УДК 504.064.2.001.18

В.П. Бобилєв, О.В. Саввін, О.В. Матухно, Д.В. Познякова

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГІЧНИХ ЗАДАЧ З ОБМЕЖЕННЯМ

Анотація. У статті представлено розроблену математичну модель розвитку популяції Gryllus assimilis за умов суворо обмеженого фактора (кількості їжі). Експериментально встановлено, що модель, яка розглядається, потребує введення спеціального коефіцієнту, який буде відображати кількість загиблих особин унаслідок канібалізму та хвороб. В лабораторних умовах експериментально підтверджено працездатність розробленої математичної моделі.

Ключові слова: Екологічні задачі, лімітуючі фактори, популяція, розвиток, поведінка, математична модель, імітаційне моделювання.

Вступ

Побудова математичних моделей для рішення конкретних екологічних завдань дозволяє використовувати отримані знання на благо екосистем, порушених людським впливом. Математичне моделювання в екології дає можливість прогнозувати подальші зміни й розвиток екосистем. Математичне моделювання розвитку популяції в умовах, коли один із факторів розвитку є лімітуючим, дає змогу зрозуміти механізм залежності природних зв'язків в екосистемі, що розглядається.

Мета роботи: побудова математичних моделей поведінки популяції (на прикладі Gryllus assimilis) в залежності від суворо обмеженого фактора (кількості їжі).

Завдання: розрахувати поведінку популяції на основі теоретичних даних, на основі експериментальних даних перевірити правильність теоретичних розрахунків.

Методи досліджень: експериментальний метод, метод наукового прогнозу, імітаційне моделювання.

Результати експерименту

Експеримент проводився на протязі 10 тижнів. Gryllus assimilis росли, харчувались, розмножувались і помирали у лаборатарних умовах. Щодня значення коливались, оскільки народження та смерть розподілені у часі нерівномірно. Отримані значення занесено до таблиці 1.

Таблиця 1

Дані, що встановлено експериментально

Тижні	Кількість особин	Приріст	Кількість померлих	Кількість з'їденої	Кількість їжі, якої недостає одній особині	Залишок їжі
1	8	0	0	0	0	250,00
2	15	7	0	4,00	0	246,00
3	29	14	0	7,60	0	242,40
4	55	26	0	14,44	0	235,56
5	104	49	0	27,44	0	222,56
6	198	94	0	52,13	0	197,87
7	376	178	0	99,04	0,00	150,96
8	715	339	0	188,18	0,00	61,82
9	1035	644	324	357,55	0,15	-107,55
10	771	931	1195	517,46	0,26	-267,46

На рисунку 1 відображено зміни та коливання росту популяції у часі за відсутності змін раціону. Спочатку їжі вистачає на всіх, навіть є залишок, тому ріст популяції стрімко зростає, проте, у точці, коли запас їжі вичерпано, деякі з особин, менш стійкі до несприятливих умов існування, гинуть. Після їх загибелі їжі знову достатньо для популяції, її ріст знову йде вгору. Потім знову деякі з особин гинуть від недостатньої кількості їжі і т.д.

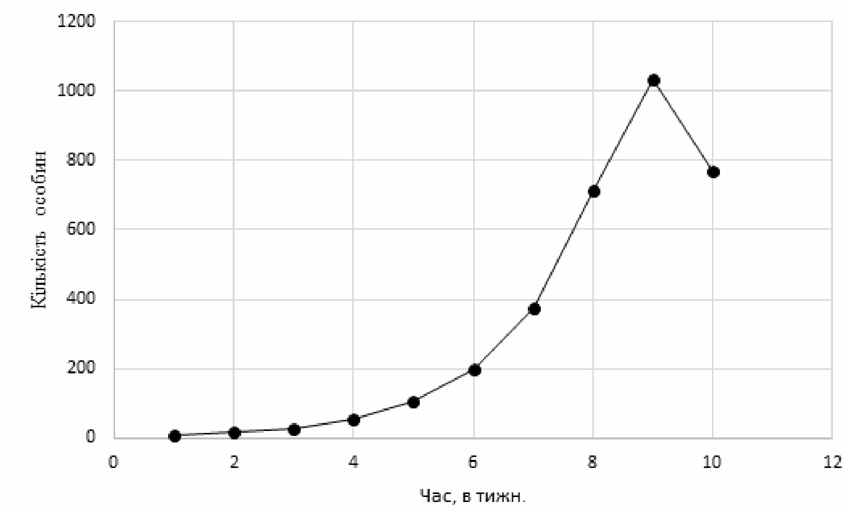

Рисунок 1 – Графік динаміки популяції в залежності від умов експерименту

 ISSN 1562-9945

На основі інформації, що отримана експериментальним шляхом, побудовано математичну модель, яка повинна точно охарактеризувати динаміку популяції та найточніше повторити криву росту популяції Gryllus assimilis.

Побудова аналітичної математичної моделі. Початкові дані: раз на добу Gryllus assimilis отримують 250 г сухарів (E_o). На початку у ємності живуть 8 цвіркунів (N) – правилом 1 самець на 4 самки необхідно знехтувати для того щоб спростити обчислення. Вони починають розмножуватися зі швидкістю (V_r), яка може бути описана формулою:

$$V_r = N \cdot k_r\,, \tag{1}$$

де k_r – коефіцієнт народжуваності.

Кожного дня Gryllus assimilis з'їдають сухарів (ed):

$$ed = N \cdot k_e\,, \tag{2}$$

де k_e – кількість їжі у грамах, яку з'їдає одна особина Gryllus assimilis.

Після того, як поїла кожна особина, залишається деяка кількість грам сухарів (E), тобто залишок. Через деякий час утворюється дефіцит (D):

$$D = E - E_o\,. \tag{3}$$

Gryllus assimilis починають помирати зі швидкістю (V_s), яка пропорційна їх кількості (N) і квадрату дефіциту (D):

$$V_s = N \cdot k_s \cdot D^2\,, \tag{4}$$

де k_s – смертність особин через дефіцит.

Отже, маємо систему диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = k_r \cdot N - k_s \cdot N \cdot D^2 \\ E = E_o - ed \\ D = ЕСЛИ(ed > E_o; E / N; 0) \end{cases} \tag{5}$$

З третього рівняння у системі (5) бачимо, що повинна виконуватись залежність: якщо кількість потрібної їжі більше за 250 г, то наступає дефіцит, і для того щоб знайти, скільки недостає одній особині, шукаємо різницю між кількістю потрібної та незмінної їжі.

Під час математичних обчислень виникла потреба впровадження деякого коефіцієнту k_x, який не був передбачений у роботах інших авторів [1-6]. Справа в тому, що є ще одна особлива залежність між дефіцитом та смертністю – чим менше їжі припадає на одну особину, тим більше ризик виникнення випадків канібалізму. Цей процес має виправдане значення – популяція прагне до саморегулювання. Даний механізм поведінки досліджував ще бельгійський математик П'єр Франсуа Ферхюльст, він дав цьому явищу назву «самоотруєння популяції» [7]. Але у даному випадку мається на увазі більш конкретна ситуація, тому вважатимемо, що коефіцієнт k_x характеризує смертність популяції через канібалізм. Отже, формула (4) потребує коригування:

$$V_s = N \cdot (k_s \cdot D^2 + k_x \cdot D), \qquad (6)$$

де k_s – відображає смертність особин через дефіцит;

k_x – характеризує смертність популяції через канібалізм.

Оскільки використовуємо метод імітаційного моделювання, то деякі значення можуть бути скориговані у процесі подальшого дослідження системи.

В електронних обчисленнях спиратимемось на дані таблиці 2.

Таблиця 2

Значення вихідних величин

Початкова кількість особин N_o, ос.	Коефіцієнт народжуваності k_r, в долях	Коефіцієнт смертності через дефіцит k_s	Кількість їжі, яку з'їдає одна особина k_e, г	Незмінна кількість їжі E_o, г	Смертність популяції через канібалізм k_x
8	1	20	0,5	250	1

Цю задачу вирішуватимемо за допомогою стандартного пакету Microsoft Office Excel 2013 операційної системи Windows. Після проведення розрахунків отримано дані наведені у таблиці 3.

З таблиці 3 видно, що обчислення проведено за більш тривалий проміжок часу, ніж у таблиці 2.1, тобто використано метод наукового передбачення строком на 15 тижнів.

Дефіцит настає на дев'ятому тижні, це фактично можна вважати початком коливання росту популяції, до дев'ятого тижня ріст стрімкий та рівномірний. Далі ріст популяції припиняється і тримається у певному кількісному проміжку. Рисунок 2 графічно ілюструє динаміку популяції, спираючись на дані таблиці 3.

 ISSN 1562-9945

Таблиця 3

Результати математичного обчислення

Тижні	Кількість особин, N, ос.	Приріст, Vr, ос.	Кількість померлих, Vs, ос.	Кількість з'їденої їжі, ed, г	Кількість їжі, якої недостає одній собині, D, г	Залишок їжі E, г
1	8	0	0	0,00	0	250,00
2	16	8	0	4,00	0	246,00
3	32	16	0	8,00	0	242,00
4	64	32	0	16,00	0	234,00
5	128	64	0	32,00	0	218,00
6	256	128	0	64,00	0	186,00
7	512	256	0	128,00	0	122,00
8	1022	512	2	256,00	0,01	-6,00
9	705	1022	1340	511,18	0,26	-261,18
10	1109	705	301	352,58	0,15	-102,58
11	540	1109	1678	554,48	0,27	-304,48
12	1065	540	16	270,22	0,04	-20,22
13	626	1065	1504	532,49	0,27	-282,49
14	1123	626	129	313,00	0,10	-63,00
15	512	1123	1734	561,59	0,28	-311,59
16	1022	512	2	256,00	0,01	-6,00
17	705	1022	1340	511,17	0,26	-261,17
18	1109	705	301	352,58	0,15	-102,58
19	540	1109	1677	554,48	0,27	-304,48
20	1065	540	16	270,22	0,04	-20,22
21	626	1065	1504	532,51	0,27	-282,51
22	1123	626	129	312,98	0,10	-62,98
23	512	1123	1734	561,59	0,28	-311,59
24	1022	512	2	256,01	0,01	-6,01
25	705	1022	1340	511,19	0,26	-261,19

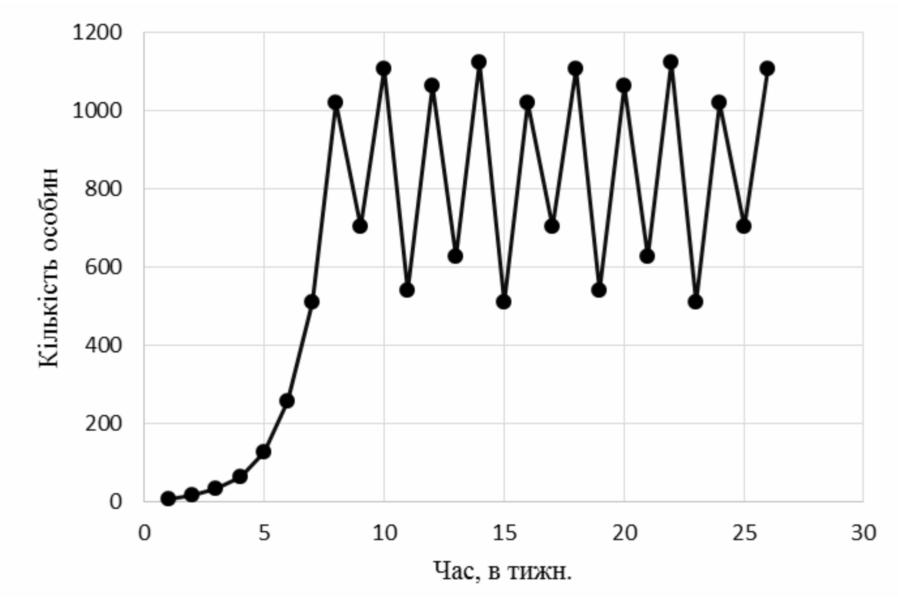

Рисунок 2 – Графік динаміки популяції Gryllus assimilis
в залежності від дефіциту їжі

Порівняльний аналіз. Шляхом зіставлення графіків (рисунків 1 та 2) було проведено порівняльний аналіз отриманих результатів (рисунок 3).

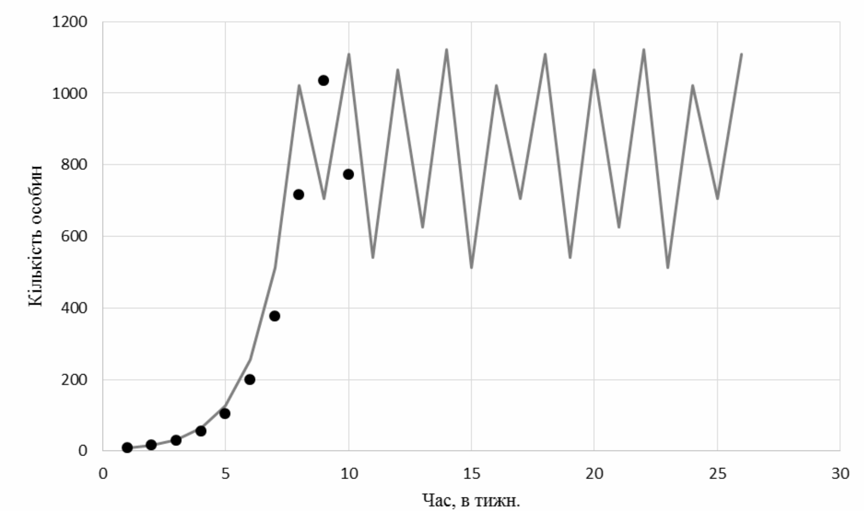

Рисунок 3 – Порівняльний графік

З рисунку 3 можемо зробити попередні висновки: час настання дефіциту під час експерименту – 9 тижнів, але це не є еталоном, оскільки умови можуть коливатись та змінюватись, тому крива росту аналітичної моделі у часі трохи інша, але достатньо добре імітує криву росту експерименту; за попередніми прогнозами видно, що якщо залишити без змін кількість їжі – ріст популяції коливатиметься у певних межах, шукатиме стабілізації.

ВИСНОВКИ

В результаті пошукової і аналітичної роботи та на підставі отриманих і проаналізованих експериментальних даних було зроблено наступні висновки:

1. На протязі 10 тижнів у лабораторних умовах проведено експеримент, який дозволяє детально описати коливання росту популяції за наявності лімітуючого фактору.

2. За допомогою математичного та імітаційного моделювання доведено, що ріст популяції буде мати стійку характерну поведінку, якщо кожного дня кількість їжі, яку отримують піддослідні особини, незалежно від їх кількості, буде строго однаковою. Популяція починає швидко рости, однак при досягненні першого ступеню дефіциту ріст спадає, а через деякий час знову спостерігається підвищення росту кількості Gryllus assimilis.

3. Експериментально встановлено, що модель, яка розглядається, потребує введення спеціальної величини (k_x), яка буде відо-

 ISSN 1562-9945

бражати кількість загиблих особин унаслідок канібалізму та хвороб. Gryllus assimilis має високий показник смертності особин у природі, тому дана величина необхідна для більш точного результату, оскільки вимушений дефіцит їжі провокує появу цих негативних чинників.

4. На даний момент необхідне більш детальне вивчення механізму динаміки росту популяції, удосконалення існуючих методів дослідження і поповнення інформативної та дослідницької бази знань про моделі в екології популяцій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Эдвардс Чарльз Генри. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. 3-е издание / Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни. – Киев: Диалектика-Вильямс, 2007. – 1104 с.
2. Баврин И.И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей / Баврин И.И. – М.: Физматлит, 2003. – 327 с.
3. Комп'ютерне моделювання систем та процесів / [Квєтний Р.Н., Богач І. В., Бойко О.Р. та ін.]. - [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://posibnyky.vntu.edu.ua/k_m/t1/172..htm
4. Алексеев В.В. Физическое и математическое моделирование экосистем: монография / Алексеев В.В., Крышев И.И., Сазыкина Т.Г. - Санкт-Петербург: Гидрометеоздат, 1992. – 367 с.
5. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А.Самарский, А.П. Михайлов. - М: Наука, 1997. - 320 с.
6. Меншуткин В. В. Имитационные модели водных экологических систем / В.В.Меншуткин. — М.: Наука, 1993. – 160 с.
7. Пол Д. Хеминг. Законы экологии популяций / Пол Д. Хеминг. – [Электронный ресурс]. - Режим доступу: http://www.xn--c1akeeob5hwa.net/laws.htm#Lotka-Volterras Law