

Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, А.А. Михалева
**НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАДАЧА МНОГОКРАТНОГО ШАРОВОГО
ПОКРЫТИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ**

Аннотация. Представлена математическая модель непрерывной задачи многократного покрытия ограниченного множества из пространства E_n шарами наименьшего радиуса при определенных условиях на размещение центров шаров, образующих покрытие. Описан алгоритм решения задачи многократного шарового покрытия, разработанный на основе субградиентных методов негладкой оптимизации с привлечением аппарата штрафных функций и элементов теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: многократное покрытие области, непрерывные задачи оптимального разбиения множеств, недифференцируемая оптимизация, функции штрафа.

Введение

В работах [1, 2] описан спектр практических задач, математические модели которых являются непрерывными задачами многократного шарового покрытия ограниченной области. Там же представлен краткий обзор научной литературы, посвященной изучению таких задач, разработке методов и алгоритмов их решения. В этих работах сформулированы математические постановки непрерывных задач многократного шарового покрытия с различными критериями качества покрытия и алгоритмы их решения, разработанные с применением теории и методов оптимального разбиения множеств [3]. Проведенные вычислительные эксперименты по решению тестовых задач многократного покрытия свидетельствуют о том, что при определенных входных данных оптимальное размещение центров шаров, образующих покрытие, таково, что несколько центров могут быть расположены очень близко друг к другу, что на практике не желательно. Поэтому в данной работе сформулируем задачу многократного покрытия ограниченной в E_n области кругами минимального радиуса с условиями, отвечающими за невозможность «слипания» центров

шаров, образующих покрытие, и представим алгоритм приближенного решения такой задачи.

Математическая постановка задачи многократного оптимального шарового покрытия с ограничениями

Пусть Ω – ограниченное, замкнутое множество из пространства E_n , $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n : c(x, \tau_i) \leq R\}$ – с-шар радиуса R с центром в точке τ_i из Ω , где $c(x, \tau_i)$ – некоторая метрика (евклидова, манхэттенская). Требуется определить величину радиуса оптимального покрытия

$$\hat{R}(\tau_*^N) = \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (1)$$

и вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, на котором достигается значение $\hat{R}(\tau_*^N)$, при условиях:

$$\forall x \in \Omega : x \in \bigcap_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, \hat{R}), \quad i_j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad k \leq l \leq N; \quad (2)$$

$$\min_{(i,j): i>j} c(\tau_i, \tau_j) \geq \sigma, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

где $\sigma > 0$ – заданная величина.

Напомним, k -кратное покрытие множества Ω , задаваемое вектором $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, с радиусом $\hat{R}(\tau^N)$, который определяется по формуле (1) и удовлетворяет условиям (2), является минимальным k -кратным с-шаровым покрытием, генерируемым вектором τ^N . Это означает, что никакие с-шары меньшего радиуса с центрами в точках τ_1, \dots, τ_N k -кратно не покрывают множество Ω . k -кратное покрытие минимального радиуса называется оптимальным k -кратным покрытием.

В отличие от задач, представленных в работах [1,2], данная задача характеризуется наличием ограничения (3), которое отвечает за такое размещение центров (сервисов), при котором каждые два из них находились бы на расстоянии, не меньшем σ .

При разработке метода решения задачи о многократном шаровом покрытии более конструктивной оказывается другая форма записи ее математической модели. Приведем эту постановку задачи.

Пусть Ω – ограниченное, замкнутое множество в пространстве E_n , $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ – некоторый заданный на множестве Ω (или в пространстве E_n) набор точек. Будем говорить, что точки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$ являются k -ближайшими соседями точки $x \in \Omega$ из заданных N точек, если

$$\forall j = \overline{1, k} \quad c(x, \tau_{i_j}) < c(x, \tau_m), \quad m \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}. \quad (4)$$

В частных случаях, для некоторых точек $x \in \Omega$ знак неравенства в (4) может быть нестрогим, то есть некоторые из заданных центров τ_1, \dots, τ_N могут находиться на одинаковом расстоянии от фиксированной точки $x \in \Omega$. Тогда считается, что точка $x \in \Omega$ имеет несколько различных наборов из k -ближайших соседей. При численной реализации поиска k -ближайших соседей фиксированной точки $x \in \Omega$ для однозначности будем полагать, что набор k -ближайших соседей образуют точки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\forall j = \overline{1, k} \quad c(x, \tau_{i_j}) \leq c(x, \tau_m), \quad m \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$$

и имеющие наименьшие возможные индексы.

Введем в рассмотрение множество Λ_N^k :

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}; \sum_{i=1}^N \lambda_i = k \right\}.$$

Тогда для каждой точки $x \in \Omega$ k ближайших соседей из фиксированного набора точек (τ_1, \dots, τ_N) можно найти, решая задачу поиска такого вектора $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Lambda$, при котором достигается минимальное значение следующей величины:

$$C(x) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Таким образом на множестве Ω определена вектор-функция $\lambda(\cdot)$ со значениями в $\hat{\Lambda} = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda(x) \in \Lambda_N^k \quad \forall x \in \Omega \}$, так что для каждой точки $x \in \Omega$ компонента $\lambda_i(x)$ этой вектор-функции равна 1 тогда и только тогда, когда центр τ_i считается одним из k

возможных «соседей» этой точки. Если же вектор $\lambda(x)$ таков, что на нем достигается величина $C(x)$, то он будет соответствовать ближайшим к точке x k соседям. Эта величина $C(x)$ и считается радиусом кругов с центрами $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$, покрывающих k -кратно точку x . Индексы этих центров совпадают с индексами единичных компонент вектора $\lambda(x)$.

Задача о поиске радиуса N кругов, образующих k -кратное с-шаровое покрытие множества состоит в отыскании величины

$$\bar{R} = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Задача о минимальном k -кратном с-шаровом покрытии с размещением центров шаров с ограничениями математически формулируется так: требуется найти величину

$$\bar{R}(\lambda^*(\cdot), \tau_*^N) = \inf_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x), \quad (5)$$

а также вектор-функцию $\lambda^*(x) \in \hat{\Lambda}$ и вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N \subset E_n^N$, при которых в (5) достигается нижняя грань и выполняются условия (3).

Если в задаче (3.3.4) не интересоваться, какими именно с-шарами покрывается каждая точка $x \in \Omega$, то вектор-функцию $\lambda^*(\cdot)$ слева в равенстве (5) можно опустить, что и будем далее предполагать.

Описание метода решения.

Построение обобщенного градиента целевой функции

Отметим некоторые свойства задачи (5) (без учета ограничений (3)), которые будут полезны в дальнейшем. Поскольку для компактного множества Ω из E_n и непрерывной функции $c(x, \tau)$ оптимальное k -кратное покрытие множества Ω заданным числом N с-шаров одинакового радиуса существует, то задачу (5) можно переписать следующим образом:

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}, \quad (6)$$

где

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Целевая функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (6) для случая евклидовой нормы $c(x, \tau_i)$ обладает следующими свойствами.

1. Функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ – непрерывна и ограничена на Ω^N .

2. Функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ удовлетворяет условию Липшица на Ω^N :

$$\left| \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x) - \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \bar{\tau}_i) \lambda_i(x) \right| \leq L \cdot \|\tau^N - \bar{\tau}^N\|_{E_n^N},$$

где $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, $L > 0$ – константа Липшица, не зависящая от выбора точек τ^N и $\bar{\tau}^N$ из Ω^N .

3. Функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (6) не является выпуклой на Ω^N .

4. Функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ почти всюду дифференцируема на Ω^N .

5. Многоэкстремальная функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ в зависимости от вида множества Ω может обладать (с точностью до перенумерации центров) конечным или бесконечным числом глобальных минимумов, а также может иметь локальные минимумы.

6. Для непустого компактного множества Ω из E_n и (τ_1, \dots, τ_N) из Ω^N справедливо следующее равенство:

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x) = \max_{m=1, \dots, M} \max_{x \in \Omega_m} \max_{i \in T_m} c(x, \tau_i),$$

где множества $\Omega_m, m = \overline{1, M}$, $M \leq C_N^k$, составляют k -кратную диаграмму Вороного для множества Ω , т.е. такое разбиение множества Ω на подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_M$, что:

$$\bigcup_{i=1}^M \Omega_i = \Omega; \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad \forall i \neq j, i, j = \overline{1, M};$$

$$\Omega_m = \{x \in \Omega : \forall j \in T_m \quad c(x, \tau_j) < c(x, \tau_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus T_m\},$$

где $T_m = \{i_1^m, i_2^m, \dots, i_k^m\}$, $m = \overline{1, M}$ – всевозможные k -элементные подмножества множества индексов $\{1, 2, \dots, N\}$.

Поскольку множество Ω_m определяется набором из k центров с индексами $i_1^m, i_2^m, \dots, i_k^m$, иногда Ω_m будем записывать как $\Omega(\bar{\tau}^{T_m})$, указывая при этом, что данная ячейка Вороного соответствует набору

центров $\bar{\tau}^{T_m} = \{\tau_{i_1^m}, \tau_{i_2^m}, \dots, \tau_{i_k^m}\}$. Фактически, обобщенные ячейки Вороного Ω_m определяют точки множества Ω , для которых центры с индексами из соответствующего набора $T_m = \{i_1^m, i_2^m, \dots, i_k^m\}$ являются k -ближайшими соседями.

Опишем один из способов вычисления субградиента целевой функции $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (6).

Обозначим через V фиксированное разбиение непустого компактного множества Ω на $\bar{M} \leq C_N^k$ подмножеств $V_1, \dots, V_m, \dots, V_{\bar{M}}$, составляющих k -кратную диаграмму Вороного для Ω , причем все V_i – непустые, компактные.

Введем также для каждого $i = 1, \dots, N$ функции

$$R_i(\tau^N) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\bar{\tau}^{T_m})} c(x, \tau_i) \quad (7)$$

Субградиентное множество $G_{R_i^V}(\hat{\tau}^N)$ в точке $\hat{\tau}^N$ функции (7)

вычисляется по формуле:

$$G_{R_i^V}(\hat{\tau}^N) = \overline{\text{co}} \bigcup_{x \in I(\hat{\tau}^N)} G_{c(x, \tau_i)}(\hat{\tau}^N), \quad (8)$$

где $I(\hat{\tau}^N) = \left\{ x : x \in \bigcup_{m: i \in T_m} V_m; c(x, \hat{\tau}_i) = R_i(\hat{\tau}^N) \right\}$; $G_{c(x, \tau_i)}(\hat{\tau}^N)$ – субдифференциал функции $c(x, \tau_i)$ по τ_i на E_n при фиксированном $x \in V_i$.

Обобщенный градиент целевой функции задачи (6) имеет следующий вид:

$$g_{\hat{R}}(\tau^N) = (g_{R_1^V}(\tau^N), \dots, g_{R_i^V}(\tau^N), \dots, g_{R_N^V}(\tau^N)),$$

i -ая компонента которого является элементом субградиентного множества функции $R_i(\tau^N)$, $i = \overline{1, N}$, из (7) в точке τ_i , которое записывается так:

$$G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N) = \overline{co} \left\{ g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^N), \bar{x} : c(\bar{x}, \tau_i) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\bar{\tau}^{T_m})} c(x, \tau_i) \right\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (9)$$

где $g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^N)$ – обобщенный градиент функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$, а $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$.

На рис.1 представлена двукратная диаграмма Вороного для 8 точек на квадрате, для каждого центра которой указано направление к одному из элементов множества (9).

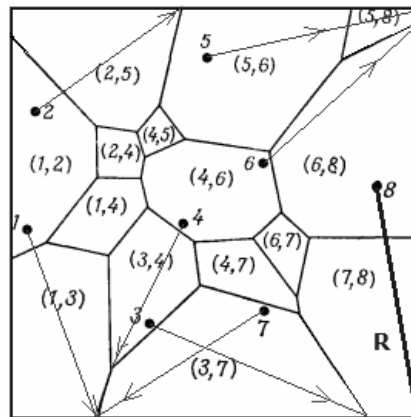


Рисунок 1 - Двукратная диаграмма Вороного с указанием возможного направления сдвига центров

Субградиентное множество $G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N)$ непустое, выпуклое, компактное.

Замечание. В формуле (9) T_m – m -е подмножество фиксированного k -кратного разбиения множества Ω . Однако, если разбиение множества Ω на подмножества не фиксировано и неизвестно заранее положение точек τ_1, \dots, τ_N , генерирующих оптимальное покрытие множества Ω , а значит, и соответствующее k -кратное разбиение Вороного, то функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (6) не является выпуклой на Ω^N вследствие невыпуклости по $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ на Ω^N функции

$$\hat{r}(x, \tau^N) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Хотя функция $\hat{r}(x, \tau^N)$ не является выпуклой по τ^N при любом фиксированном $x \in \Omega$, она состоит из выпуклых участков, отвечающих локальным минимумам функции $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$, поэтому, ее почти-градиент совпадает с субградиентом к одному из примыкающих к данной точке выпуклых участков.

Следующая лемма дает возможность генерировать монотонно убывающую последовательность значений целевой функции $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (6) об оптимальном k -кратном покрытии множества Ω .

Лемма 2. Пусть Ω – компактное множество из E_n ,

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Если центры $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N$ выбрать из условия

$$\max_{x \in \Omega(\tilde{\tau}_i)} c(x, \tilde{\tau}_i) = \min_{\tau_i \in co \Omega(\tau_i)} \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tau_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

то $R(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N) \leq R(\tau_1, \dots, \tau_N)$, где центр $\tilde{\tau}_i$ задает шар, покрывающий $\Omega(\tau_i)$ с минимальным радиусом.

Для решения задачи (5), (3) предлагается следующий подход. Для учета дополнительных условий (3) в задаче многократного покрытия вводится в рассмотрение штрафная функция вида

$$P(\tau_1, \dots, \tau_N) = M \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \max^2(0, \sigma - c(\tau_i, \tau_j)),$$

где $M \gg 0$ – коэффициент штрафа, и от задачи (5), (3) переходим к задаче:

$$\bar{R}_M(\tau^N) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}, \quad (10)$$

где

$$\bar{R}_M(\tau^N) = \hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) + P(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x) + P(\tau_1, \dots, \tau_N).$$

Численный алгоритм решения (10), приведенный далее, базируется на методе обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов (r -алгоритм Шора [4]). При этом j -ю компоненту N -мерного вектора обобщенного градиента

$$g_{\bar{R}_M}(\tau^N) = (g^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g^{\tau_j}(\tau^N), \dots, g^{\tau_N}(\tau^N)) \quad (11)$$

функции $\bar{R}_M(\tau^N)$ в точке $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ будем вычислять по формуле:

$$g^{\tau_j}(\tau^N) = g_{R_j^V}^{\tau_j}(\tau^N) + M \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \max(0, \sigma - c(\tau_i, \tau_j)) \frac{\partial c(\tau_j, \tau_i)}{\partial \tau_j}, \quad (12)$$

где $g_{R_j^V}^{\tau_j}(\tau^N) \in G_{R_j^V}^{\tau_j}(\tau^N)$ (см. формула (9)).

Алгоритмы решения задач оптимального многократного шарового покрытия заданного множества

Представим приближенный алгоритм решения задачи о поиске радиуса N кругов, образующих k -кратное s -шаровое покрытие множества, а также алгоритм решения задачи о *минимальном* k -кратном s -шаровом покрытии с размещением центров шаров так, чтобы минимальное расстояние между каждыми двумя центрами было не меньше заданной величины σ . Приведем и проанализируем результаты некоторых вычислительных экспериментов.

Не теряя общности, сформулируем алгоритм решения задачи оптимального многократного покрытия единичного n -мерного куба $\Omega = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \dots \times [0,1]}_n$. Для упрощения обозначений в алгоритме вме-

сто вектора τ^N будем писать τ .

Вначале приведем алгоритм решения задачи о поиске радиуса N кругов, образующих k -кратное покрытие заданного множества Ω из E_n s -шарами с фиксированными центрами. Если область Ω имеет сложную форму, то заключим Ω в n -мерный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, введя вспомогательную функцию $\rho(x)$, определенную на Π , такую, что

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \\ 1 & \text{для } x \in \Omega, \end{cases}$$

и в задаче (6) под функцией $c(x, \tau_i)$ будет пониматься функция $c(x, \tau_i) \rho(x)$, определенная на параллелепипеде Π и совпадающая с $c(x, \tau_i)$ на Ω .

Алгоритм 1-К

Предварительный этап. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой с шагом $\Delta h_j, j = 1, \dots, n$; обозначим $\tilde{\Pi}$ – множество узлов сетки. Задаем положение центров покрытия $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$.

Шаг 1. Для каждой точки x сетки $\tilde{\Pi}$ строим массив расстояний от этой точки до всех центров: $D(x) = (c(x, \tau_1), c(x, \tau_2), \dots, c(x, \tau_N))$.

Шаг 2. Полученный массив расстояний $D(x)$ сортируем по возрастанию.

Шаг 3. В каждом отсортированном массиве отбираем элемент, стоящий на k -м месте (с порядковым номером k), обозначим этот элемент $c^k(x, \tau_{i_k})$.

Шаг 4. Среди всех отобранных элементов находим наибольший:

$$\tilde{R} = \max_{x \in \tilde{\Pi}} c^k(x, \tau_{i_k}).$$

Полученное максимальное значение и является приближенным значением радиуса окружностей с центрами в точках (τ_1, \dots, τ_N) , которые k -кратно покрывают множество Ω . Алгоритм 1-К описан.

Представим далее один из возможных численных алгоритмов решения задачи (10) об оптимальном k -кратном покрытии – отыскания координат центров $(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, минимизирующих целевую функцию $\bar{R}_M(\tau^N)$ в предположении, что покрываемое множество имеет простую структуру, причем выпукло, замкнуто. В основе этого алгоритма лежит метод проекции обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. Составной частью алгоритма является этап построения k -кратной диаграммы Вороного и вычисление вектора обобщенного градиента целевой функции задачи (10) по формулам (11) – (12).

Алгоритм 2-К

Предварительный этап. Куб Ω покрываем прямоугольной сеткой с шагом $\Delta h_j, j = 1, \dots, n$. Множество узлов прямоугольной сетки

на множестве Ω обозначим $\tilde{\Omega}$. Задаем величину штрафа $M \gg 0$. Задаем начальное положение центров покрытия $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$.

Вычисляем по этим центрам величину $\hat{R}(\tau^{(0)}) = \max_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i^{(0)}) \lambda_i(x)$, используя алгоритм **1-К** решения

задачи поиска радиуса N кругов, образующих k -кратное s -шаровое покрытие заданного множества Ω . При этом для каждого $i = 1, \dots, N$ вычисляем значение функции (7) :

$$R_i(\tau^{(0)}) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\tau^{T_m})} c(x, \tau_i^{(0)}).$$

Вычисляем величину $\bar{R}_M(\tau^{(0)}) = \hat{R}(\tau^{(0)}) + P(\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$.

По формуле (9) строим субградиентное множество $G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^{(0)}) = \overline{co} \{ g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(0)}), \bar{x} : c(\bar{x}, \tau_i) = R_i(\tau_i^{(0)}) \}$, $i = 1, \dots, N$, где $g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(0)})$ – обобщенный градиент функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau^{(0)}$. Выбираем вектор $g_{\bar{R}_M}(\tau^{(0)})$ по формулам (11), (12), задаем начальный пробный шаг r -алгоритма $h_0 > 0$.

Первый шаг алгоритма проводим по формуле: $\tau^{(1)} = P_{\Omega}(\tau^{(0)} - h_0 g_{\bar{R}_M}(\tau^{(0)}))$, где P_{Ω} – оператор проектирования на множество Ω .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после m , $m = 1, 2, \dots$, шагов алгоритма получен вектор $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$. Опишем $(m+1)$ -й шаг алгоритма.

1. По центрам $\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)}$ с помощью алгоритма **1-К** величину

$$R(\tau^{(m)}) = \max_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i^{(m)}) \lambda_i(x),$$

используя алгоритм **1-К** решения задачи поиска радиуса N кругов, образующих k -кратное s -шаровое покрытие заданного множества Ω . При этом для каждого $i = 1, \dots, N$ вычисляем значение функции (7):

$$R_i(\tau^{(m)}) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\tau^{T_m})} c(x, \tau_i^{(m)}).$$

2. По формуле (9) строим субградиентное множество $G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^{(m)})$.

Выбираем вектор $g_{\hat{R}_M}(\tau^{(m)})$ по формулам (11), (12). Проводим $(m+1)$ -й шаг r-алгоритма в H-форме [4], итерационная формула которого имеет вид:

$$\tau^{(m)} = P_{\Omega} \left(\tau^{(m)} - h_m \frac{H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}), g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}} \right),$$

где H_{m+1} – матрица растяжения пространства с коэффициентом α (его целесообразно брать равным от 3 до 7) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид:

$$H_{m+1} = H_m + (1/\alpha^2 - 1) \frac{H_m \xi_m \xi_m^T H_m}{(H_m \xi_m, \xi_m)},$$

$$\xi_m = g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}) - g_{\hat{R}}(\tau^{(m-1)}).$$

Если из-за округлений счета H_{m+1} перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаг h_m выбираем из условия:

$$\min_{h>0} \hat{R} \left(\tau^{(m)} - h \frac{H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}), g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}} \right).$$

Если условие

$$\|\tau^{(m+1)} - \tau^{(m)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (13)$$

не выполняется, переходим к $(m+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – переход к п. 5.

Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (13) завершения работы алгоритма.

Вычисляем значение минимального радиуса покрытия по формуле

$$\hat{R}(\tau_*) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_{*i}) \lambda_i(x)$$

с помощью алгоритма **1-К**. Алгоритм **2-К** описан.

При реализации описанного подхода возникает вопрос о выборе штрафного коэффициента M . С одной стороны, штраф должен быть

достаточно большим, чтобы полученное значение $\hat{R}(\tau_*^N)$ было как можно ближе к оптимальному, а вектор τ_*^N – как можно ближе к условному оптимуму. Но слишком большое значение штрафного коэффициента может вызвать вычислительные трудности при отыскании оптимального решения в задаче без ограничений. Поэтому, метод штрафа лучше использовать в итерационной форме, начиная выбор коэффициента M со значения m_1 , не слишком высокого, и решая задачу:

$$R(\tau^N; m_1) = \hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) + m_1 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \max^2(0, \sigma - c(\tau_i, \tau_j)) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}.$$

Если при этом полученное решение $\tau_*^N(m_1)$ будет хорошим приближением для оптимума, то вычисления заканчиваются. В противном случае штраф, соответствующий нарушению условий (3), недостаточно высок, и увеличивая его в несколько раз, следует решить новую задачу без ограничений (3) и т.д.

Анализ результатов вычислительных экспериментов

Приведем результаты решения некоторых задач многократного шарового покрытия единичного квадрата из E_2 при ограничениях на расстояния между центрами, в случае, когда функция $c(x, \tau_i)$ задается формулой:

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - \tau_i^j)^2}.$$

На рис. 2 представлены результаты двукратного покрытия единичного квадрата 19-ю кругами и трехкратного покрытия квадрата 15-ю кругами, полученные при решении задачи (1), (2) без учета ограничений вида (3). Как видно, некоторые центры находятся очень близко друг к другу, и даже могут быть совмещены.

На рис. 3 показано трехкратное оптимальное покрытие при $N=15$. Очевидно, при реализации такой модели центры кругов, образующих многократное покрытие находятся на допустимом расстоянии друг от друга.

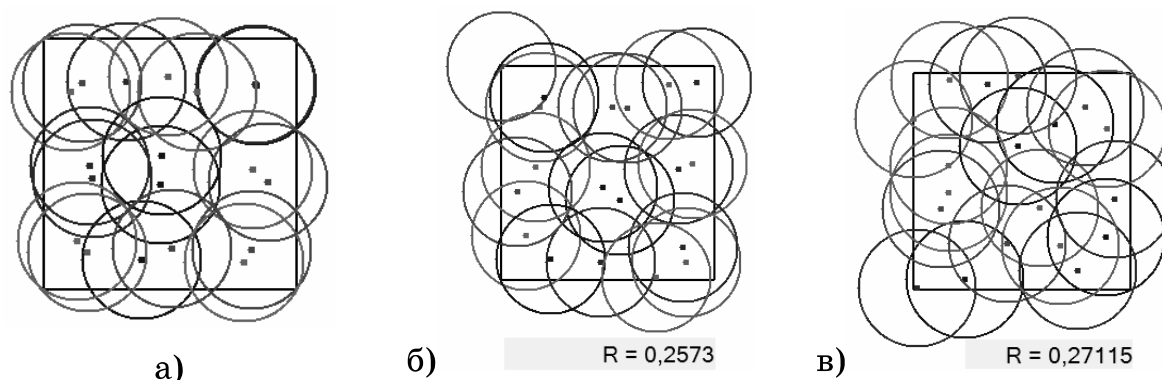


Рисунок 2 - Оптимальное 2-кратное покрытие 19-тью кругами:

а) без ограничений;

б) при ограничениях (3) $\sigma = 0.05$; в) при ограничениях (3) $\sigma = 0.15$

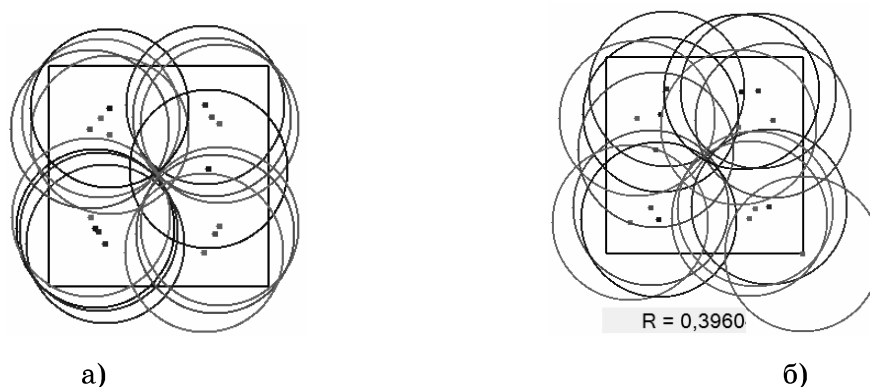


Рисунок 3 - 3 -кратное оптимальное покрытие единичного квадрата:

а) без ограничений; б) с контролем минимального расстояния между центрами

Замечание. При построении математических моделей задач оптимального покрытия, возникающих в условиях практики, ограничения на расположение центров покрываемых шаров могут иметь и другой вид. Например, можно потребовать, чтобы центры были размещены как можно более равномерно в области, или чтобы ни один из них не попал в некоторый запретный ее участок.

Заключение

Таким образом, в работе представлена математическая модель и метод решения непрерывной задачи многократного покрытия области шарами минимального радиуса с ограничениями на размещение центров кругов, составляющих покрытие. Разработан и программно реализован алгоритм решения указанной задачи, основанный на дискретизации покрываемой области и применении для решения задачи недифференцируемой оптимизации r -алгоритма Шора.

При этом для учета ограничений в задаче привлекается аппарат штрафных функций, а для приближенного вычисления компонент обобщенного градиента расширенной целевой функции применяются k -кратные диаграммы Вороного.

ЛІТЕРАТУРА

1. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С., Михалева А.А. Конструктивные алгоритмы решения непрерывных задач многократного покрытия // Системные технологии. – Д.: ДМетАУ, 2014. – Вып. 4 (93). – С. 3 – 16.
2. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С., Михалева А.А. Применение методов оптимального разбиения множеств к непрерывным задачам многократного покрытия. – Питання прикладної математики і математичного моделювання. Збірник наук. праць. – Дніпропетровськ, 2014. – С. 141 – 154.
3. Киселева Е.М., Шор Н. З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография. – К.: Наукова думка, 2005. – 564 с.
4. Шор Н.З. Использование модификации r – алгоритма для нахождения минимума полиномиальных функций / Н. З. Шор, П. И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 28–49.