

В.П. Малайчук, И.И. Деревянко

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В ЗАДАЧАХ
ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ СЛОЖНЫХ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ**

Аннотация. Исследованы зависимости ошибок определения корреляционных коэффициентов модели α_1 и α_2 от длины выборки и времени корреляции модели. Построены графики минимальных, максимальных, средних оценок корреляционных коэффициентов модели и разбросы оценок.

Ключевые слова: модель измерений, корреляционные коэффициенты, длина выборки, кривые зависимостей, среднее, разбросы.

Постановка задачи

Не только дефектоскопия исследуемого объекта, но и оценка его качества является важной составляющей неразрушающего контроля. Корреляционные свойства сигнала являются характеристикой, которая описывает качественное состояние исследуемого объекта.

Измерения независимо от метода контроля можно представить в виде модели

$$x(k) = m(k)[S_0(k) + \Delta S(k) + A(k)] + n(k), \quad (1)$$

где $x(k)$ – выборка экспериментальных измерений; $S_0(k)$ – низкочастотный медленноменяющийся тренд, описывающий влияния внешней среды на качество; $\Delta S(k)$ – высокочастотный сигнал, описывающий влияние технологии изготовления на качество; $A(k)$ – аномальный дефектный участок; $m(k)$ – контактная модулирующая помеха; $n(k)$ – измерительный шум с плотностью распределения вероятностей Гаусса; k – порядковый номер измерения.

Каждая из составляющих несет информацию о состоянии объекта, при этом отличается одна от другой частотами, мощностями и корреляционными свойствами. Для получения подлинной информа-

ции о качестве объекта необходимо точно оценивать каждую из них, но использование метода определения функций корреляции приводит к ошибкам разной величины для каждой из составляющей.

Следовательно, возникает задача оценки точности определения корреляционной функции в условиях размерной, частотной и шумовой неопределенностей, для решения которой необходимо, путем компьютерного моделирования, разработать алгоритмы формирования этих последовательностей и провести вычислительные эксперименты.

Цель исследования - оценка точности определения корреляционной функции.

Алгоритм формирования стохастических случайных дискретных величин

Моделью коррелированных случайных сигналов, таких как $S_0(k)$ и $\Delta S(k)$, может служить последовательность Юла $U(k)$. Она формируется путем преобразования дискретного белого шума рекурсивным цифровым фильтром второго порядка [1]

$$U(k) = \alpha_1 U(k-1) - \alpha_2 U(k-2) + \beta \xi(k), \quad (2)$$

где $\xi(k)$ - дискретный белый шум; β - коэффициент усиления; α_1 и α_2 - корреляционные коэффициенты порядка.

Цифровая модель является аналогом описания непрерывных сигналов дифференцированными уравнениями второго порядка

$$\frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial U(t)}{\partial t} + a_2 U(t) = \beta \xi(t), \quad a_1 = 2\delta\omega_0, \quad a_2 = \omega_0^2, \quad (3)$$

где δ - коэффициент затухания; $\omega_0 = 2\pi f_0$ - резонансная частота фильтра второго порядка; f_0 - частота сигнала.

Если из сигнала $U(t)$ после аналогово-цифрового преобразования формируется дискретный сигнал $U(k)$, то

$$\alpha_1 = 2e^{-\delta\omega_0\Delta t} \cos(\sqrt{1 - \delta^2\omega_0\Delta t}), \quad \alpha_2 = e^{-2\delta\omega_0\Delta t}. \quad (4)$$

где Δt - шаг дискретизации измерений сигнала (параметр АЦП).

Автокорреляционная функция последовательности (2) описывается разностным уравнением

$$r(k) = \alpha_1 r(k-1) - \alpha_2 r(k-2), \quad (5)$$

где коэффициенты корреляции $r(1) = r_1$ и $r(2) = r_2$ равны

$$r_1 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}, \quad r_2 = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2(1 + \alpha_2)}{1 + \alpha_2}, \quad (6)$$

и связаны с корреляционными коэффициентами порядка α_1 и α_2 зависимостями Юла-Уокера

$$\alpha_1 = \frac{r_1(1 - r_2)}{1 - (r_1)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{r_2 - (r_1)^2}{1 - (r_1)^2}. \quad [2] \quad (7)$$

Рассмотрим примеры случайных дискретных величин, сформированных по данному алгоритму. На рисунке 1 изображены выборки сигналов Юла $U(k)$ с частотами $f1 = 100$ Гц, $f2 = 50$ Гц и $f3 = 25$ Гц, при этом шаг дискретизации $\Delta t = 0,0005$. Коэффициенты усиления β для различных частот выбирается так, чтоб амплитуды сигналов имели одинаковый масштаб.

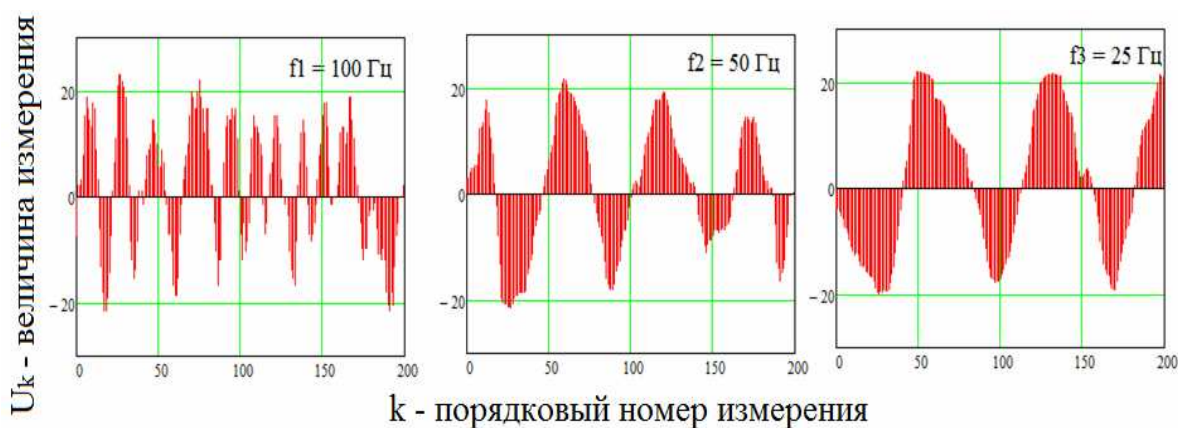


Рисунок 1 - Примеры исследуемых сигналов
при частотах 100, 50, 25 Гц

Результаты вычислительных экспериментов и их анализ

Предполагается, что при достижении участком определенной длины выборки n его корреляционные свойства и информативные параметры будут близки к свойствам и параметрам общей выборки

измерений. Это дает возможность определить имело ли место изменение свойств сигнала в заданном интервале времени. Возникает первая задача – исследование влияния размера выборки n на эффективность оценивания параметров модели α_1 и α_2 .

Теоретические результаты исследований и эффективность оценивания параметров определялись путём проведения вычислительных экспериментов. Для этого были сгенерированы выборки размерами n от 5 до 1000 измерений с частотой $f_1=100$ Гц и заданными коэффициентами α_1 и α_2 , затем данные коэффициенты оценивались. Количество повторений экспериментов по оцениванию параметров для выборок всех размерностей составляло 1000, затем результаты усреднялись.

Приведем таблицу зависимости точности определения коэффициентов α_1 и α_2 от количества измерений в исследуемой выборке. В таблице представлены теоретические значения коэффициентов α_1 и α_2 , их минимальные, максимальные, средние оценки и разбросы оценок при 1000 повторений экспериментов.

Таблица 1

Зависимость точности определения коэффициентов α_1 и α_2 от количества измерений в исследуемой выборке

α_1	α_2	n	$\min(\alpha_1^*)$	$\overline{\alpha_1^*}$	$\max(\alpha_1^*)$	$\sqrt{D(\alpha_1^*)}$	$\min(\alpha_2^*)$	$\overline{\alpha_2^*}$	$\max(\alpha_2^*)$	$\sqrt{D(\alpha_2^*)}$
1,562	0,641	5	0,058	0,831	1,562	0,847	0,043	0,641	1,262	0,298
		10	0,119	1,013	2,379	0,709	0,028	0,569	1,734	0,360
		25	0,760	1,426	2,535	0,390	0,069	0,657	1,968	0,369
		50	0,938	1,500	2,212	0,269	0,189	0,650	1,431	0,238
		75	1,118	1,541	1,978	0,208	0,239	0,652	1,222	0,193
		100	1,146	1,575	1,943	0,152	0,301	0,664	1,093	0,145
		150	1,252	1,566	1,815	0,123	0,326	0,630	0,857	0,109
		200	1,347	1,556	1,768	0,081	0,446	0,637	0,794	0,083
		250	1,234	1,560	1,734	0,080	0,424	0,636	0,782	0,075
		300	1,361	1,552	1,714	0,068	0,520	0,649	0,777	0,052
		400	1,415	1,566	1,670	0,048	0,526	0,637	0,740	0,047
		500	1,429	1,557	1,641	0,045	0,541	0,645	0,720	0,041
		750	1,436	1,562	1,634	0,042	0,551	0,644	0,701	0,038
1000	1,441	1,559	1,621	0,040	0,569	0,639	0,694	0,036		

Применим визуально-аналитический метод для анализа полученных результатов, представив данные из таблицы 1 в виде графиков.

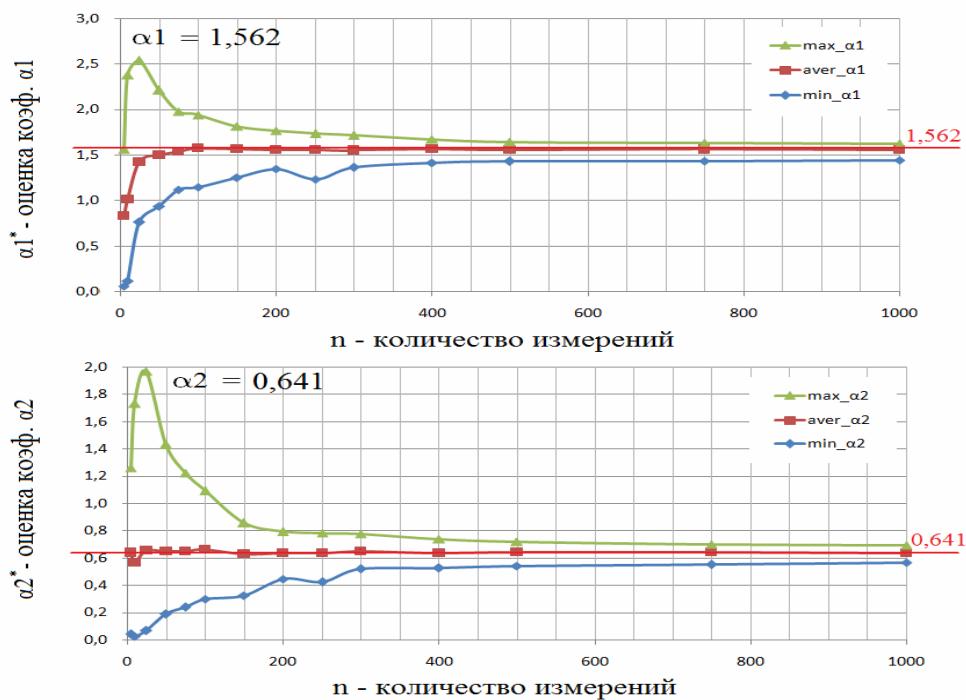


Рисунок 2 - Графики зависимостей нормированных коэффициентов модели от величины длины выборки

Из графики на рисунке 2 видно, что оптимальным количеством измерений входящих в исследуемый участок является $n=200$, так как дальнейшее увеличение количества измерений не приводит к существенному снижению ошибки метода. Также приведем график зависимости оценок дисперсии от количества измерений, входящих в исследуемый участок.

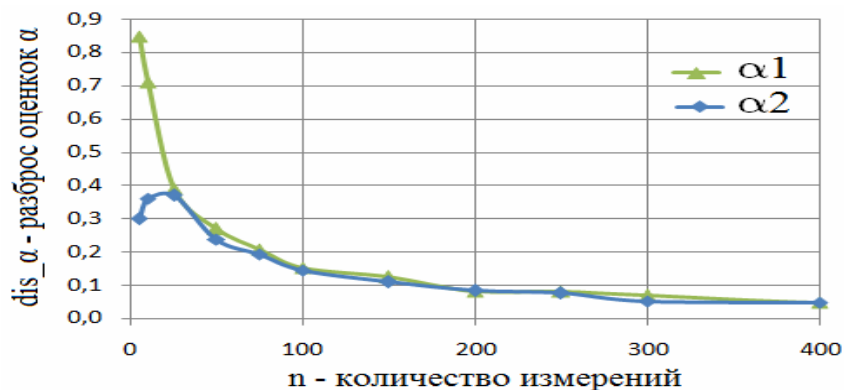


Рисунок 3 - Зависимость оценок дисперсии от количества измерений

Полученные значения дисперсий также указывают на то, что при количестве измерений $n = 200$ дисперсия оценок α_1^* и α_2^* достигает минимального значения, что позволяет установить оптимальную длину выборки.

Для визуализации полученных результатов, на рисунке 4 приведем сравнительные гистограммы оценок α_1^* при выборках разной длины, при этом предварительно нормируем полученные результаты по теоретическому значению α_1 . Для значений коэффициентов α_2 получаем аналогичные зависимости.

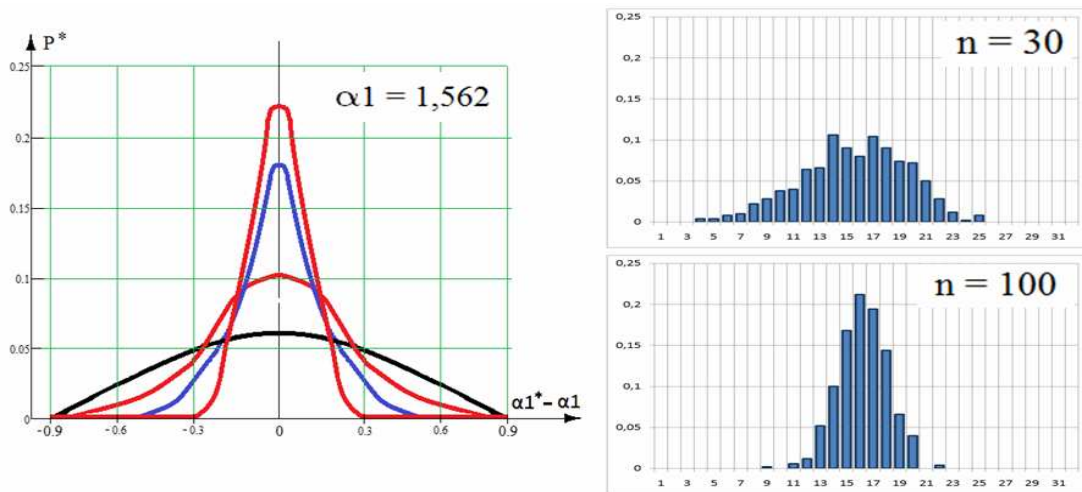


Рисунок 4 - Сравнительные гистограммы оценок α_1^* (нормированные по значению α_1)

при исследовании выборок разной длины $n=10, 30, 50, 100$

Также на рисунке 5 приведем проекции трехмерной гистограммы оценок α_1 от длины исследуемой выборки.

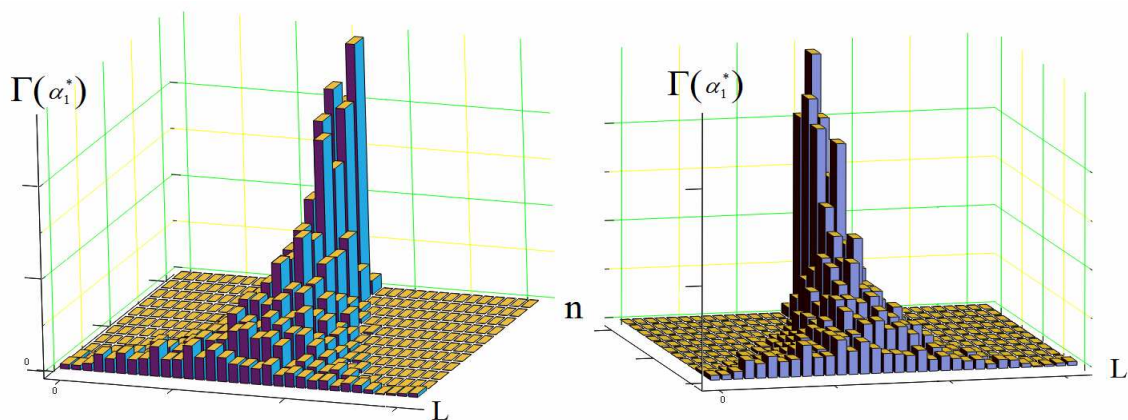


Рисунок 5 - Проекция трехмерной гистограммы оценок α_1^* от длины исследуемой выборки, где L – номер гистограммного интервала

Полагая, что составляющие модели (1) $S_0(k)$ и $\Delta S(k)$ имеют разные частотные характеристики, соответственно, для каждой из них необходимо оценивать корреляционные коэффициенты модели с минимальной ошибкой. Исходя из этого, возникает вторая задача – исследование точности определения коэффициентов модели α_1 и α_2 в зависимости от времени корреляции $\tau_0 = 1/f_0$.

Проведем вычислительный эксперимент, результатом которого будет оценка влияния частоты сигнала на точность определения информативных параметров. Для этого сгенерируем выборку измерений $n=200$ с заданными коэффициентами α_1 и α_2 , затем последовательно определим их значения при различных частотах f_0 от 1 до 200 Гц исследуемых сигналов.

Приведем таблицу зависимости точности определения коэффициентов α_1 и α_2 от частоты сигнала. В таблице представлены теоретические значения коэффициентов α_1 и α_2 , их минимальные, максимальные, средние оценки и разбросы оценок при 1000 повторений экспериментов.

Таблица 2

Зависимость точности определения коэффициентов α_1 и α_2 в зависимости от частоты исследуемой выборки

α_1	α_2	f_0	$\min(\alpha_1^*)$	$\overline{\alpha_1^*}$	$\max(\alpha_1^*)$	$\sqrt{D(\alpha_1^*)}$	$\min(\alpha_2^*)$	$\overline{\alpha_2^*}$	$\max(\alpha_2^*)$	$\sqrt{D(\alpha_2^*)}$
1,996	0,996	1	0,459	1,036	2,586	0,982	0,003	0,044	0,996	0,957
1,978	0,978	5	0,473	1,132	2,393	0,896	0,006	0,221	1,288	0,824
1,956	0,957	10	0,162	1,273	3,235	0,841	0,026	0,541	3,399	0,762
1,889	0,895	25	0,209	1,901	3,756	0,642	0,131	0,991	3,912	0,629
1,779	0,801	50	1,258	1,793	2,537	0,279	0,214	0,938	3,639	0,441
1,670	0,717	75	1,312	1,649	1,940	0,142	0,353	0,730	1,099	0,147
1,562	0,641	100	1,343	1,539	1,756	0,092	0,408	0,637	0,818	0,086
1,457	0,574	125	1,216	1,442	1,736	0,086	0,408	0,566	0,744	0,070
1,354	0,514	150	1,203	1,344	1,484	0,072	0,353	0,518	0,686	0,065
1,255	0,460	175	1,072	1,249	1,408	0,070	0,305	0,464	0,664	0,065
1,158	0,411	200	0,973	1,143	1,274	0,068	0,230	0,411	0,575	0,066

Применим визуально-аналитический метод, для визуализации полученных результатов, представив данные из таблицы 2 в виде графиков.

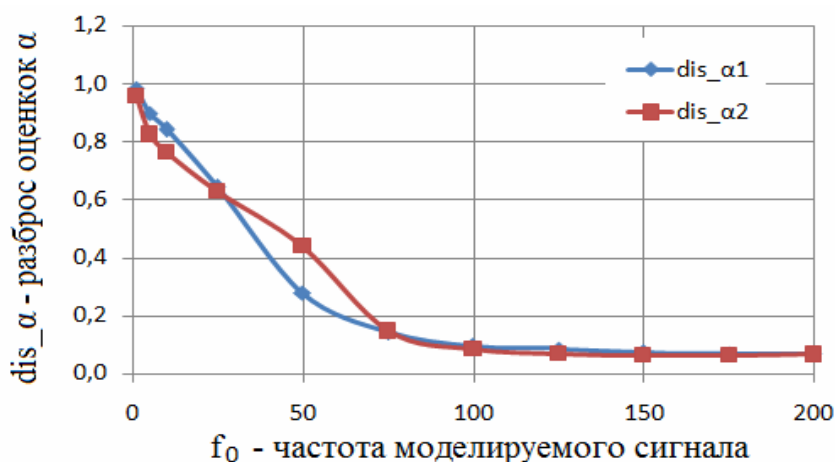


Рисунок 6 - Зависимость разброса оценок α_1^* и α_2^* от частоты моделируемого сигнала

Проанализировав график, представленный выше, можно сделать вывод, что оценки α_1^* и α_2^* наиболее точно можно определить при частотах от 75 Гц. Это объясняется тем, что при увеличении частоты исследуемого сигнала в заданный интервал времени попадает большее количество колебаний, что позволяет провести более точный статистический анализ.

Проведем следующий вычислительный эксперимент, результатом которого будет сравнение работоспособности метода определения коэффициентов α_1 и α_2 при частотах $f_1=100$ Гц, $f_2=50$ Гц и $f_3=25$ Гц с учетом количества измерений в выборке. Полученные результаты представим в виде визуально-аналитического графика, представленного на рисунке 7. Поскольку на рисунке проводятся нормированные данные по теоретическим значениям корреляционных коэффициентов модели, то наиболее точной оценкой найденных коэффициентов модели будет та, которая располагается в 0. На рисунке приведены результаты по коэффициенту α_1 , результаты по коэффициенту α_2 - аналогичны.

На рисунке хорошо видно, что точность определения коэффициентов модели зависит как от частоты генерируемого сигнала, так и от количества измерений в выборке. Чем выше частота сигнала и

больше число измерений, тем точнее полученная оценка информативных параметров.

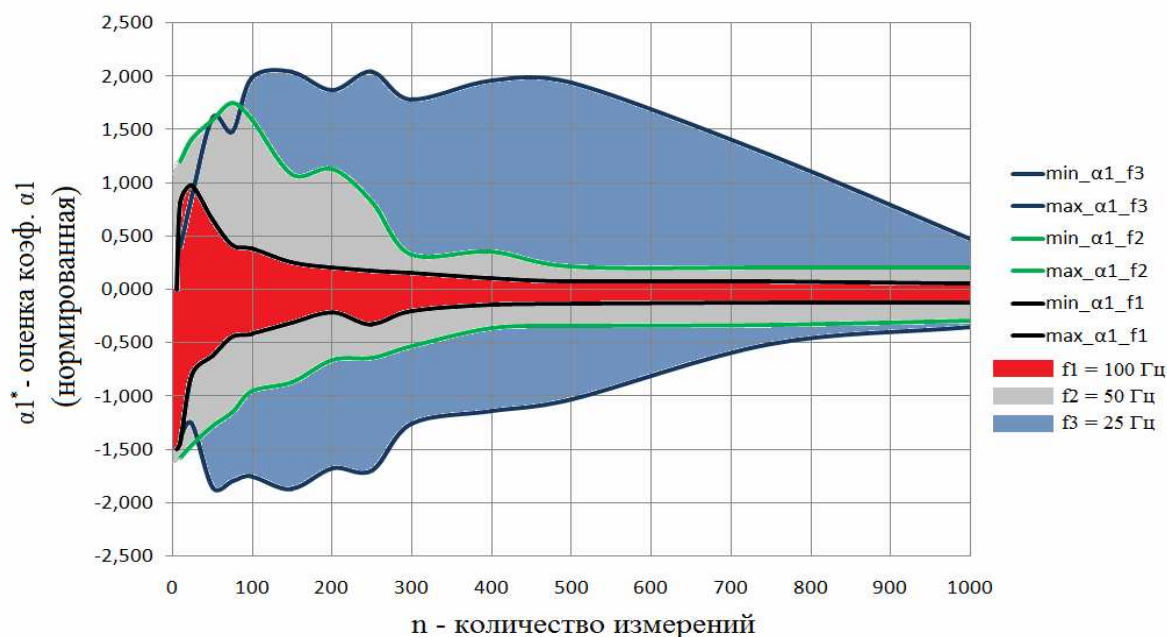


Рисунок 7 – График зависимости ошибок определения корреляционного коэффициента модели α_1 в зависимости от длины выборки и времени корреляции

Выводы

По результатам визуально-аналитического анализа графиков и гистограмм оценок измеряемых параметров и их статистических характеристик (средних значений и нормированных разбросов) можно сделать следующие выводы и рекомендации:

1) точность определения корреляционных коэффициентов модели сильно зависит от размерности исследуемого участка и частоты сигнала, причем, чем их значения выше – тем точнее полученные оценки информационных параметров.

2) рекомендуется выбирать размерность исследуемого участка $n = 200$ при $f_1 = 100$ Гц, $n = 300$ при $f_2 = 50$ Гц, $n = 1000$ при $f_3 = 25$ Гц, при шаге дискретизации $\Delta t = 0,0005$, так как при таком количестве измерений стохастические закономерности сохраняют свои корреляционные свойства и информационные параметры. Дальнейшее увеличение длины выборки – нецелесообразно.

3) исследования по определению коэффициентов α_1 и α_2 в условиях частотной неопределенности показали, что информативные параметры могут быть найдены с высокой точностью при условии, что частота исследуемого сигнала превышает или равна значению $f_0 = 75$ Гц без привлечения большого количества измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабак В.П. Стохастические сигналы и спектры / В.П. Бабак, А.Я. Белецкий, А.В. Приставка // Учебное пособие – К.: КИТ, 2004. – 290 с.
2. Малайчук В.П. Математическая дефектоскопия / В.П. Малайчук, А.В. Мозговой // Монография – Днепропетровск: Системные технологии, 2005. – 180 с.