УДК 515.2:517.2

С.В. Моісеєнко

ЙМОВІРНІСНІ ЗАДАЧІ ПРО ВКЛАДЕНІ ШАБЛОНИ В ОБЛАСТІ ГАРМОНІЧНОСТІ

Анотація. В роботі описані нові ймовірнісні задачі про квадрати, випадково вкладені в основний (стандартний) квадрат. Встановлені особливі властивості перехідних ймовірностей поширені на випадкові блукання з багатьма стартами в симплексі.

Ключові слова: випадкові блукання, перехідні ймовірності, математичне сподівання, мультиплекс, симплекс.

Постановка проблеми. Випадкові блукання є найпростішим класом випадкових процесів, що достатньо багаті, щоб слугувати змістовними моделями багатьох явищ, що вивчаються різними розділами природничих та технічних наук. Крім того, часто формулювання задач та різні методи їх розв'язання доцільно випробувати на випадкових блуканнях. Математична модель випадкових блукань з багатьма стартами відповідає фізичній моделі випадкових блукань, в якій відсутні ефекти взаємодії між блукаючими частинками, зокрема, відсутній ефект стикання блукаючих частинок в одному вузлі. Так за умови знаходження в одному вузлі кількох блукаючих частинок визначає модель блукань що має застосування у прикладних областях. Наприклад, при дослідженні явища самодифузії у кристалах з вакансійним механізмом припускають можливість існування в одному вузлі кількох вакансій. Обчислювальні схеми, що містять елементи рандомізованих обчислень, відносять до родини методів Монте-Карло. Правило обчислення перехідних ймовірностей є головним питанням схематизації випадкових блукань, а отже існує проблема оптимізації даних схем.

Аналіз попередніх публікацій й постановка задачі. Першим алгоритмом прискорення методу Монте-Карло є алгоритм "блукання по сферах (колах)", який дозволяє знаходити розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Цей алгоритм запропонований Дж.Брауном та обґрунтований М.Маллером [1]. При напівдискретній реалізації цей алгоритм природним чином переходить в алгоритм "блукання по вершинах правильних багатокутників (або багатогранників, у залежності від вимірності задачі)". За наявності сітки або графу підходящої регулярної структури отримуємо аналогічний алгоритм дискретних випадкових блукань. При дискретно заданих граничних умовах задача відновлення гармонічної функції розв'язується за допомогою симетричних випадкових блукань з вузлами, що поглинають блукаючі частинки. Зрозуміло, що цей факт цілком виправдовує спроби змоделювати випадкові блукання по дискретних елементах з певною геометрією.

У той же час, на момент початку досліджень, ми не знайшли у літературі системного дослідження властивостей випадкових блукань, що починаються у точках, визначених вершинами багатокутників, що вкинуті випадковим чином в області блукань. Викладені нижче дослідження спираються на встановлені закономірності [3,4]: використання локальних координат у схемах випадкових блукань у межах дискретних елементів дає можливість теоретичного визначення перехідних ймовірностей; властивість рівності перехідної ймовірності з довільної точки симплексу або мультиплексу (К) у вузол цього елемента (M_i) значенню базисної функції $N_i(\xi_k;\eta_k)$, пов'язаної з даним вузлом, у точці старту блукань: $P(K \to M_i) = N_i(\xi_k;\eta_k)$.

Основна частина. В [5] розглянута ймовірнісна задача на трикутнику Тернера . В даній роботі розглянемо задачу на квадраті, в якій покажемо, що при концентричному або випадковому вкладанні квадратів сума перехідних ймовірностей з вершин цих квадратів M_k $(k = \overline{1,4})$ в будь-яку вершину A_i $(i = \overline{1,4})$ основного квадрата є величина постійна, рівна одиниці:

$$\sum_{k=1}^{4} P_i(M_k) = 1 ,. i = \overline{1,4} \qquad (1)$$

Також встановимо принцип розташування сукупностей точок в квадраті, щоб виконувалася рівність (1).

Випадковий квадрат з вершинами M_k $(k = \overline{1,4})$ будемо називати вкладеним в основний квадрат з вершинами A_i $(i = \overline{1,4})$, якщо будь-яка вершина M_k лежить всередині (можливо, на границі) основного квадрата. Вважається, що вкладені квадрати мають спільний барицентр. При цьому розглянемо наступні способи вкладання: концентричний, ексцентричний.

Скористаємося ймовірнісно-геометричною моделлю несіткового метода Монте-Карло [6]. Розглянемо блукання з чотирма стартами M_k $(k=\overline{1,4})$ і поглинаючими вузлами A_i $(i=\overline{1,4})$ в вершинах квадрата. Сформулюємо правила випадкових блукань: частинки стартують з точок M_k $(k=\overline{1,4})$ з ймовірністю переходу $P_i(M_k)$ в вершину A_i. Вплив випадкових факторів обумовлено розширенням або стисненням квадратів до барицентру, а також їх поворотом навколо барицентру.

Випадок перший – чотири точки старту суміщені в центрі (рис.1а). Ймовірність переходу частинок з M_k у вузол A_i дорівнює $\frac{1}{4}$. Для отримання ймовірностей переходу з M_k $(k=\overline{1,4})$ в вершину A_i використовуємо теорему додавання ймовірностей: $\sum_{k=1}^{4} P_{1,k}=1$. Аналогічними будуть вирази для інших трьох вершин, узагальнюючи всі вершини, отримаємо рівність 1.

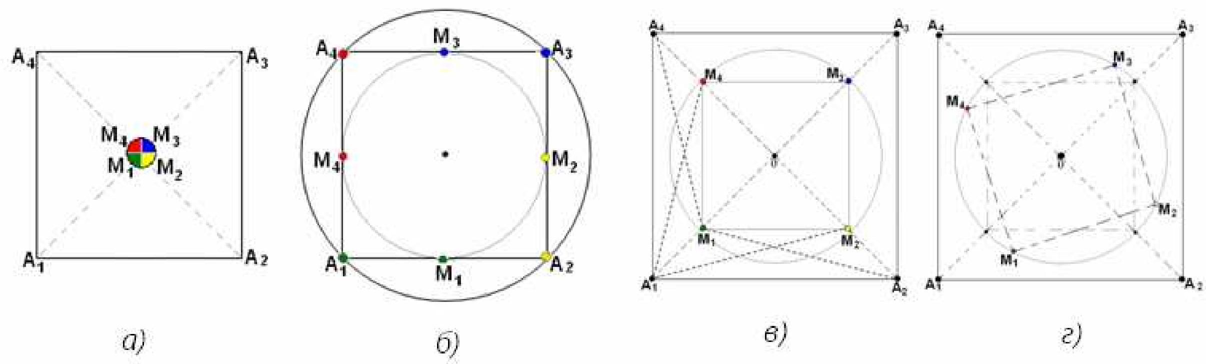

Рисунок 1 - Схема блукань з чотирма стартами (концентричне вкладання)

Розглянемо випадок, коли чотири точки старту лежать на описаному колі і при цьому співпадають з вершинами основного квадрата (рис.1б), тоді $P_1(M_k)=0,\ (k=2,3,4)\ \ P_1(M_1)=1$. Отже, рівність (1) справедлива для другого випадку. Будемо зменшувати коло, до тих пір поки воно не стане вписаним, точки старту тепер будуть розташовані на серединах сторін квадрату, т.б. в точках дотику кола і основного квадрата (рис.1б). Для третього випадку маємо

$P_1(M_1) = P_1(M_4) = \frac{1}{2}$, $P_1(M_2) = P_1(M_3) = 0$, отже справедлива рівність (1).

Наступний випадок – точки старту A_i $(i = \overline{1,4})$ лежать на одному з концентричних кіл, вкладених в основний квадрат, а саме точки старту розташовані на діагоналях основного квадрата, утворюючи при цьому вкладений квадрат (рис.1в). Відомо, що сума перехідних ймовірностей з заданої точки в чотири вершини постійна і дорівнює одиниці, наприклад для точки M_1: $P_1(M_1) + P_2(M_1) + P_3(M_1) + P_4(M_1) = \sum_{i=1}^{4} P_{i,1} = 1$. Користуючись симетрією квадрата можна виконати заміну: $P_2(M_1) = P_1(M_2)$, $P_3(M_1) = P_1(M_3)$, $P_4(M_1) = P_1(M_4)$, в результаті отримаємо рівність $P_1(M_1) + P_1(M_2) + P_1(M_3) + P_1(M_4) = \sum_{k=1}^{4} P_{1,k} = 1$. Це співвідношення справедливе також для випадку, коли вкладений квадрат повернути відносного основного на довільний кут (рис.1г). Узагальнюючи результати для всіх вершин квадрата, отримаємо: $\sum_{i=1}^{4} P_i(M_k) = \sum_{k=1}^{4} P_k(M_k) = 1$, $i, k = \overline{1,4}$.

Оже, для виконання рівності (1) необхідно, щоб всі точки старту були розташовані на вписаних або описаних концентричних колах регулярно; точки старту можна не пов’язувати з колами, а використовувати будь-який квадрат (вкладений, описаний, січний), головне щоб барицентр цього квадрата співпадав з барицентром основного квадрата (рис.2).

В процесі подальших досліджень було встановлено, що не обов’язково, щоб барицентри основного і вкладеного квадратів співпадали, т.б. можливе випадкове вкладання квадрата в мультиплекс (рис.3). На підставі імовірнісних властивостей базисних функцій стандартного квадрата доведемо наступне ***твердження***:

- математичне сподівання перехідної ймовірності з вершин вкладеного випадковим чином квадрата в основний квадрат, у вершину основного квадрата дорівнює ймовірності переходу з барицентра вкладеного квадрата в вершину основного.

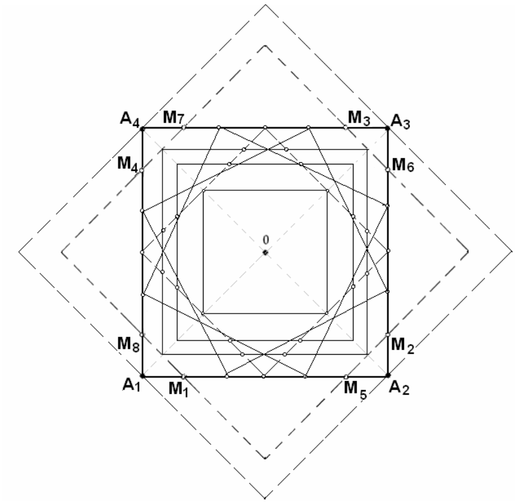

Рисунок 2 - Задача визначення вершин вкладених квадратів

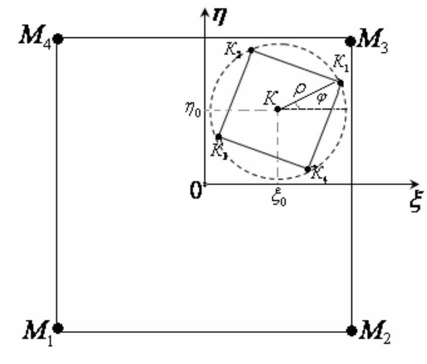

Рисунок 3 - Випадкове вкладання квадрата

Доведення. Нехай квадрат $K_1K_2K_3K_4$ випадковим чином вкладено в основний квадрат $M_1M_2M_3M_4$. З основним квадратом зв'яжемо локальну систему координат $(\xi;\eta)$, а з вкладеним - полярну систему координат $(\rho;\phi)$ (рис.3). $K(\xi_0;\eta_0)$ - барицентр квадрата $K_1K_2K_3K_4$. Вершини вкладеного квадрата (точки старту), мають наступні координати:

$$K_1(\xi_0+\rho\cos\phi;\eta_0+\rho\sin\phi);$$

$$K_2(\xi_0+\rho\cos(\phi+\frac{\pi}{2});\eta_0+\rho\sin(\phi+\frac{\pi}{2}));$$

$$K_3(\xi_0+\rho\cos(\phi+\pi);\eta_0+\rho\sin(\phi+\pi));$$

$$K_4(\xi_0+\rho\cos(\phi+\frac{3}{2}\pi);\eta_0+\rho\sin(\phi+\frac{3}{2}\pi)).$$

Застосовуючи формули приведення, маємо:

$$K_1(\xi_0+\rho\cos\phi;\eta_0+\rho\sin\phi); \qquad K_3(\xi_0-\rho\cos\phi;\eta_0-\rho\sin\phi);$$

$$K_2(\xi_0-\rho\sin\phi;\eta_0+\rho\cos\phi); \qquad K_4(\xi_0+\rho\sin\phi;\eta_0-\rho\cos\phi).$$

Базисні функції стандартного квадрата (мультиплекса):

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \qquad N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),$$

$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \qquad N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).$$

Ці функції мають чітко виражені імовірнісні властивості: $0\le N_i(\xi,\eta)\le 1$, $\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)=1$, отже $N_i(\xi_k,\eta_k)$ $(i=\overline{1,4})$ - визначає

 ISSN 1562-9945

ймовірність переходу частинки з точки $K(\xi_k;\eta_k)$ $k=\overline{1,4}$ у граничний вузол мультиплекса: $P\left(K \to M_i\right) = N_i\left(\xi_k;\eta_k\right)$. Для першого вузла: $\sum_{k=1}^{4} P_1(K_k) = \sum_{k=1}^{4} N_1(\xi_k;\eta_k)$.

Математичне сподівання переходу блукаючої частинки з довільної вершини в вузол M_1:

$$m_1 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} N_1(\xi_k;\eta_k) = \frac{1}{4}(1-\eta_0-\xi_0+\xi_0\eta_0) = \frac{1}{4}(1-\xi_0)(1-\eta_0) = N_1(K).$$

Аналогічно можна довести справедливість твердження для M_2, M_3, M_4 узагальнивши які, маємо $m_i = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} N_i(\xi_k;\eta_k) = N_i(K)$.

Отриманий результат дозволяє формулювати нові ймовірнісні задачі на квадратах з білінійною інтерполяцією, а саме отримання прискорених схем випадкових блукань з багатьма стартами по мультиплексах, "блукання" по вершинах правильних багатокутників (рис.3) (або багатогранників).

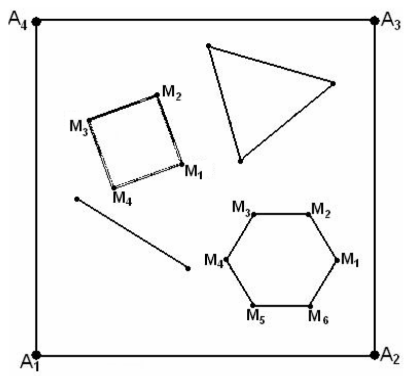

Рисунок 3 - Випадкові вкладання геометричних об’єктів

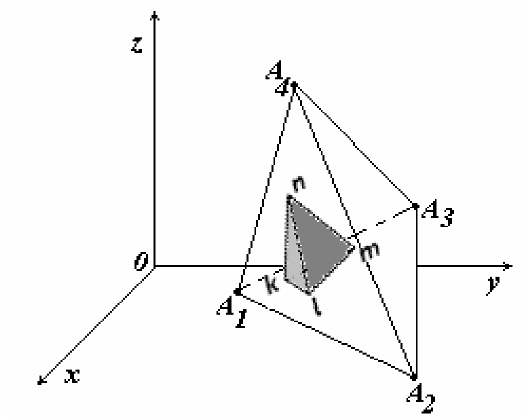

Рисунок 4 - Тривимірний симплекс

Розглянемо випадкову вибірку з тетраедрів з загальним барицентром M_0, які вкладені в основний тетраедр. Вершини вкладеного тетраедра позначимо через k, l, m, n.

Твердження. Математичне сподівання перехідної ймовірності з вершини вкладеного тетраедра в вершину основного тетраедра дорівнює ймовірності переходу з барицентра вкладеного тетраедра у вказану вершину основного тетраедра.

Доведення. Нагадаємо, що ймовірність випадкового переходу з внутрішньої точки "k" основного тетраедра в його вершину "i" визначається значенням базисної функції $\xi_i(k) = \xi_i(x_k, y_k, z_k)$. Враховуючи геометрично-ймовірнісний дуалізм базисної функції, обчислимо безпосередньо середнє значення (математичне сподівання) перехідних ймовірностей по 4-ом маршрутам, прокладеним з вершин k, l, m, n вкладеного тетраедра в вершину A_1 основного тетраедра, як геометричну ймовірність – через об'єми відповідних частин тетраедра: Δ- об'єм тетраедра $A_1A_2A_3A_4$; Δ_l- об'єм тетраедра $MA_2A_3A_4$, Δ_m- об'єм тетраедра $MA_1A_3A_4$, Δ_n- об'єм тетраедра $MA_1A_2A_4$, Δ_k- об'єм тетраедра $MA_2A_3A_1$.

$$\overline{P_1} = \frac{0,25}{\Delta}(\Delta_k + \Delta_l + \Delta_m + \Delta_n) =$$

$$= \frac{0,25}{\Delta}\begin{vmatrix} 4 & x_k + x_l + x_m + x_n & y_k + y_l + y_m + y_n & z_k + z_l + z_m + z_n \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \xi_1(M_0),$$

де $x_0 = \dfrac{x_k + x_l + x_m + x_n}{4}$, $y_0 = \dfrac{y_k + y_l + y_m + y_n}{4}$, $z_0 = \dfrac{z_k + z_l + z_m + z_n}{4}$ - координати барицентра вкладеного тетраедра.

Аналогічно, $\overline{P_2} = \xi_2(M_0); \overline{P_3} = \xi_3(M_0); \overline{P_4} = \xi_4(M_0)$.

Локальні координати точки симплексу можна інтерпретувати ще і як відстань від цієї точки до відповідної сторони симплексу. Тому твердження можна переформулювати наступним чином.

НАСЛІДОК. Математичне сподівання відстані від вершини вкладеного тетраедра до будь-якої грані основного тетраедра дорівнює відстані від цієї ж грані до барицентру вкладеного тетраедра.

Висновок. Отриманий результат дозволяє проводити різноманітні узагальнення задачі Бюффона від випадкового вкладання геометричних об'єктів (відрізка, n-кутника) в скінченний елемент, в цьому випадку вершини n-кутників розглядаються як точки старту одночасних випадкових блукань частинок . У схемах випадкових блукань для вказаних задач доцільним і виправданим є наближення кіл правильними багатокутниками, а сфер – правильними багатогранниками. Крім того встановлені властивості дозволяють будувати економічні схеми одночасних випадкових блукань по k-вимірним симплексам.

ЛІТЕРАТУРА

1. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло/И.М. Соболь. -М.: Наука, 1973. –312 с.
2. Хомченко Б.А. Ймовірнісні моделі та алгоритми зваженого усереднення параметрів в інформаційних технологіях відновлення функцій: Дис…канд. техн. наук: 05.13.06. –Херсон, 2000.- 200 с.
3. Валько Н.В. Ймовірнісні моделі і методи барицентричного усереднення граничних потенціалів: Дис…канд. Фіз..-мат. наук: 01.05.02. –Дніпропетровськ, 2005.- 170 с.
4. Астионенко И.А., Хомченко А.Н. Вероятностные задачи на треугольнике Тернера // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Зб. наук. праць. – Кривий Ріг: НМетАУ, 2006. – Вип.VI., Т.1. – С. 299 – 302
5. Хомченко А.Н., Тулученко Г.Я. Ймовірнісна інтерпретація рекурентної процедури побудови базисних функцій трикутних скінченних елементів // Геом. та комп'ют. моделювання. Зб. наук. праць. – Вип..16. – Харків: ХДУХТ, 2007. – С.22-29.