УДК 681.876.2

В.Е. Белозеров, В.Г. Зайцев

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕКУРРЕНТНЫЙ АНАЛИЗ В ОБРАБОТКЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Аннтация. Рассматриваются основные положения и возможности обработки временной информации с помощью рекуррентного анализа. Указываются направления его развития и использования для реальных процессов.

Ключевые слова: Рекуррентный анализ, моделирование, временной ряд.

Введение

Моделирование по временным рядам, полученным в процессе эксперимента (по дискретным последовательностям данных), является одним из активно развивающихся современных направлений математического моделирования. При изучении сложных природных явлений, временной ряд зачастую представляет собой единственную имеющуюся у исследователя информацию. Поэтому наиболее полное раскрытие свойств исследуемого процесса, содержащихся в данных наблюдений — одно из условий успешного построения модели. С другой стороны, исследование временных рядов играет важную роль и при работе с уже построенными математическими моделями. Как правило, это задачи связанные с подбором коэффициентов уравнений, верификации уравнений, изучения свойств самой модели. Это особенно актуально при моделировании динамических систем с хаотическим поведением, а точнее нелинейных динамических систем.

Правильное построение математической модели зависит от того, насколько полно был выполнен анализ исходных данных, выявлены и оценены свойства изучаемого объекта (процесса). Корректность построенной модели зависит от того, насколько полно была проанализирована и сама модель. В случае выявления недостаточной адекватности модели процесс повторяется заново с одного из этапов, что требует дополнительных временных, материальных и других затрат. Общепринято, что при динамическом моделировании основным критерием оценки правильности математической модели является

 ISSN 1562-9945

адекватность прогноза поведения исходной реальной системы. В настоящий момент средства анализа временных рядов являются одним из важнейших инструментов исследователя при моделировании.

Начиная с 1981г. набор традиционных (линейных) методов исследования временных рядов был существенно расширен нелинейными методами, полученными из теории нелинейной динамики и хаоса; многие исследования были посвящены оценке нелинейных характеристик и свойств естественных и искусственных систем. Большинство методов нелинейного анализа требуют либо достаточно длинных, либо стационарных рядов данных. Однако их далеко не всегда можно получить при практическом исследовании реальных систем. Более того, Манука (Manuca) и Савит (Savit) показали, что данные методы дают удовлетворительные результаты даже для идеализированных моделей реальных систем.

Известны следующие этапы математического моделирования, которые в целом сводятся к такой последовательности действий: 1. Получение и анализ наблюдаемых временных рядов (исходные данные) для постановки задачи; 2. Описание аналитической модели; 3. Выбор структуры модели: тип уравнений, вид функций, установление связи переменных с наблюдаемыми величинами; 4. Настройка модели: расчет (подбор) параметров; 5. Верификация модели (проверка ее адекватности); 6. Применение для анализа конкретного реального процесса.

Моделирование на основе временного ряда

Пусть результаты измерения реального процесса представлены в виде временного ряда или рядов $\{\vec{u}_i\}_1^n \equiv \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$, где $\vec{u}_i = \vec{u}(t_i), t_i = i\Delta t,\ n$ - количество данных наблюдения, Δt - интервал времени между измерениями. Чаще всего имеем одномерный ряд, так как зачастую нет информации обо всех переменных, или нет возможности их измерить. Далее, выполняется анализ и осуществляется словесное описание модели с учетом полученной информации из временного ряда, а также другой априорной информации, известной нам ранее. Создается математическая модель - это может быть детерминированная конечномерная модель в виде разностных уравнений вида $\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{c})$, обыкновенных дифференциальных уравнений вида $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{c})$, здесь $\vec{x},$ n-мерный вектор состояния, $\vec{F}$ - вектор-функция,

$\vec{c}$, $n-$мерный вектор параметров, n- дискретное время для первой модели, а во второй – непрерывное время. На этом этапе осуществляется выбор типа и числа уравнений, определяется вид входящих в уравнение функций $\left(\vec{F}\right)$ и число переменных (компонент вектора $\vec{x}$). Отметим, что в качестве переменных могут быть выбраны и наблюдаемые величины $\vec{x} \equiv \vec{u}$, но в общем случае может иметь место связь между ними $\vec{u} = h(\vec{x})$, где $h(x)$ некоторая измерительная функция. Далее, требуется осуществить выбор значений параметра c, для настройки модели. И наконец, осуществить верификацию построенной модели, т.е. проверка ее адекватности реальному процессу. Если она не удовлетворяет этому требованию - ее дорабатывают с учетом получаемых результатов.

Таким образом, видно, что средства анализа временных рядов занимают важное место на этапах эмпирического построения математической модели и играют большую роль в получении качественных результатов. Развитие теории нелинейной динамики и хаоса внесло понимание преимущества нелинейной сущности природных явлений, и моделирование в последние годы осуществляется в основном с использованием нелинейных разностных и дифференциальных уравнений различной размерности. Используемые ныне методы нелинейного анализа оказались малопригодными для исследований исходных временных рядов. По полученному в результате наблюдений временному ряду $\{\vec{u}_i\}_1^n$ можно судить о свойствах и поведении системы уже просто построив графическое изображение траектории в соответствующем фазовом пространстве (периодические или хаотические системы имеют портреты характерного вида). Однако, при размерностях 3 и более, такой анализ весьма затруднен, так как становится необходимым делать проекции в двух и трехмерные подпространства. Связь результатов наблюдений с переменными состояния и модельными уравнениями в общем случае осложнена еще и шумами. Например, для одномерного отображения $x_{n+1} = F(x_n + \xi_n, c)$ и $u_n = x_n + \zeta_n$, где ξ_n— динамический шум (т.е. влияющий на динамику системы), а ζ_n— измерительный шум (т.е. влияющий на результаты измерений), точное решение задачи о нахождении вектора параметров $\vec{c}$ возможно

 ISSN 1562-9945

лишь в идеальном случае $\xi_n = \zeta_n = 0$, что в реальных исследованиях является практически нереализуемым сценарием.

Лишенным указанных недостатков и одним из наиболее интересных современных методов являются рекуррентные диаграммы, получившие в последнее десятилетие широкое теоретическое развитие и практическое признание. Метод основан на фундаментальном свойстве динамических систем, отмеченном еще в конце 19-го века выдающимся французским математиком Анри Пуанкаре, и сформулированном в виде теоремы рекуррентности: «Если система сводит свою динамику к ограниченному подмножеству фазового пространства, то система почти наверняка, т.е. с вероятностью, практически равной единице, сколь угодно близко возвращается к какому-либо изначально заданному режиму».

Рекуррентное поведение - периодичность или иррегулярная цикличность, свойственно не только природным системам, но и сложным системам, созданным человеком. Рекуррентность (повторяемость) состояний в смысле прохождения позднего участка траектории в фазовом пространстве достаточно близко к предыдущему, является фундаментальным свойством диссипативных динамических систем.

Идея реконструкции аттрактора опирается на теорему Такенса (Takens, 1971), с помощью которой можно восстановить фазовое пространство аттрактора системы и составить представление о динамике всей системы по изменению одной переменной.

Пусть задана динамическая система (ДС) $\varphi^t(x)$ с фазовым пространством M. M – компактное d-мерное многообразие ($dim\ M = d$). Предположим, что числа, образующие временной ряд, являются значениями некоторой наблюдаемой – скалярной функции состояния ДС $x(t)$: $x_i=h(x(t_i))$ и представляют собой последовательность измеренных мгновенных значений переменной $x(t)$. Тогда, можно отобразить данную последовательность в m-мерное пространство так, чтобы каждое значение данного временного ряда $x(t_i)$ отображалось в точку этого пространства с координатами $\{x(t_i),x(t_i+\tau),...,x(ti+(m-1)\tau)\}$. Данное m-мерное прост-ранство назовем пространством вложения, а множество точек, моделирующее исходный аттрактор, – *восстановленным аттрактором*.

Пусть временной шаг между элементами временного ряда равен τ, а вектора $x(t_i)$ будем обозначать x_i. Тогда

$$x_{i+1} = \varphi^{\tau}(x_i), x_{i+2} = \varphi^{2\tau}(x_i), \ldots, x_{i+m-1} = \varphi^{(m-1)\tau}(x_i).$$

Построим вектора $z_i = \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}\}$, где

$$x_i = h(x_i),$$
$$x_{i+1} = h(x_{i+1}) = h(\varphi^{\tau}(x_i)),$$
$$x_{i+2} = h(x_{i+2}) = h(\varphi^{2\tau}(x_i)),$$
$$\ldots$$
$$x_{i+m-1} = h(x_{i+m-1}) = h(\varphi^{(m-1)\tau}(x_i)).$$

Все компоненты вектора z_i связаны с одним и тем же состоянием ДС x_i Тогда, существует такая вектор-функция V, которая отображает вектора x_i в точки m-мерного пространства R^m, $z_i = V(x_i)$, $x_i \in M$, $z_i \in R^m$.

Теорема Такенса утверждает, что типичным свойством отображения V будет то, что при $m \geq 2d+1$ оно будет давать вложение M в R^m

Образ M в R^m обозначим S: $S = V(M)$.

Согласно теореме, в типичном случае у него не должно быть самопересечений. Функция V имеет обратную V^{-1}, определенную на S. Каждой траектории ДС соответствует ее образ в z пространстве. Причем образы имеют те же свойства, что и исходные траектории. На S можно определить динамическую систему.

$$x_i = V^{-1}(z_i), x_{i+1} = \varphi^{\tau}(x_i),$$
$$z_{i+1} = V(x_{i+1}) = V(\varphi^{\tau}(x_i)) = V(\varphi^{\tau}(V^{-1}(z_i))) \equiv P(z_i).$$

P действует из S в S и не определено вне S.

Таким образом, мы имеем два отображения:

$$x_{i+1} = \varphi^{\tau}(x_i) \equiv \Phi(x_i), \quad \Phi: M \to M,$$
$$z_{i+1} = P(z_i), \quad P: S \to S.$$

Их можно рассматривать как отображения, связанные невырожденной заменой переменных $z = V(x)$. Характеристики, инвариантные относительно такой замены, у систем должны совпадать. К ним, в частности, относится корреляционная размерность, которую можно определить по экспериментальным данным, не зная всех переменных динамической системы. Свойства S и $P(z)$ зависят от ди-

 ISSN 1562-9945

намической системы φ, наблюдаемой функции h, задержки τ и размерности вложения m.

Метод Гроссбергера – Прокаччиа (Grassberger, Procaccia, 1983) заключается в восстановлении аттрактора, «похожего» на исходный, последовательным сдвигом на величину τ. Для оценки размерности вложения последовательно получают новые размерности и измеряют некоторую характеристику получившегося многомерного ряда. После некоторого значения эта величина перестает увеличиваться, что говорит о достижении размерности вложения. В качестве проверки достижения требуемой размерности в нашем случае используется корреляционный интеграл $C(\varepsilon)$.

Корреляционный интеграл (корреляционный показатель)–это вероятность того, что временной ряд содержит пару точек, расстояние между которыми не превышает ε. Вычисление корреляционного интеграла производится по формуле: $C(\varepsilon)=\frac{1}{N^2}\sum\limits_{i,j=1,i\neq j}\theta(\varepsilon-|x_i-x_j|)$, где

$\theta(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$ –функция Хэвисайда:N– число наблюдений, ε – расстояние, x_i, x_j – элементы выборки. Корреляционной размерностью называется величина $D_c=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\log C(\varepsilon)}{\varepsilon}$. Оценить D_c можно путем линейной аппроксимации. При малых ε, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{C(\varepsilon)}{\varepsilon}\approx\varepsilon^{D_c}$, отсюда,

$$\log C(\varepsilon)=D_c\log\varepsilon+const,\quad D_c=\frac{\log C(\varepsilon)-const}{\log\varepsilon}.$$

Корреляционный интеграл можно рассчитывать и для точек в исходном фазовом пространстве x_i, и для реконструированных векторов z_i Во втором случае корреляционная размерность становится функцией не только от ε, но и от параметров реконструкции m и τ.

Зависимость от двух последних параметров позволяет диагностировать хаотичность, уровень шума, время предсказуемости.

Как уже отмечалось, практическая реализация идей реконструкции часто сталкивается, с одной стороны, с проблемой ограниченности временного ряда, с другой стороны, с проблемой стационарности исследуемого объекта.

Например, ЭЭГ которую снимают длительное время, не является стационарным процессом. Требование стационарности процесса можно считать практически соблюденным в пределах участка ЭЭГ продолжительностью до 1с.

В дальнейших исследованиях, предложенные в 1987-м году Экманом (Eckmann), Кампхорстом (Kamphorst) и Рюэлем (Ruelle) рекуррентные диаграммы, основаны на этом фундаментальном свойстве, и позволяют отобразить фазовую траекторию любой размерности на двумерную двоичную квадратную матрицу, размер которой определяется длиной временного ряда, через свойство рекуррентности. Помимо визуальных возможностей, существует метод количественного анализа структур, формируемых на изображении рекуррентной диаграммы. Современные исследования показали, что рекуррентная диаграмма содержит всю необходимую информацию о динамике системы. Работы ученых, как Джо Збилут (Joe Zbilut), Норберт Марван (Norbert Marwan), Марко Тиль (Marco Thiel), Кармен Романо (Carmen Romano) и других, существенно обогатили возможности данного метода за последнее десятилетие. Начиная с 2005-го года, регулярно проводятся международные конференции по рекуррентному анализу. Несмотря на достаточно высокий интерес к этому методу со стороны зарубежных ученых (количество публикаций по его применению в научной деятельности составляет сотни работ), его применение довольно редко встречается в отечественной научной и технической практике. Отсутствует инструментарий, который объединял бы в себе все последние достижения в области рекуррентного анализа и при этом был бы ориентирован на создание на его основе комплексов программ. Зачастую исследователь вынужден делать произвольный выбор управляющих параметров количественного анализа ввиду отсутствия оснований и критериев для их выбора. В ряде случаев исследователи допускают привлечение сторонних, не основанных на теории о рекуррентности, методов с целью попыток «реконструкции» частей диаграмм, что вносит в анализ информацию, не полученную непосредственно из исследуемых данных. Также следует отметить, что сам по себе рекуррентный анализ представляет собой богатое поле для исследований, как самого метода, так и аспектов его применения.

Рекуррентные диаграммы — нетребовательный к качеству входных данных комплексный метод анализа временных рядов, со-

 ISSN 1562-9945

вмещающий в себе визуальные возможности (диаграммы) и мощный численный аппарат (меры). Тем не менее, метод сам по себе представляет поле для исследований, в том числе изучения возможностей и особенностей применения в практике построения математических моделей. Отсутствует достаточно гибкий инструментарий для использования при построении проблемно-ориентированных программ (в частности, ориентированных на регулярное прикладное использование).

Следовательно, разработка и исследование методов и алгоритмов применения рекуррентных диаграмм на этапах математического моделирования, а также разработка гибкого инструментария, реализующего возможности метода, являются актуальными проблемами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eckman J.P., Kamphorst S.O., Ruelle D. Recurrence Plots of Dynamical Systems// Europhysics Letters 5. – 1987. V.4. N 9. – P. 973-977.
2. Marvan N., Romano M. C., Thiel M., Kurths J. Recurrence plots for the analysis of complex systems //Physics Reports. 2007. V.438. –P. 237 – 329.
3. Marwan N. How to avoid potential pitfalls in recurrence plot based data analysis// International Journal of Bifurcation and Chaos, 2011,V.21(4), –P. 1003–1017.
4. C. Mocenni, A. Facchini, A. Vicino: Comparison of recurrence quantification methods for the analysis of temporal and spatial chaos//Mathematical and Computer Modelling, 2011, V. 53(7–8), –P. 1535–1545.
5. Shultz A., Zou Y., Marwan N., Turvey M. Local minimal-based recurrence plots for continuous dynamical systems – International Journal of Bifurcation and Chaos, 2011, V. 21, –P. 1065 – 1075.