров системы моделей: $h = 3,\ m(1) = 3,\ m(2) = 4,\ m(3) = 4$, $n = 300$, $p = 9$. Первые p "наблюдений" объекта в **(10)** – $x_i(k),\ i = 1-2p, 2-2p, ..., -p$, $k = 1,2,3$ (т. е. элементы матрицы $\mathbf{X}(-1)$ в **(10)**) формировались с помощью датчика независимых случайных чисел с заданным математическим ожиданием и единичным среднеквадратическим отклонением: $x_i(k) \sim N(\mu(k); \sigma^2)$, где $\sigma = 1{,}0$, $\mu(1) = 40{,}0$, $\mu(2) = 60{,}0$, $\mu(3) = 80{,}0$. "Наблюдения" $x_i(k)$, $i = 1-p, 2-p, ..., n$, $k = 1,2,3$ (т. е. элементы матриц $\mathbf{X}(0)$ и $\mathbf{X}$ в **(10)**) формировались в соответствии с моделью функционирования объекта **(11)** и моделью наблюдения объекта **(12)**:

ISSN 1562-9945

$$\begin{cases} \overset{*}{x}_i(1) = +0{,}97\,\overset{*}{x}_{i-1}(1) - 0{,}05\,\overset{*}{x}_{i-9}(1) + 0{,}05\,\overset{*}{x}_{i-4}(2) + \zeta_{i-1}(1) = \overset{=}{x}_i(1) + \zeta_{i-1}(1), \\ \overset{*}{x}_i(2) = -0{,}05\,\overset{*}{x}_{i-3}(1) + 0{,}97\,\overset{*}{x}_{i-1}(2) - 0{,}05\,\overset{*}{x}_{i-7}(2) + 0{,}10\,\overset{*}{x}_{i-5}(3) + \zeta_{i-1}(2) = \overset{=}{x}_i(2) + \zeta_{i-1}(2), \\ \overset{*}{x}_i(3) = -0{,}05\,\overset{*}{x}_{i-4}(1) - 0{,}05\,\overset{*}{x}_{i-6}(2) + 0{,}97\,\overset{*}{x}_{i-1}(3) + 0{,}08\,\overset{*}{x}_{i-5}(3) + \zeta_{i-1}(3) = \overset{=}{x}_i(3) + \zeta_{i-1}(3), \end{cases} \quad (11)$$

$$x_i(1) = \overset{*}{x}_i(1) + \varepsilon_i(1), \quad x_i(2) = \overset{*}{x}_i(2) + \varepsilon_i(2), \quad x_i(3) = \overset{*}{x}_i(3) + \varepsilon_i(3). \quad (12)$$

В (11) и (12) реализации случайных ненаблюдаемых величин $\zeta_{i-1}(k)$ и случайных ненаблюдаемых ошибок измерения $\varepsilon_i(k)$ формировались по известному в методе Монте-Карло способу перехода от набора независимых случайных $(n\times 1)$-векторов $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(q)$, $q = 1,2,3$ с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией к набору зависимых случайных $(n\times 1)$-векторов $\boldsymbol{\eta}(q)$, $q = 1,2,3$ с требуемой ковариационной матрицей $\boldsymbol{\Sigma}_\eta$:

$$[\boldsymbol{\eta}(1), \boldsymbol{\eta}(2), \boldsymbol{\eta}(3)] = \mathbf{H}\left[\tilde{\boldsymbol{\eta}}(1), \tilde{\boldsymbol{\eta}}(2), \tilde{\boldsymbol{\eta}}(3)\right], \quad (13)$$

где $\mathbf{H}$ – нижняя треугольная матрица в разложении матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_\eta$: $\boldsymbol{\Sigma}_\eta = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$.

Набор независимых случайных $(n\times 1)$-векторов $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(q)$, $q = 1,2,3$ формировался с помощью датчика независимых случайных чисел с нулевым математическим ожиданием и единичным среднеквадратическим отклонением, т. е. $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(q) \sim N(\mathbf{0}, \sigma_\eta^2\,\mathbf{I}_n)$, $\sigma_\eta = 1{,}0$. Ковариационные матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta$ и $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ формировались следующим образом: задавались корреляционные матрицы

$$\mathbf{K}_\zeta = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}4 & -0{,}7 \\ 0{,}4 & 1{,}0 & 0{,}3 \\ -0{,}7 & 0{,}3 & 1{,}0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 1{,}0 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & -0{,}4 & 1{,}0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

и диагональные элементы ковариационных матриц $[\boldsymbol{\Sigma}_\zeta]_{qq} = \sigma_\zeta^2$, $q = 1,2,3$, где $\sigma_\zeta = 0{,}5$, и $[\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon]_{qq} = \sigma_\varepsilon^2$, $q = 1,2,3$, где $\sigma_\varepsilon = 0{,}5$, а по ним однозначно рассчитывались недиагональные элементы ковариационных матриц: $[\boldsymbol{\Sigma}]_{q_1,q_2} = [\mathbf{K}]_{q_1,q_2}\sqrt{[\boldsymbol{\Sigma}]_{q_1,q_1}[\boldsymbol{\Sigma}]_{q_2,q_2}}$, $q_1, q_2 = 1,2,3\ (q_1 \neq q_2)$.

 ISSN 1562-9945

Коэффициенты в модели функционирования объекта (11) считались неизвестными, и их требовалось оценить по результатам "наблюдений" $x_i(k)$, $i=1-2p,2-2p,...,n$ $(n=300)$, $k=1,2,3$. Всего в эксперименте было проведено тысячу испытаний в соответствии с (11)–(14).

В таблицах представлены результаты оценивания по МНК и по предложенной процедуре оценивания (SAD). Оценки МНК, применяемого независимо для каждого из уравнений системы, часто используются для получения начального приближения, в том числе в тех случаях, когда отсутствует априорная информация о степени статистической зависимости между аддитивными случайными составляющими в моделях функционирования и наблюдения. В данном эксперименте начальное приближение вычислялось по (63)–(69) [9]. Приведены результаты эксперимента после 2-й и 3-й итераций.

В табл. 1 представлены среднеквадратичные приближения к ненаблюдае-мым (в практике) значениям выходов $\overset{=}{x}_i(1), \overset{=}{x}_i(2), \overset{=}{x}_i(3)$ моделей, полученных по методу наименьших квадратов (МНК) и по предложенной процедуре оценивания. Требования по качеству такого приближения актуальны в задачах управления, для решения которых, как правило, строятся модели в классе систем авторегрессионных уравнений.

Качество моделей оценивалось среднеквадратичным отклонением модельных выходов $\hat{y}_i(1), \hat{y}_i(2), \hat{y}_i(3)$ в (58) [9] от “точных” выходов $\overset{=}{x}_i(1), \overset{=}{x}_i(2), \overset{=}{x}_i(3)$ в (11), которые в условиях метода статистических испытаний нам известны:

$$\overset{=}{S}_{МНК}(k) = ((n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n} (\overset{=}{x}_i(k) - \hat{y}_i^{МНК}(k))^2)^{1/2}, \quad (15)$$

$$\overset{=}{S}_{SAD}(k) = ((n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n} (\overset{=}{x}_i(k) - \hat{y}_i^{SAD}(k))^2)^{1/2}, \quad k=1,2,3. \quad (16)$$

В соответствии с (32) и (51) в [9] для дисперсии величин $\xi_i(k) = y_i(k) - \overset{o}{y}_i(k)$, $i=1,2,...n$, $k=1,2,3$, выполняется

$$D\{\xi_i(k)\} = [\mathbf{\Sigma}_\varepsilon]_{kk} + \psi_{kk}(0) + [\mathbf{\Sigma}_\zeta]_{kk} = D(k), \quad (17)$$

и, поскольку в условиях модельного эксперимента величины $\overset{=}{x}_i(k)$ в (11) нам известны, то для дисперсии и среднеквадратичного отклонения величин $y_i(k)-\overset{=}{x}_i(k)$ выполняется

$$D\{y_i(k)-\overset{=}{x}_i(k)\}=\psi_{kk}(0), \qquad (18)$$

$$\overset{=}{S}_0\,(y_i(k)-\overset{=}{x}_i(k))=\left(\psi_{kk}(0)\right)^{1/2}. \qquad (19)$$

Величины $\overset{=}{S}_0\{y_i(k)-\overset{=}{x}_i(k)\}$, $\overset{=}{S}_{МНК}(k)$ и $\overset{=}{S}_{SAD}(k)$ для трех моделей в системе авторегрессионных уравнений приведены в табл. 1. Эмпирические распределения двух статистик $\overset{=}{S}_{МНК}(k)$ и $\overset{=}{S}_{SAD}(k)$ в виде гистограмм по 1000 испытаний приведены для трех регрессионных уравнений на рис. 1.1, 1.2, 1.3, на которых гистограммы из светлых столбиков соответствуют результатам МНК-оценивания, а гистограммы из тёмных столбиков – результатам оценивания по разработанной процедуре.

Таблица 1

Номер уравнения	$\overset{=}{S}_0\,(y_i(k)-\overset{=}{x}_i(k))$	$\overset{=}{S}_{МНК}(k)$	$\overset{=}{S}_{SAD}(k)$ (после 2-й итерации)	$\overset{=}{S}_{SAD}(k)$ (после 3-й итерации)
1	0,4865	0,4566	0,3843	0,3837
2	0,4890	0,4576	0,3869	0,3849
3	0,4881	0,4547	0,4004	0,3974

В табл. 1 приведены результаты после второй и третьей итераций. Выбор такого числа итераций обусловлен тем, что в соответствии с пробными расчетами улучшение качества системы уравнений по функционалу (76) [9] при переходе от второй итерации к третьей составляют величину, меньшую, чем

$$\delta_0^2=0{,}01(D(1)\cdot D(2)\cdot D(3))^{1/3}\approx 0{,}01(0{,}7365\times 0{,}7390\times 0{,}7381)^{1/3}=0{,}0074. \qquad (20)$$

Анализ табл. 1 и рис. 1.1–1.3 подтверждает эффективность предложенной процедуры оценивания по сравнению с обычным МНК. Описанный модельный эксперимент может послужить полигоном для тестовых испытаний других методов оценивания параметров в авторегрессионных уравнениях рассмотренного класса.

 ISSN 1562-9945

Приведем результаты второго модельного эксперимента, в котором среднеквадратичное отклонение величин $\xi(k)$, $k=1,2,3$, по сравнению с первым экспериментом увеличено в пять раз. Точнее говоря, в пять раз увеличены среднеквадратичные отклонения аддитивных случайных составляющих $\zeta_{i-1}(k)$ и $\varepsilon_i(k)$: $\sigma_\zeta = 2{,}5$; $\sigma_\varepsilon = 2{,}5$. Результаты второго эксперимента (по тысяче испытаний) представлены в табл. 2 и на рис. 2.1, 2.2, 2.3.

Таблица 2

Номер уравнения	$\overset{=}{S}_0(\overset{=}{y}_i(k) - \overset{=}{x}_i(k))$	$\overset{=}{S}_{МНК}(k)$	$\overset{=}{S}_{SAD}(k)$ (после 4-й итерации)
1	2,4314	2,2508	1,9183
2	2,4443	2,2686	1,9245
3	2,4396	2,2564	1,9863

Сравнение табл. 1 и табл. 2, а также рис. 1.1, 1.2, 1.3 и рис. 2.1, 2.2, 2.3, показывает, что показатели относительной эффективности разработанной процедуры по сравнению с МНК сохранились и во втором эксперименте.

В практических приложениях ковариационные матрицы $\mathbf{\Sigma}_\zeta$ и $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon$, как правило, априорно неизвестны. В этом случае ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}_\xi$ [9] (с учётом ее структуры!) можно оценивать итерационно по остаткам системы авторегрессионных моделей, как это сделано в итерационной процедуре [8]. В качестве начального приближения в этом случае в процедуре (58)–(77) выступают оценки обычного МНК [9].

Приведем результаты третьего модельного эксперимента, все параметры в котором совпадают с параметрами первого эксперимента, но ковариационные матрицы $\mathbf{\Sigma}_\zeta$ и $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon$ считаются неизвестными. Результаты третьего эксперимента (по тысяче испытаний) представлены в табл. 3 и на рис. 3.1, 3.2, 3.3.

Приведем результаты четвёртого модельного эксперимента, все параметры в котором совпадают с параметрами второго эксперимента, но ковариационные матрицы $\mathbf{\Sigma}_\zeta$ и $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon$ считаются неизвестными. Результаты четвёртого эксперимента (по тысяче испытаний) представлены в табл. 4 и на рис. 4.1, 4.2, 4.3.

В третьем и четвёртом эксперименте использовано правило останова итерационной процедуры по факту неулучшения функционала (76) [9].

Таблица 3

Номер уравнения	$\overset{=}{S}_0(y_i(k)-\overset{=}{x}_i(k))$	$\overset{=}{S}_{МНК}(k)$	$\overset{=}{S}_{SAD}(k)$ (после 3-й итерации)
1	0,4865	0,4568	0,3861
2	0,4890	0,4570	0,3890
3	0,4881	0,4542	0,3932

Таблица 4

Номер уравнения	$\overset{=}{S}_0(y_i(k)-\overset{=}{x}_i(k))$	$\overset{=}{S}_{МНК}(k)$	$\overset{=}{S}_{SAD}(k)$ (после 3-й итерации)
1	2,4314	2,2501	1,9313
2	2,4443	2,2683	1,9465
3	2,4396	2,2564	1,9670

Сравнение табл. 3 и табл. 4, а также рис. 3.1, 3.2, 3.3 и рис. 4.1, 4.2, 4.3, показывает, что относительная эффективность разработанной процедуры по сравнению с МНК в третьем и четвёртом экспериментах сохранились.

Заключение. Исследована итерационная процедура метода параметрической идентификации для задач моделирования объектов с многомерным выходом в классе систем авторегрессионных уравнений, в которых случайные аддитивные составляющие в выходных переменных, как в законе функционирования, так и в модели наблюдения объекта, могут быть статистически зависимы, а множества входных переменных в уравнениях могут быть различными. Эффективность итерационной процедуры подтверждена методом статистических испытаний.

 ISSN 1562-9945

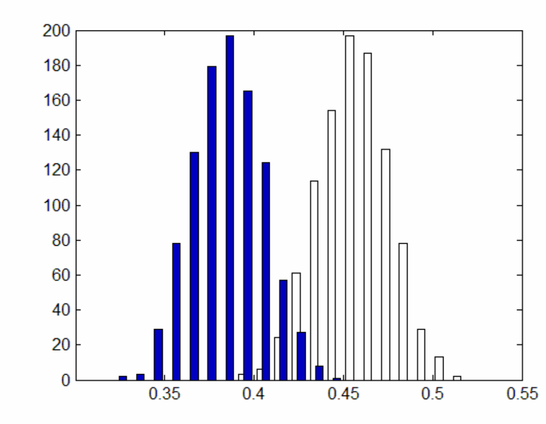

Рисунок 1.1 - Эксперимент 1, 1-е уравнение

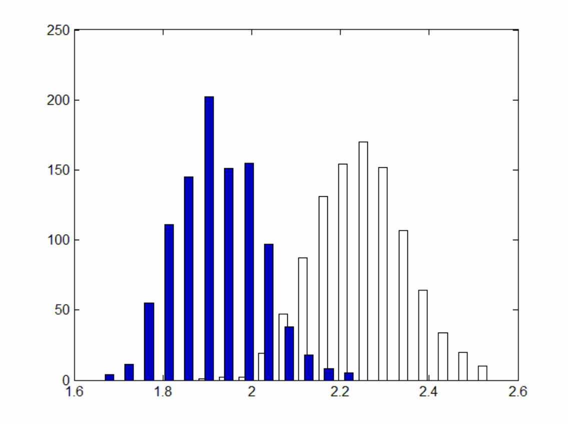

Рисунок 2.1 - Эксперимент 2, 1-е уравнение

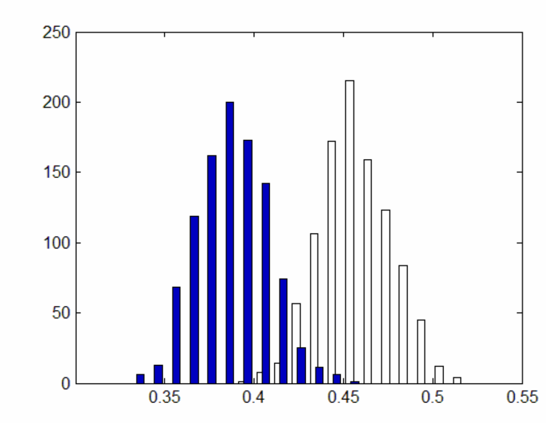

Рисунок 1.2 - Эксперимент 1, 2-е уравнение

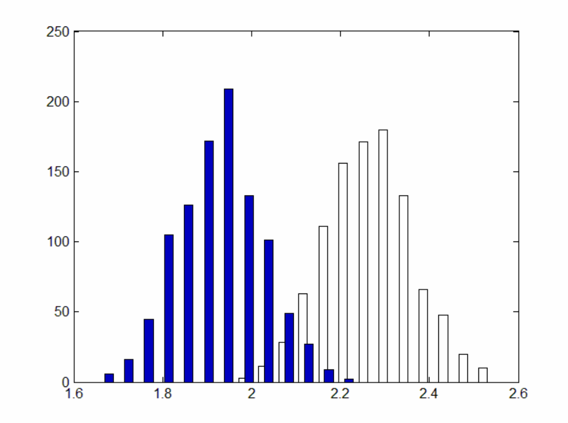

Рисунок 2.2 - Эксперимент 2, 2-е уравнение

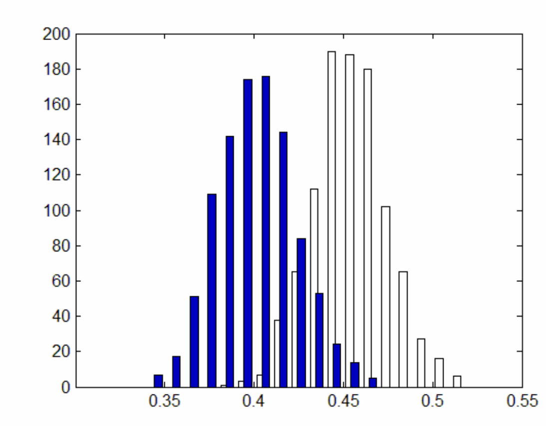

Рисунок 1.3 - Эксперимент 1, 3-е уравнение

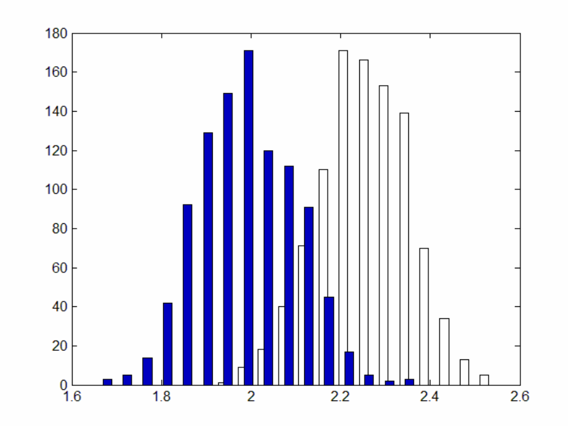

Рисунок 2.3 - Эксперимент 2, 3-е уравнение

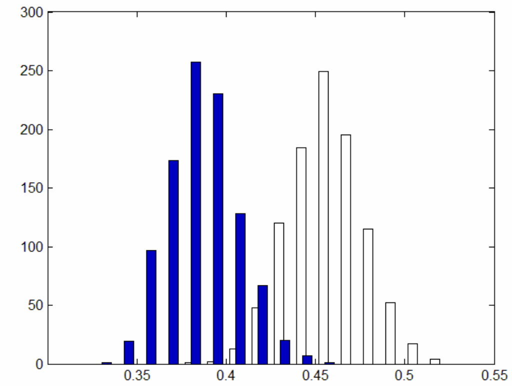

Рисунок 3.1 - Эксперимент 3, 1-е уравнение

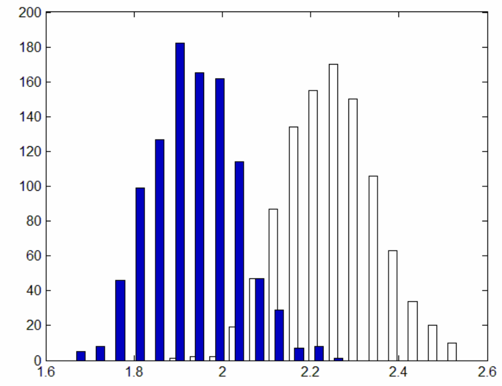

Рисунок 4.1 - Эксперимент 4, 1-е уравнение

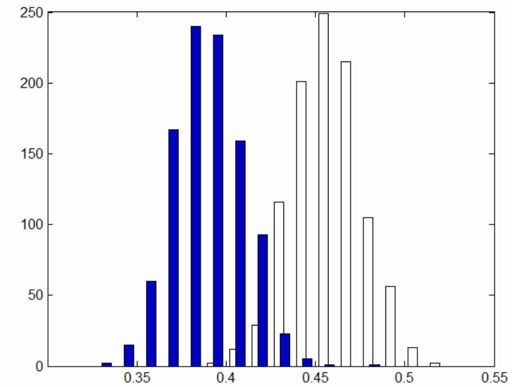

Рисунок 3.2 - Эксперимент 3, 2-е уравнение

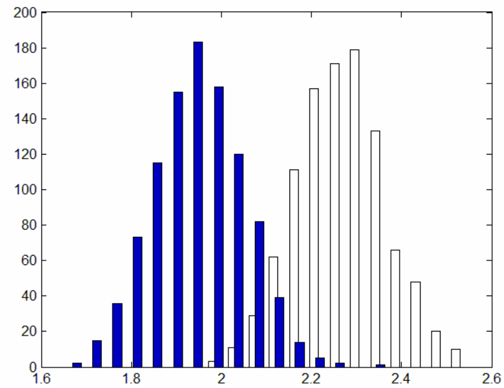

Рисунок 4.2 - Эксперимент 4, 2-е уравнение

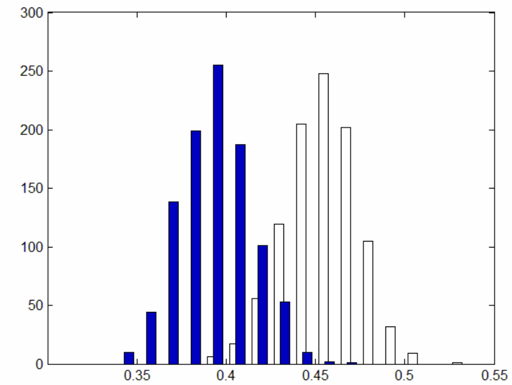

Рисунок 3.3 - Эксперимент 3, 3-е уравнение

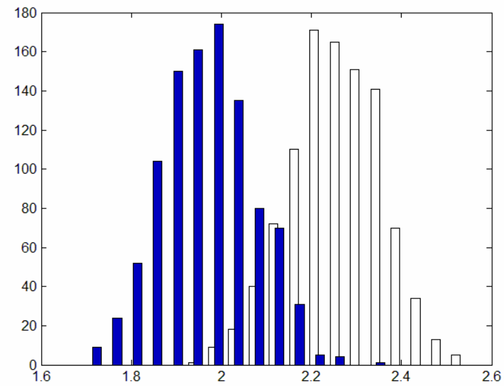

Рисунок 4.3 - Эксперимент 4, 3-е уравнение

 ISSN 1562-9945

ЛИТЕРАТУРА

1. Сильвестров А. Н. Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаев. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 199 с.
2. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя : пер. с англ. / Л. Льюнг. – М. : Наука, 1991. – 432 с.
3. Sцderstrцm T. Perspectives on errors-in-variables estimation for dynamic systems / T. Sцderstrцm, U. Soverini, K. Mahata // Signal Processing. – 2002. – **82**, No. 8. – P. 1139–1154.
4. Kukush A. Consistency of the structured total least squares estimator in a multivariate errors-in-variables model / A. Kukush, I. Markovsky, S. Van Huffel // Journal of Statistical Planning and Inference. – 2005. – **133**. – P. 315–358.
5. Markovsky I. Block-Toeplitz/Hankel structured total least squares / I. Markovsky, S. Van Huffel, R. Pintelon // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2005. – **26**, No. 4. – P. 123–147.
6. Sцderstrцm T. Errors-in-variables methods in system identification / T. Sцderstrцm // Automatica. – 2007. – **43 (6)**. – P. 939–958.
7. Сарычев А. П. Идентификация состояний структурно-неопределенных систем / А. П. Сарычев – Днепропетровск: НАН Украины и НКА Украины, Ин-т технической механики,2008.–268 с.
8. Сарычев А.П. Идентификация систем стохастических динамических дискретных моделей с детерминированными коэффициентами / А. П. Сарычев // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 5. – С. 39–55.
9. Сарычев А. П. Идентификация параметров систем авторегрессионных уравнений при известных ковариационных матрицах / А. П. Сарычев // Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики".– 2012. – № 3. – С. 14–30.