

Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко

ЗАДАЧА ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ БАГАТОЗОННИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Антоція. В роботі розглянуто метод ідентифікації моделей динаміки, розроблений на основі поєднання методів розв'язання задач оптимального керування та неперервних задач оптимального розбиття множин. Наведений алгоритм розв'язання задач ідентифікації границь між зонами функціонування багатозонних динамічних систем та їх параметрів. Ключові слова: динамічна система, ідентифікація багатозонних систем, методи оптимального розбиття множин.

Вступ

Багато різноманітних енергоємних об'єктів, таких як теплові апарати, машини з електроприводами, технологічні установки у машинобудівній, хімічній, металургійній, будівельній промисловості, значну частку часу працюють в динамічних режимах. Зниження енергоспоживання таких об'єктів можливе за рахунок оптимального керування в різних станах їх функціонування. Сьогодні розвиток теорії аналізу та синтезу енергозберігаючого управління на множині станів функціонування, створення методів оперативного синтезу керуючих впливів динамічними режимами енергоємних об'єктів є актуальним напрямком наукових досліджень.

Робота присвячена розробці методу ідентифікації параметрів моделей динаміки енергоємних об'єктів, придатних для розв'язання задач енергозберігаючого керування [1,2]. Такі моделі можна досить точно описати системою диференціальних рівнянь з розривною правою частиною.

В даній роботі розглядається задача ідентифікації багатозонної моделі динаміки, в якій невідомими є не тільки границі між зонами функціонування об'єктів, але й деякі параметри, що впливають на стан об'єкта в межах певних зон. Як і в роботах [3,4], метод розв'язання цієї задачі використовує основні положення теорії неперервних задач оптимального розбиття множин, яка дозволяє звести

задачу нескінченновимірної програмування до задачі мінімізації недиференційовної функції декількох змінних. Але на відміну від алгоритмів, представлених в [3,4], у розробленому в даній роботі алгоритмі на кожному кроці розв'язання задачі мінімізації негладкої функції для визначення границь між зонами функціонування об'єкту розв'язується набір послідовних задач оптимального керування. При цьому розрахункові формули для останніх отримані за допомогою необхідних умов оптимальності.

Постановка задачі ідентифікації

Нехай стан деякого об'єкту характеризується двома фазовими координатами (x_1, x_2) ; Ω – множина всіх можливих його станів; $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ – множини значень першої фазової координати системи, які визначають можливі зони функціонування системи; $P_N(\Omega)$ – клас всіх можливих розбиттів множини Ω на N підмножин:

$$P_N(\Omega) = \{\bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N}\}$$

Будемо вважати, що зміна фазових координат з часом описується наступною задачею Коші для системи диференціальних рівнянь з розривною правою частиною:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \phi(t, x; \bar{\omega}, \tau), \phi \in \Phi, \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad (2)$$

$$\Phi = \{\phi(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau) : \phi(t, x; \bar{\omega}, \tau) = \phi_i(t, x; \tau_i) \text{ м.в. для } x \in \Omega_i, \tau_i \in \Xi, i = \overline{1, N}, \bar{\omega} \in P_N(\Omega)\},$$

де функції $\phi_i(t, x; \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, які описують або внутрішню структуру об'єкту, або вплив зовнішніх факторів на нього в межах відповідних зон Ω_i , $i = \overline{1, N}$, містять набори параметрів τ_i , деякі з яких, а може й усі, можуть бути невідомими, $\Xi \subseteq R^{sN}$, s – вимірність кожного з векторів τ_i , $i = \overline{1, N}$.

Нехай в певні моменти часу t_k , $k = \overline{1, K}$, на проміжку $\bar{T} = [0; T]$ вимірюється значення змінної $z = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$, де $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$ – задані величини. Модель вимірювань представимо у такий спосіб:

$$\tilde{z}(t_k) = \gamma_1 x_1(t_k; \tau) + \gamma_2 x_2(t_k; \tau) + \xi_k, \quad k = \overline{1, K}, t_k \in [0, T], \quad (3)$$

де, ξ_k , $k = \overline{1, K}$, – випадкові похибки вимірювань.

Під ідентифікацією багатозонної динамічної системи (1) будемо розуміти визначення границь між зонами функціонування $(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$ системи (1), а також вектору параметрів $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$, за відомими значеннями вихідної величини $\tilde{z}(t_k)$, $k = \overline{1, K}$, і за умов (2).

Математична модель задачі ідентифікації багатозонної динамічної системи запишемо в такий спосіб:

$$I(x(; \bar{\omega}, \tau)) \rightarrow \min_{(\bar{\omega}, \tau) \in P_N(\Omega) \times \Xi}, \quad (4)$$

де

$$I(x(; \bar{\omega}, \tau)) = \int_0^T (\gamma_1 x_1(t; \bar{\omega}, \tau) + \gamma_2 x_2(t; \bar{\omega}, \tau) - \tilde{z}(t))^2 \sum_{k=1}^K \delta(t - t_k) dt,$$

$x(; \bar{\omega}, \tau)$ – розв’язок задачі Коші (1), (2), $\tilde{z}(t)$ – значення вихідної змінної, $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака.

Надалі вважатимемо функції $\phi_i(t, x; \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, – лінійними за фазовими змінними, що записуються в такий спосіб: $\phi_i(t, x; \tau_i) = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(b^i, t)$, $i = \overline{1, N}$, а набір параметрів, що визначає кожну з цих функцій, $\tau_i = (a_1^i, a_2^i, b^i)$, $i = \overline{1, N}$.

Введемо до розгляду характеристичні функції $\lambda_1(x_1), \dots, \lambda_N(x_1)$ підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$:

$$\lambda_i(x_1) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 \in \Omega_i, \\ 0, & \text{якщо } x_1 \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = \overline{1, N},$$

Згідно з методикою розв’язання неперервних задач оптимального розбиття множин, від задачі мінімізації функціоналу $I(x(; \bar{\omega}, \tau))$ здійснюємо перехід до еквівалентної задачі: знайти вектор - функцію $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) \in \Lambda_0$ і вектор $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, за яких

$$I^1(x(; \lambda(\cdot), \tau)) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Lambda_0 \times \Xi}, \quad (5)$$

де

$$I^1(x(\cdot; \lambda(\cdot), \tau)) = \int_0^T (\gamma_1 x_1(t; \lambda(x_1), \tau) + \gamma_2 x_2(t; \lambda(x_1), \tau) - \tilde{z}(t))^2 \sum_{k=1}^K \delta(t - t_k) dt,$$

$$\Lambda_0 = \{\lambda(x_1) = (\lambda_1(x_1), \dots, \lambda_N(x_1)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x_1) = 1; \lambda_i(x_1) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \text{ м.в. для } x_1 \in \Omega\},$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(b^i, t)) \lambda_i(x_1) \end{cases} \quad (6)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (7)$$

Метод розв'язування задачі ідентифікації

Нехай $\bar{\tau} \in \Xi$ - довільний, але фіксований вектор. Розглянемо задачу

$$I_{\bar{\tau}}^1(x(\cdot; \lambda(\cdot))) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0}, \quad (8)$$

за умов (6), (7), де

$$I_{\bar{\tau}}^1(x(\cdot; \lambda(\cdot))) = \int_0^T (\gamma_1 x_1(t; \lambda(x_1), \bar{\tau}) + \gamma_2 x_2(t; \lambda(x_1), \bar{\tau}) - \tilde{z}(t))^2 \sum_{k=1}^K \delta(t - t_k) dt.$$

Оскільки перша координата фазової змінної є функцією часу, вектор-функція $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) \in \Lambda_0$ також фактично залежить від часової змінної, що будемо позначати у такий спосіб: $\lambda(x_1(t)) = (\lambda_1(x_1(t)), \dots, \lambda_N(x_1(t)))$. Введемо до розгляду вектор-функцію

$\hat{\lambda}(t) = \left(\hat{\lambda}_1(t), \dots, \hat{\lambda}_N(t) \right)$, таку що $\hat{\lambda}(t) = \lambda(x_1(t))$. Отже, на відміну від

вектор-функції λ , компоненти якої визначені на множині Ω , коор-

динати вектор-функції $\hat{\lambda}(t)$ є функціями часу і визначені на інтерва-

лі $t \in [0, T]$, тобто: $\hat{\lambda}(\cdot) \in \hat{\Lambda}$,

$$\hat{\Lambda} = \left\{ \hat{\lambda}(t) = \left(\hat{\lambda}_1(t), \dots, \hat{\lambda}_N(t) \right) : \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i(t) = 1; \hat{\lambda}_i(t) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \text{ м.в. для } t \in [0, T] \right\}$$

Отже, задачу (6) – (8) можна інтерпретувати як задачу оптимального керування динамічною системою, в якій керуючою функці-

єю є вектор-функція $\hat{\lambda}(t)$. Представимо таку задачу оптимального

керування на проміжку $t \in [0, t_K]$ набором наступних послідовних K задач:

$$J_{\bar{r}}^k(x(\cdot; \hat{\lambda}(\cdot))) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (9)$$

$$J_{\bar{r}}^k(x(\cdot; \hat{\lambda}(\cdot))) = \left(\gamma_1 x_1(t_k; \hat{\lambda}(\cdot)) + \gamma_2 x_2(t_k; \hat{\lambda}(\cdot)) - \tilde{z}(t_k) \right)^2,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(b^i, t)) \hat{\lambda}_i(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \end{cases} \quad (10)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_1(t_{k-1}) = \bar{x}_1(t_{k-1}), \quad x_2(t_{k-1}) = \bar{x}_2(t_{k-1}), \quad k = \overline{1, K}, \quad (11)$$

де $\bar{x}_1(t_{k-1})$ і $\bar{x}_2(t_{k-1})$, $k = \overline{1, K}$, – значення першої та другої фазової координати у момент часу $t = t_{k-1}$, які або збігаються з $\tilde{x}_1(t_{k-1})$ і $\tilde{x}_2(t_{k-1})$ відповідно у випадку, коли спостерігаються обидві фазові змінні ($\tilde{x}_j(t_{k-1})$, $j = \overline{1, 2}$ – значення, що спостерігаються), або обчислені у результаті розв'язання попередньої $(k-1)$ -ї задачі.

Наведемо необхідні умови оптимальності для кожної із задач (9) – (11). Для цього, за аналогією з методикою розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин, зануримо множину $\hat{\Lambda}$ у симплекс

$$\bar{\Lambda} = \left\{ \lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) = 1 ; 0 \leq \lambda_i(t) \leq 1, i = \overline{1, N}, \text{ м.в. для } t \in [0, T] \right\}$$

і розглянемо задачу:

$$J_{\bar{r}}^k(x(\cdot; \hat{\lambda}(\cdot))) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \bar{\Lambda}}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (12)$$

за умов (10), (11). Про правомірність переходу від задачі (9) – (11) до задачі (10) – (12) буде зазначено нижче.

Нехай $\left((x_1, x_2), \hat{\lambda} \right)$ – допустимий процес в задачі (9) – (11). Во-

чевидь, цей процес буде також допустимим для задачі (10) – (12).

Дамо приріст $\Delta \hat{\lambda}(\cdot)$ функції керування такий, щоб виконувалися умови:

$$\hat{\lambda}(t) + \Delta\hat{\lambda}(t) \in \bar{\Lambda}, \sum_{i=1}^N \left(\hat{\lambda}_i(t) + \Delta\hat{\lambda}_i(t) \right) = 1 \quad \forall t \in [0, T].$$

Це означає, що $\Delta\hat{\lambda} \in \hat{\Lambda}_\Delta$, де

$$\hat{\Lambda}_\Delta = \left\{ \lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) = 0 ; -1 \leq \lambda_i(t) \leq 1, i = \overline{1, N}, \quad \forall t \in [0, T] \right\}$$

Приріст $\Delta\hat{\lambda}(\cdot)$ викликає прирости фазових змінних $\Delta x_1, \Delta x_2$, які задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \Delta\dot{x}_1 = \Delta x_2, \\ \Delta\dot{x}_2 = \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(b^i, t)) \Delta\hat{\lambda}_i + \sum_{i=1}^N (a_1^i \Delta x_1 + a_2^i \Delta x_2) \hat{\lambda}_i. \end{cases} \quad (13)$$

і початкові умови

$$\Delta x_1(t_{k-1}) = 0, \Delta x_2(t_{k-1}) = 0. \quad (14)$$

Лінеаризований функціонал задачі (9) – (11) має наступний вигляд:

$$J_{\bar{\tau}}^k(x(\cdot; \hat{\lambda} + \Delta\hat{\lambda})) = J_{\bar{\tau}}^k(x(\cdot; \hat{\lambda})) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} p_2 \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(b^i, t)) \Delta\hat{\lambda}_i dt,$$

де вектор $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ відповідає наступним умовам:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -p_2 \sum_{i=1}^n a_1^i \hat{\lambda}_i, \\ \dot{p}_2 = -p_1 - p_2 \sum_{i=1}^n a_2^i \hat{\lambda}_i; \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} p_1(t_k) &= -2\gamma_1 \left(\gamma_1 x_1(t_k; \hat{\lambda}) + \gamma_2 x_2(t_k; \hat{\lambda}) - \tilde{z}(t_k) \right), \\ p_2(t_k) &= -2\gamma_2 \left(\gamma_1 x_1(t_k; \hat{\lambda}) + \gamma_2 x_2(t_k; \hat{\lambda}) - \tilde{z}(t_k) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Для того, щоб допустимий процес $\left((x_1, x_2), \hat{\lambda} \right)$ був оптимальним в задачі (10) – (12), необхідно щоб для всіх допустимих приростів $\Delta\hat{\lambda} \in \hat{\Lambda}_\Delta$ виконувалась нерівність:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} p_2 \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1(t) + a_2^i x_2(t) + f_i(b^i, t)) \Delta \hat{\lambda}_i(t) dt \geq 0, \quad (17)$$

де (x_1, x_2) задовольняють задачу Коші (10), (11) при $\lambda(\cdot) = \hat{\lambda}(\cdot)$; а $p_2(\cdot)$ задовольняє умовам задачі (15), (16) за відповідних функцій $\left((x_1, x_2), \hat{\lambda} \right)$.

Нехай $\left((x_1, x_2), \hat{\lambda} \right)$ – довільний допустимий процес в задачі (10) – (12), що є допустимим також для задачі (9) – (11). Користуючись умовою (17), побудуємо напрям спуску в цій точці $\left((x_1, x_2), \hat{\lambda} \right)$, якщо він існує. Для цього розглянемо таку задачу:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} p_2(t) \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1(t) + a_2^i x_2(t) + f_i(b^i, t)) \Delta \hat{\lambda}_i(t) dt \rightarrow \min_{\Delta \hat{\lambda}_i \in \Lambda_\Delta}, \quad (18)$$

де $p_2(\cdot)$ задовольняє умовам задачі (15), (16) за відповідних функцій $\left((x_1, x_2), \hat{\lambda} \right)$. Мінімальне значення інтегралу в (18) досягається в точці $\Delta \hat{\lambda}_*(\cdot)$, в якій майже всюди для $t \in [t_{k-1}, t_k]$ виконується рівність:

$$\begin{aligned} p_2(t) \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1(t) + a_2^i x_2(t) + f_i(b^i, t)) \Delta \hat{\lambda}_{*i}(t) = \\ = \min_{\Delta \lambda(t) \in \Lambda_{\hat{\lambda}(t)}} p_2(t) \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1(t) + a_2^i x_2(t) + f_i(b^i, t)) \Delta \hat{\lambda}_i(t), \end{aligned}$$

де

$$\Lambda_{\hat{\lambda}(t)} = \left\{ \Delta \lambda = (\Delta \lambda_1, \dots, \Delta \lambda_N) : \sum_{i=1}^N \Delta \lambda_i = 0; 0 \leq \hat{\lambda}_i + \Delta \lambda_i \leq 1, i = \overline{1, N} \right\}.$$

Допустимий приріст $\Delta \hat{\lambda}_i$ координати $\hat{\lambda}_i$ задовольняє наступні умови: якщо $\hat{\lambda}_i = 1$, то $\Delta \hat{\lambda}_i \in [-1, 0]$; якщо $\hat{\lambda}_i = 0$, то $\Delta \hat{\lambda}_i \in [0, 1]$; крім

того, $\sum_{i=1}^N \hat{\Delta\lambda}_i = 0$. Фактично, майже в кожен момент часу $t \in [t_{k-1}, t_k]$ маємо справу із задачею лінійного програмування на паралелепіпеді з однією умовою-рівністю. Запишемо її у наступному вигляді:

$$p_2(t) \sum_{i=1}^N \phi_i(x, t; \tau_i) \hat{\Delta\lambda}_{*i}(t) = \min_{\Delta\lambda(t) \in \Lambda_{\lambda(t)}} p_2(t) \sum_{i=1}^N \phi_i(x, t; \tau_i) \hat{\Delta\lambda}_i(t).$$

Нагадаємо, що у разі оптимальності вектор-функції $\hat{\lambda}(\cdot)$ для задачі (10) – (12), майже всюди для $t \in [t_{k-1}, t_k]$ виконується умова

$$p_2(t) \sum_{i=1}^N \phi_i(x, t; \tau_i) \hat{\Delta\lambda}_i(t) \geq 0 \quad \forall \hat{\Delta\lambda} \in \Lambda_{\lambda(t)}.$$

Зафіксуємо довільний момент часу $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Нехай у векторі $\hat{\lambda}(t)$ такі компоненти: $\hat{\lambda}_m(t) = 1$, $\hat{\lambda}_i(t) = 0$, $i = \overline{1, N}$, $i \neq m$. Далі момент часу t і позначку « $\hat{\cdot}$ » будемо опускати. Розглянемо задачу

$$p_2\phi_1\Delta\lambda_1 + p_2\phi_2\Delta\lambda_2 + \dots + p_2\phi_N\Delta\lambda_N \rightarrow \min \quad (19)$$

за умов

$$\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 + \dots + \Delta\lambda_N = 0, \quad (20)$$

$$\Delta\lambda_m \in [-1, 0], \quad \Delta\lambda_i \in [0, 1], \quad i = \overline{1, N}, \quad i \neq m. \quad (21)$$

Введемо $\Delta\bar{\lambda}_m = -\Delta\lambda_m$, $\Delta\bar{\lambda}_m \in [0, 1]$ і, враховуючи умову (20), виключимо змінну

$$\Delta\bar{\lambda}_m = \Delta\lambda_1 + \dots + \Delta\lambda_{m-1} + \Delta\lambda_{m+1} + \dots + \Delta\lambda_N \quad (22)$$

з цільової функції. Тоді задача (19) – (21) запишеться у наступному вигляді:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^N (p_2\phi_i - p_2\phi_m) \Delta\lambda_i \rightarrow \min_{\substack{0 \leq \Delta\lambda_i \leq 1, \\ i=1, N}} \quad (23)$$

за умов (22).

Якщо для всіх $i = \overline{1, N}$, $i \neq m$ і майже всіх $t \in [t_{k-1}, t_k]$ виконується нерівність: $p_2\phi_i - p_2\phi_m \geq 0$, то мінімальне значення цільової функції в (23) досягається при $\Delta\lambda_i = 0$, $i = \overline{1, N}$, $i \neq m$, і можна зробити

висновок про оптимальність вектору $\hat{\lambda}(t)$ в задачі (10) – (12), в силу довільності вибору моменту часу $t \in [t_{k-1}, t_k]$.

Якщо ж при деякому $t \in [t_{k-1}, t_k]$ існують такі індекси k , що виконується нерівність $p_2\phi_k - p_2\phi_m < 0$, то цільова функція в (23) може бути зменшена за рахунок збільшення відповідних змінних $\Delta\lambda_k$. З урахуванням того, що базис опорного розв'язку задачі лінійного програмування (23), (22) складає лише один вектор умов, маємо можливість у векторі $\Delta\lambda$ збільшити до одиниці лише одну змінну. Нехай

$$p_2(\phi_s - \phi_m) = \min_{k: p_2(\phi_k - \phi_m) < 0} p_2(\phi_k - \phi_m).$$

Тоді оптимальним розв'язком задачі (18) буде вектор $\Delta\lambda_{*s}(t) = 1$; $\Delta\lambda_{*m}(t) = -1$, $\Delta\lambda_{*i}(t) = 0$, $i = \overline{1, N}$, $i \neq s, m$. Відповідно, в задачі (10) – (12) можна здійснити перехід від вектор-функції $\hat{\lambda}(\cdot)$ до іншої допустимої вектор-функції $\lambda_*(\cdot)$, в якій $\lambda_{*s}(t) = 1$, $\lambda_{*i}(t) = 0$, $i = \overline{1, N}$, $i \neq s$, і яка забезпечує релаксійність процесу побудови розв'язку цієї задачі. З огляду на те, що точка $\lambda_*(\cdot)$ є крайньою точкою симплексу $\bar{\Lambda}$, і $\Lambda \subset \bar{\Lambda}$, то справедливим буде твердження про те, що отриманий у такий спосіб розв'язок задачі (10) – (12) буде оптимальним розв'язком і для задачі (9) – (11).

З урахуванням наведених вище міркувань побудуємо допоміжний ітераційний алгоритм пошуку границь між зонами функціонування системи.

Алгоритм А

Ініціалізація. $k = 1$, τ_i , $i = \overline{1, N}$, $\varepsilon > 0$; крок h чисельного інтегрування системи диференціальних рівнянь (10), (11).

1. Задаємо $q := 0$.

Якщо $k = 1$, то задаємо початкові умови $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$. Якщо ж $k > 1$, то за початкові умови для фазових змінних $x_1(t_{k-1})$, $x_2(t_{k-1})$ обираються значення цих змінних у момент часу t_{k-1} , які отримані в результаті розв'язання попередньої

задачі. Задаємо також початкове наближення значень характеристичних функцій: $\lambda_i^{(0)}(t) \forall t \in [t_{k-1}, t_k]$.

Нехай у результаті q ітерацій отримані значення $\lambda_i^{(q)}(t), i = \overline{1, N}$. Опишемо q -ту ітерацію.

2. В кожній точці t сітки часового інтервалу $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ обчислюємо значення функцій $x_1^{(q)}(t), x_2^{(q)}(t)$, розв'язуючи зліва направо за допомогою методу Рунге-Кутта задачу Коші (10), (11) при $\lambda = \lambda^{(q)}$. Обчислюємо значення функцій $p_1(t), p_2(t)$, розв'язуючи зправа наліво за допомогою методу Рунге-Кутта задачу Коші (15), (16) при $\lambda = \lambda^{(q)}, x = x^{(q)}$.

3. Перевіряємо виконання умов стаціонарності процесу:

$$p_2\phi_i - p_2\phi_m \geq 0 \quad \forall i \neq m \quad (24)$$

де m - номер одиничної компоненти вектору λ .

Якщо для деякого моменту часу $\bar{t} \in [t_{k-1}, t_k]$ існує такий індекс i , що $p_2\phi_i - p_2\phi_m < 0$, то серед них обираємо індекс l , що відповідає найменшому від'ємному значенню цієї різниці і покладаємо $\lambda_l(\bar{t}) = 1, \lambda_m(\bar{t}) = 0$. Перехід на крок 4.

Якщо $\forall t \in [t_{k-1}, t_k]$ для поточного значення $\lambda(t)$ таке, що $\forall i \neq m$ виконуються умови стаціонарності процесу (24), то $\lambda(t)$ буде оптимальним (умовно стаціонарним) на відрізку $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Перехід на крок 5.

4. $q := q + 1$. Переходимо на крок 2.

5. $k := k + 1$

Якщо $k \leq K$, то переходимо на крок 1, інакше – на крок 6.

6. Відновлюємо оптимальне розбиття множини Ω за відомими значеннями характеристичних функцій $\lambda_i(t), i = \overline{1, N}$ і значеннями першої фазової координати системи у відповідних моментах часу. Обчислюємо значення цільового функціоналу загальної задачі (8).

Кінець алгоритму.

Отже, для кожного фіксованого вектору невідомих параметрів $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ границі між зонами перемикання правих частин системи (10) можна знайти за алгоритмом А. Схема розв'язання задачі,

коли відновленню підлягають не тільки границі між підмножинами, але й параметри $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ кусково-неперервної функції правої частини рівняння (6), ґрунтується на поєднанні алгоритмів недиференційовної оптимізації для пошуку скінченного числа невідомих параметрів і вищеописаного підходу пошуку границь між підмножинами.

Для розв'язування задачі параметричної ідентифікації динамічної системи (6) представимо ітераційний процедуру, яка поєднує г-алгоритм Шора і вищеописаний алгоритм А.

Алгоритм Б

Ініціалізація. Задаємо $q = 0$, $\tau_i^{(q)}$, $i = \overline{1, N}$, $\varepsilon_0 > 0$.

1. Застосовуємо алгоритм А для розв'язання задачі пошуку значень характеристичних функцій $\lambda = \lambda^{(q)}$ при фіксованих центрах підмножин.

2. Обчислюємо наближено за допомогою формул чисельного диференціювання узагальнений градієнт $\gamma^{(q)}$ функції $I^1(x(; \lambda, \tau))$ за змінними $\tau_i^{(q)}$, $i = \overline{1, N}$ при $\lambda = \lambda^{(q)}$.

3. Здійснюємо q -ту ітерацію г-алгоритму Шора за формулою

$$\tau^{k+1} = \tau^k - \alpha_k H_k \gamma^k,$$

де H_k – матриця розтягнення простору змінних $\tau_i^{(q)}$, $i = \overline{1, N}$ у напрямку різниці двох послідовних узагальнених градієнтів γ^k і γ^{k-1} , $H_0 = E$;

$$H_{q+1} = H_q + (1/\alpha^2 - 1) \frac{H_q \xi_q \xi_q^T H_q}{(H_q \xi_q, \xi_q)},$$

$$\xi_q = \gamma^{(q)} - \gamma^{(q-1)}.$$

$\alpha_k \geq 0$ – кроковий множник, який обирається з умови мінімуму цільової функції $I^1(x(; \lambda, \tau))$ за змінною τ у напрямку $d = -H_q \gamma^{(q)}$.

4. Якщо виконується хоча б одна з умов

$$\|\tau^{(q+1)} - \tau^{(q)}\| \leq \varepsilon_0;$$

$$\|\gamma^{(q)}\| \leq \varepsilon_0;$$

$$|I^1(x(; \lambda^{(q+1)}, \tau^{(q+1)})) - I^1(x(; \lambda^{(q)}, \tau^{(q)}))| \leq \varepsilon_0,$$

то кінець алгоритму. В якості оптимального розв'язку задачі (5) – (7) обираємо $(\lambda^{(q+1)}, \tau^{(q+1)})$. Інакше $k := k + 1$ і переходимо на п. 1.

Зауваження. Для того, щоб обчислити узагальнений градієнт функції $I^1(x(; \lambda^{(q)}, \tau)$ необхідно поряд із задачею п.1 додатково розв'язати sN таких задач при збурених компонентах вектора параметрів τ , де s – вимірність кожного з векторів τ_i , $i = \overline{1, N}$.

Аналіз результатів обчислювальних експериментів

Представимо результати розрахунків, виконаних для двох модельних обернених задач. Для отримання вхідних даних за допомогою методу Рунге – Кутта 4-го порядку розв'язувалась пряма задача Коші (6) – (7) з відомими границями між зонами функціонування системи. Далі, задавши кількість точок вимірювання K , і, вибираючи із отриманого чисельного розв'язку задачі значення фазових змінних (величини, що спостерігаються) у цих K точках, збурюючи ці значення за допомогою генератора випадкових чисел, формувалась послідовність обернених задач виду (9) – (11).

Реконструкція вигляду розривних за фазовою змінною правих частин диференціальних рівнянь проводилась для динамічних систем з різною кількістю зон функціонування. На рисунку 1 зображені фазові траєкторії системи (6) (змодельована та відтворена за алгоритмом А), де переключення правої частини диференціального рівняння в (6) з функції $\phi_1 = -0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3t$ на функцію $\phi_2 = 0.27x_1 - 0.2x_2 - 0.17t$, а далі на $\phi_3 = -0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.46t$ відбуваються відповідно у точках $x_1 = \sigma_1 = -1$, $x_1 = \sigma_2 = 6$. За початкових умов $x_1(0) = -3$, $x_2(0) = -2$, $T = 8$ та за значеннями фазових координат у $K = 38$ точках спостережень отримані такі відновлені границі між зонами функціонування: $\sigma_1 = -1.504$, $\sigma_2 = 6.092$. Інтегрування системи (6) відбувалося з кроком $h = 0.05$. Похибки спостережень – $\xi_k \in (-0.005; 0.005)$, $k = \overline{1, K}$.

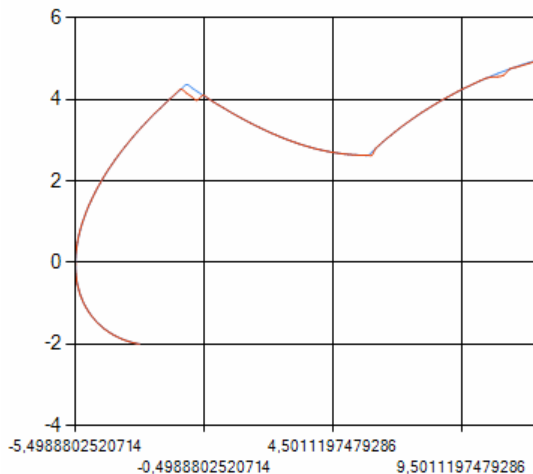


Рисунок 1 - Фазові траєкторії системи (6), реконструйованої за допомогою алгоритму А

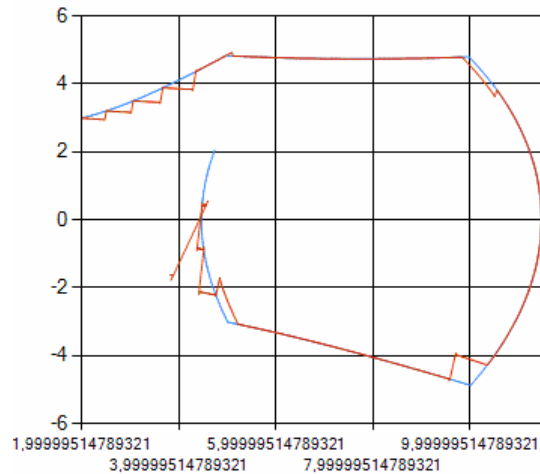


Рисунок 2 - Змодельовані та відтворені фазові траєкторії тризонної динамічної системи

На рисунку 2 представлені змодельована та відтворена за допомогою алгоритму А фазові траєкторії динамічної системи з трьома зонами функціонування, яким відповідають такі функції правої частини системи (6): $\phi_1 = 0.8x_1 - 0.2x_2 + 0.9t$, $\phi_2 = 0.14x_1 - 0.2x_2 - 0.1t$, $\phi_3 = -0.6x_1 - 0.01x_2 - 0.6t$ з границями перемикування $x_1 = 5$ та $x_1 = 10$ відповідно. Початкові дані в задачі: $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 3$, $T = 5$, $K = 30$. За проміжок часу, що розглядається, переключення відбувалося декілька разів. Усі чотири точки переключення були виявлені. При цьому отримані наступні значення шуканих границь між зонами функціонування системи: $\sigma_1 = 5.11$, $\sigma_2 = 9.83$, $\sigma_3 = 10.3$, $\sigma_4 = 5.23$.

Висновки

Робота є послідовним продовженням наукових досліджень з питань застосування теорії та методів розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин для задач ідентифікації мультистадійних (або мультизонних) динамічних систем. Алгоритм реконструкції систем звичайних диференціальних рівнянь з правими частинами, що перемикаються, розроблений на основі поєднання елементів теорії обернених задач, методів розв'язання задач оптимального керування і неперервних задач оптимального розбиття множин. Наведені та інші приклади розв'язання задач відновлення границь між зонами функціонування динамічних систем виду (6) свідчать про те, що якість реконструювання динамічної системи за допомогою алго-

ритму A залежить від сукупності початкових даних задачі, таких як: параметри $\tau_i = (a_1^i, a_2^i, b^i)$, що визначають функцію справа в диференціальному рівнянні, величина часового інтервалу \bar{T} , співвідношення коефіцієнтів γ_1, γ_2 , а також крок інтегрування системи (6) і кількість моментів часу, в яких спостерігається вихідна величина. Дослідження питань, пов'язаних з некоректністю постановки обернених задач для систем диференціальних рівнянь з правими частинами, що перемикаються, і засобами регуляризації таких задач, триває.

ЛІТЕРАТУРА

1. Муромцев Ю.Л. Моделирование и оптимизация технических систем при изменении состояний функционирования. / Ю.Л. Муромцев, Л.Н. Ляпин, О.В. Попова. – Воронеж: ВГУ, 1992. – 164 с.
2. Матвейкин В.Г. Теоретические основы энергосберегающего управления динамическими режимами установок производственно-технического назначения: монография. / В.Г. Матвейкин, Д.Ю. Муромцев. – М.: "Издательство Машиностроение-1", 2007. – 128 с.
3. Koriashkina L. One way to solve problems of multi-zone dynamics models identification / L. Koriashkina, A. Pravdivy, A. Cherevatenko // Power engineering control and information technologies in geotechnical systems. - CRC Press, 2014 – P. 153 - 160
4. Кісельова О.М. Ідентифікація динамічної системи з декількома режимами функціонування / О.М. Кісельова, Л.С. Коряшкіна, О.В. Правдивий // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2011. – С.141–150.