УДК 519.24.681

В.П. Малайчук, И.И. Деревянко

ОБРАБОТКА ИСКАЖЕННЫХ МОДУЛИРУЮЩЕЙ ПОМЕХОЙ ИЗМЕРЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ ИНФОРМАТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТОВ КОНТРОЛЯ

Аннотация. Исследованы возможности уменьшения влияния контактной (модулирующей) помехи наоценки неизвестного параметра различными методами обработки экспериментальных измерений при недостатке априорных знаний об их статистических закономерностях.

Ключевые слова: модулирующая помеха, метод оценивания, выборка измерений, гистограмма оценок, среднее значение, разброс.

Постановка задачи

В задачах ультразвукового неразрушающего контроля имеют место искажения измерений не только электронными шумами, но и за счет случайных изменений неконтролируемого контакта между пъезопреобразователем и поверхностью контролируемого объекта. Если измеряется параметр b, то модель измерений в этом случае записывается выражением

$$x(k) = m(k)b + n(k), \tag{1}$$

где b - измеряемый параметр; k - номер измерений; $m(k)$ - контактная (модулирующая) помеха; $n(k)$ - измерительный шум с плотностью распределения вероятностей Гаусса; $x(k)$ - измерение.

Располагая выборкой независимых измерений $x(k)$, $k = 1, 2, ..., N$, необходимо оценить параметр b. Метод решения этой задачи известен, если известны статистические закономерности измерений. Это метод максимума функции правдоподобия[1, 2]. Контактная помеха изменяется от нуля до единицы и в качестве модели ее статистической закономерности можно использовать закон бета-распределения вероятностей

$$W(m) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} m^{\alpha-1}(1-m)^{\beta-1}, \tag{2}$$

где $\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\beta)$ - гамма функции.

В работе [3] представлены результаты исследования параметров статистической модели модулирующей помехи при экспериментальном ультразвуковом контроле. Показано, что статистические закономерности контактных помех можно описыватьбета-распределением с параметрами $4 \le \alpha \le 6$ и $1 \le \beta \le 2$.

Располагая этими априорными данными и выборкой независимых измерений x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_N,необходимооценить неизвестный параметр b и исследовать ошибки оценивания, если неизвестны параметры закона распределения вероятности измерений.

Разработка алгоритмов оценивания параметров по выборкам измерений, искаженных помехами

Рассмотрим сначала вариант оценки, когда измерительным шумом можно пренебречь. В этом случае закон распределения измерений запишется в виде

$$W(x_k / b) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{b\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{x_k}{b}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{b-x_k}{b}\right)^{\beta-1}. \qquad (3)$$

Располагая независимой выборкой измерений, сформируем условную логарифмическую функцию правдоподобия

$$L(|x_k|/b) = \sum_{k=1}^{N} \ln(W(x_k/b)), \qquad (4)$$

приравняемеепроизводную к нулю и, решив это уравнение, получим оценку измеряемого параметра в виде

$$b^* = \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha \cdot N} \sum_{k=1}^{N} x_k . \qquad (5)$$

Учитывая, что математическое ожидание $M[x_k]$ и дисперсия $D[x_k]$равны

$$M[x_k] = \frac{\alpha b}{\alpha+\beta}, \quad D[x_k] = \frac{b^2 \alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}, \qquad (6)$$

для вычисления математического ожидания оценки b^* иее дисперсии получим формулы

$$M[b^*] = \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+\beta} b, \quad D[b^*] = \frac{b^2 \beta(\alpha+\beta-1)^2}{\alpha N(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}. \qquad (7)$$

Из их рассмотрения следует, что оценка по методу максимума функции правдоподобия смещенная, а дисперсия зависит от величи-

 ISSN 1562-9945

ны измеряемого параметра и чем больше параметр, тем больше разброс оценок. Формулы для несмещенной оценки и ее дисперсии запишутся в виде

$$b_н^* = \frac{1}{N}\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\sum_{k=1}^{N} x_k\,, \quad D[b_н^*] = \frac{b^2\beta}{\alpha N(\alpha+\beta+1)}. \tag{8}$$

При наличии измерительного шума, используя метод максимума гауссовой условной функции правдоподобия

$$L(|x|/b|m|) = -\left(N\ln(\sqrt{2\pi}\sigma)\right) - \sum_{k=1}^{N}\frac{(x_k - bm_k)^2}{2\sigma^2}, \tag{9}$$

приравняв ее производную к нулю, получим уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{N}(x_k - bm_k)m_k = 0. \tag{10}$$

Определим его условное математическое ожидание и решим уравнение

$$\sum_{k=1}^{N} M(x_k m_k) - bM(m_k^2) = 0. \tag{11}$$

Учитывая, что математические ожидания равны

$$M[m_k] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \; D[m_k^2] = \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}, \tag{12}$$

получим оценку

$$b^* = \frac{\alpha+\beta+1}{(\alpha+1)N}\sum_{k=1}^{N} x_k\,. \tag{13}$$

Эта оценка тоже смещенная. Ее математическое ожидание и дисперсия будут равны

$$M[b^*] = \frac{\alpha(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+\beta)}b\,, D[b^*] = \frac{(\alpha+\beta+1)^2}{N(\alpha+1)^2}\left(\frac{b^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} + \sigma^2\right). \tag{14}$$

Несмещенная оценка и ее дисперсия будут равны

$$b_н^* = \frac{1}{N}\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\sum_{k=1}^{N} x_k\,, \quad D[b_н^*] = \frac{(\alpha+\beta)^2}{N\alpha^2}\left(\frac{b^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} + \sigma^2\right). \tag{15}$$

Рассмотрим теперь оценивание в условиях полной неопределенности, полагая неизвестными параметры α и β, и пренебрегая наличием измерительного шума. Используя выборку логарифма измерений $\ln[x(k)]$ и метод наименьших квадратов, оценим логарифм $\ln(b)$. Средний квадрат ошибки по выборке $\ln[x(k)]$ запишется в виде

$$\Delta^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(\ln(x_k) - \ln(b))^2 . \tag{16}$$

Приравняв производную к нулю, получим уравнение оценивания

$$\sum_{k=1}^{N}(\ln(x_k) - \ln(b))^2 = 0 \tag{17}$$

и оценку параметра

$$b^* = \exp\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln(x_k)\right). \tag{18}$$

Рассмотрим второй метод решения этой задачи. Максимальное значение, которое может принять случайная величина, описываемая бета-распределением, равна единице, а для закона распределения $W(x/b)$ граничное значение x равно b, а наиболее вероятное зависит от параметров закона α и β и равно

$$x_н = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} b . \tag{19}$$

Из рассмотрения (19) следует, что измеряемый параметр b, если $\beta = 1$, равняется $x_н = x_{\max}$, где $x_{\max}$ - максимальное значение, среди измерений в рассматриваемой выборке, может служить оценкой параметра $b^* = x_{\max}$. Если $\beta = 2$, то наиболее вероятное измерение равняется $x_н = b(\alpha - 1)\alpha^{-1}$. Так как $x_{\max} > x_н$, а $(\alpha - 1)\alpha^{-1} < 1$, то при больших α максимальное измерения $x_{\max}$ также может служить оценкой неизвестного параметра $b^* = x_{\max}$, если $\beta < \alpha$. Статистические закономерности $x_{\max}$ неизвестны. Информацию о них можно получить путем проведения вычислительных экспериментов, по результатам которых можно сделать выводы и предложить практические рекомендации.

Рассмотрим еще одну возможность решения задачи при полной неопределенности о статистических закономерностяхизмерений, используя метод моментов. Начальные моменты бета-распределения зависят от измеряемого параметра b и от неизвестных коэффициентов α и β и равны

$$M_i = \frac{B(\alpha, \beta + i)}{B(\alpha, \beta)}, \tag{20}$$

где $B(x, y)$ - бета-функция; i - порядок момента.

Первые три момента $M_i[x]$ можно представить в виде

 ISSN 1562-9945

$$M_1=\frac{b\alpha}{\alpha+\beta},\quad M_2=M_1\frac{b(\alpha+1)}{\alpha+\beta+1},\quad M_3=M_2\frac{b(\alpha+2)}{\alpha+\beta+2}. \tag{21}$$

Если моменты известны, то эти формулы можно рассматривать как систему нелинейных уравнений с неизвестными b, α и β. Запишем их в виде

$$b=M_1\frac{(\alpha+\beta)}{\alpha},\quad \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+\beta+1)}=\frac{M_2}{M_1^2}=A_1,\quad \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+\beta+2)}=\frac{M_3}{M_1M_2}=A_2. \tag{22}$$

Последние два уравнения после нелинейных преобразований можно упростить

$$\beta=\frac{(A_2-A_1)(\alpha+1)(\alpha+2)}{A_1(\alpha+2)-A_2(\alpha+1)},\quad \frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{2A_1-A_2-1}{A_1A_2+A_1-2A_2}. \tag{23}$$

Из выражений (22) и (23) следует, что для оценки параметра b^* можно использовать формулу

$$b^*=\frac{M_1^*(A_1^*A_2^*+A_1^*-2A_2^*)}{2A_1^*+A_2^*-1}, \tag{24}$$

где M_1^*, A_1^* и A_2^* определяются через оценки трёх начальных моментов.

Анализ результатов вычислительных экспериментов

Теоретические результаты исследований и эффективность оценивания параметра b определялись путём проведения вычислительных экспериментов. При помощи генераторов формировались выборки размером $N=10$, 25, 50 измерений случайных величин с бета-распределениеми параметрами $b=10$, $\alpha=5$, $\beta=1$, 2. По этим выборкам оценивался параметр b^*, строились гистограммы оценок, определялись выборочные значения средних и их нормированные разбросы (отношение корня квадратного из выборочной дисперсии к среднему значению) и влияние на них размеров выборок измерений.Для анализа результатов вычислительного эксперимента использовался визуально-аналитический метод представления экспериментальных данных.

Результаты исследования несмещенных оценок методом максимума функции правдоподобия с известными значениями параметров законов распределения помех без учета измерительного шума представлены на рисунке 1 и в таблице 1. Их можно рассматривать как эталоны сравнения.

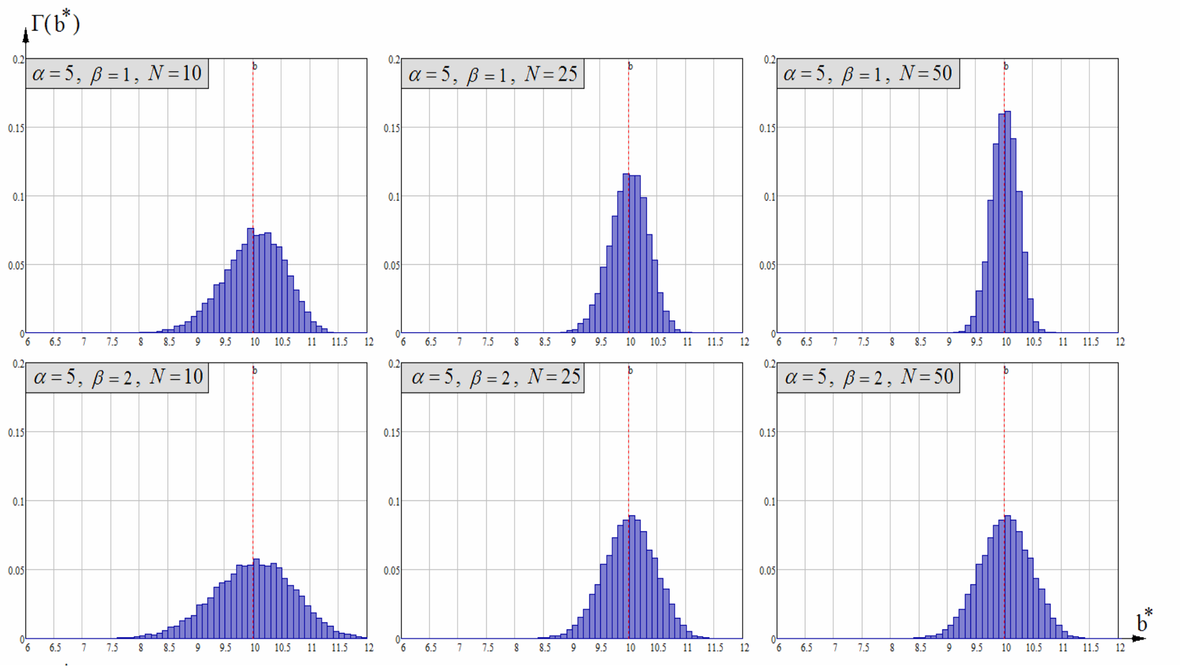

Рисунок 1 – Гистограммы несмещенных оценок b^*, полученных методом максимума функции правдоподобия

Таблица 1

Среднее $\bar{b}^*$ и нормированный разброс $\Delta b^* / \bar{b}^*$ оценокпараметра b

b=10			смещенная			несмещенная		
			N=10	N=25	N=50	N=10	N=25	N=50
α=5 β=1	$\bar{b}^*$	теорет	8,333			10		
		экспер	8,378	8,328	8,342	10,054	9,993	10,01
	$\Delta b^* / \bar{b}^*$	теорет	0,0534	0,0337	0,0240	0,0535	0,0338	0,0239
		экспер	0,0534	0,0346	0,0249	0,0536	0,0346	0,0246
α=5 β=2	$\bar{b}^*$	теорет	8,571			10		
		экспер	8,539	8,556	8,599	9,962	9,982	10,032
	$\Delta b^* / \bar{b}^*$	теорет	0,0707	0,0447	0,0315	0,0707	0,0447	0,0316
		экспер	0,0737	0,0465	0,0331	0,0737	0,0456	0,0330

Как видно, оценки смещенные, а несмещенные оценки близки к измеряемому параметру и их нормированный разброс уменьшается в 1,4ч1,6 раза при увеличении размеров выборок. Нормированный разброс оценок тоже увеличивается в 1,35 при увеличении параметра β от 1 до 2.

ISSN 1562-9945

На рисунке 2 и в таблице 2 представлены результаты вычислительного эксперимента в условиях полной неопределенности о статистических закономерностях измерений без учета измерительного шума методом наименьших квадратов логарифма оцениваемого параметра.

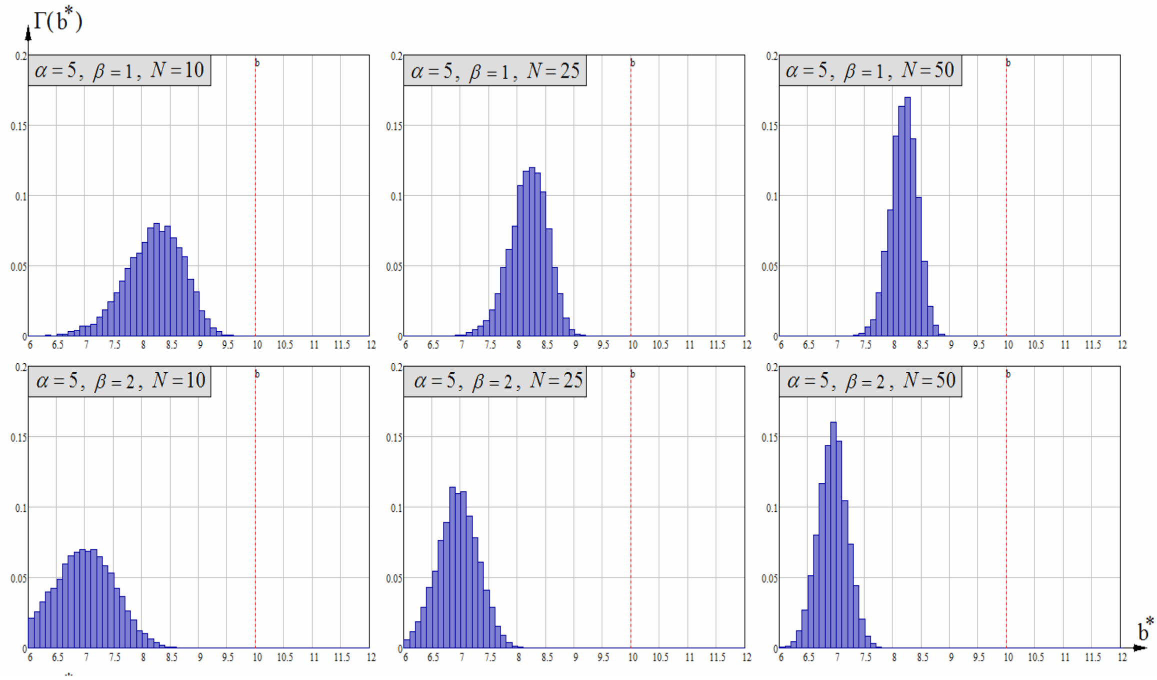

Рисунок 2 – Гистограммы оценок b^*,
полученных методом наименьших квадратов логарифма

Таблица 2

Среднее $\bar{b}^*$ и нормированный разброс $\Delta b^* / \bar{b}^*$ оценок параметра b

b=10		N=10	N=25	N=50
α=5 β=1	$\bar{b}^*$	8,21	8,2	8,191
	$\Delta b^* / \bar{b}^*$	0,0619	0,0399	0,0283
α=5 β=2	$\bar{b}^*$	6,959	6,941	6,935
	$\Delta b^* / \bar{b}^*$	0,0808	0,0514	0,0370

При использовании этого метода имеют место большие ошибки за счет смещения среднего значения от величины измеряемого параметра. При $\beta = 1$ оценки незначительно отличаются от смещенных оценок, полученных методом максимума функции правдоподобия. При $\beta \geq 2$ ошибки оценок за счет смещения резко увеличиваются.

На рисунке 3 и в таблице 3 представлены гистограммы оценок, их средние значения и нормированный разброс при нескольких параметрах β, полученные методом измерения максимальных значений выборок.При их использовании следует учитывать большое влияние параметрабета-распределения β на смещение и разброс.

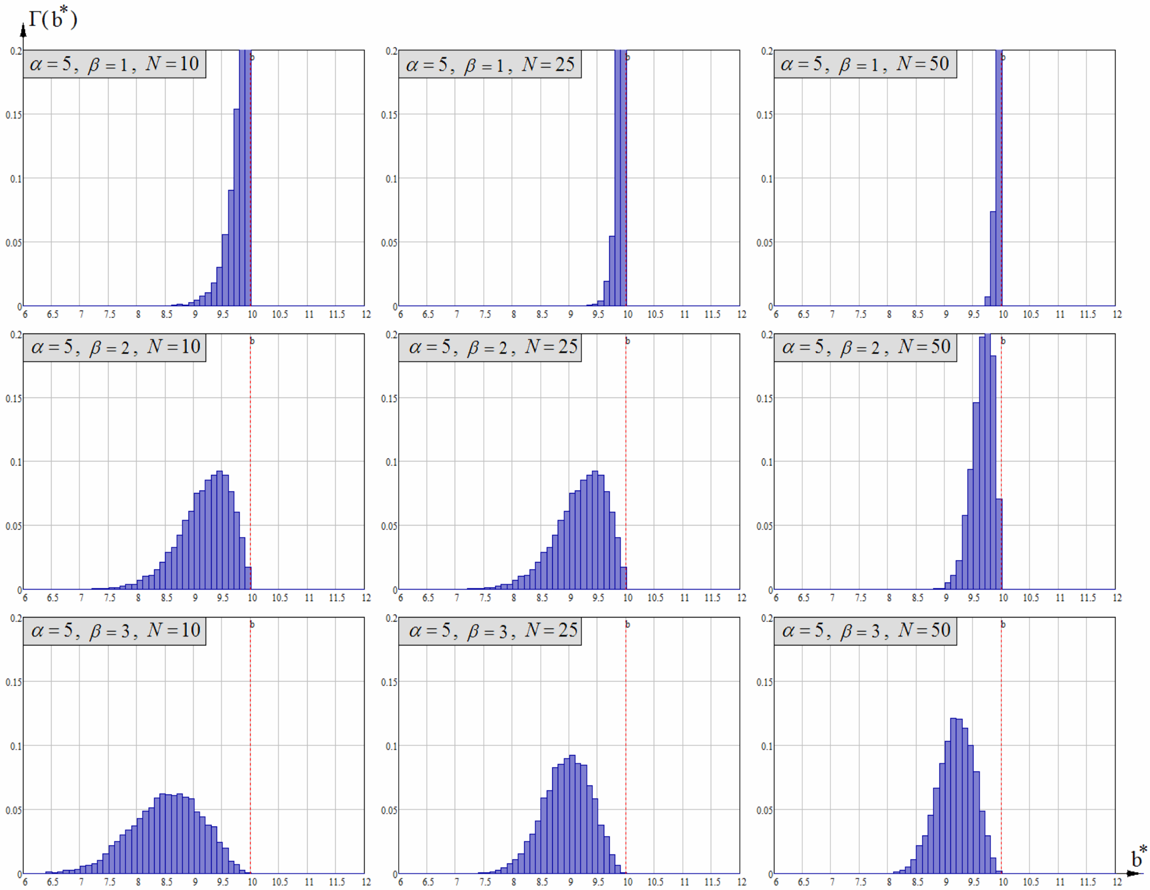

Рисунок 3 – Гистограммы оценок b^*, полученных методом максимума

Таблица 3

Среднее $\overline{b}^*$ и нормированный разброс $\Delta b^* / \overline{b}^*$ оценок параметра b

b=10		N=10	N=25	N=50
α=5 β=1	$\overline{b}^*$	9,807	9,921	9,96
	$\Delta b^* / \overline{b}^*$	0,0200	0,0079	0,0039
α=5 β=2	$\overline{b}^*$	9,2	9,507	9,663
	$\Delta b^* / \overline{b}^*$	0,0487	0,0286	0,0190
α=5 β=3	$\overline{b}^*$	8,513	8,953	9,189
	$\Delta b^* / \overline{b}^*$	0,0715	0,0462	0,0344

 ISSN 1562-9945

Как следует из анализа табличных данных, при значениях параметра $\beta \le 2$ смещение отрицательное ине превышает $0{,}05b$, а разброс меньше $0{,}03b$ при $\mathrm{N} \ge 25$. При $\beta \ge 3$ смещения оценок увеличивается и их значения мало отличаются от смещений метода наименьших квадратов.

Результаты исследования оценок по экспериментальным данным методом моментов представлены на рисунке 4 и в таблице 4.

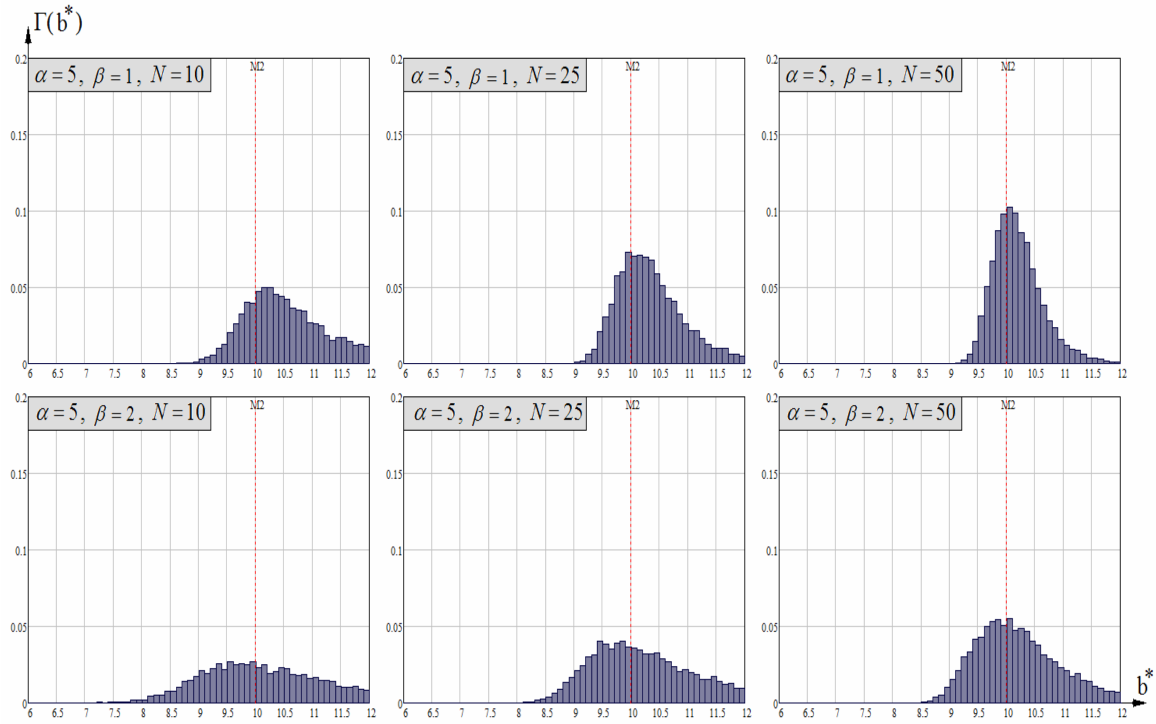

Рисунок 4 – Гистограммы оценок b^*, полученных методом моментов

Таблица4

Среднее $\bar{b}^*$ и нормированный разброс $\Delta b^*/\bar{b}^*$ оценок параметра b

b=10		N=10	N=25	N=50
α=5 β=1	$\bar{b}^*$	10,817	10,428	10,205
	$\Delta b^*/\bar{b}^*$	0,1130	0,0749	0,0460
α=5 β=2	$\bar{b}^*$	10,607	10,551	10,349
	$\Delta b^*/\bar{b}^*$	0,1463	0,1281	0,0953

При тех же условиях ($\beta \le 2$ и $N \ge 25$)смещения положительные и не превышают $0{,}05b$, а разбросы меньше $0{,}1b$, что в 3 раза больше, чем разброс оценок по методу максимума измерений выборки.

Выводы

По результатам визуально-аналитического анализа гистограмм оценок измеряемого параметра и их статистических характеристик (средних значений и нормированных разбросов), представленных в виде графиков и таблиц, можно сделать следующие выводы и рекомендации:

1) оценивание путем измеренияmаксимального значения в выборке является наиболее эффективным и высокоточным, если есть уверенность, что параметр β гамма-распределения не превышал 2;

2) на втором месте из-за разброса измерений находится оценивание параметра b методом моментов в условиях полной неопределенности про статистические закономерности измерений;

3) учитывая, что в смещениях этих двух оценок различные знаки (больше и меньше измеряемого параметра), предлагается использовать в качестве обобщенной оценки их среднее значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маєвський С.М. Основа побудови систем аналізусигналів у неруйнівномуконтролі / СМ. Маєвський, В.П. Бабак., Л.М. Щербак //Навчальнийпосібник – К.: Либідь, 1993. – 200 с.
2. Білецький А.Я. Оцінювання частоти дискретно-експоненціального сигналу на фоні корельованого шуму / А.Я. Білецький, Д.С. Дем'яник // Наукоємні технології, 2012. № 1 (13). – с. 39-44.
3. Михайленко В.І. Статична обробка інформації в процесі ультразвукового контролю / В.І. Михайленко, Б.М. Сарафанюк, С.М. Клименко // Технологія будівництва нафтових і газових свердловин та автоматизація виробничих процесів: зб. наук. праць. – К.:Наукова думка, – 1999. – Вип.1. – с. 110-115.

 ISSN 1562-9945