

ОПТИМИЗАЦИЯ ТОПОЛОГИИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Аннотация. В статье рассмотрена задача полуопределенной оптимизации топологии стержневых конструкций и проблема общей устойчивости, которая, строго говоря,

с точки зрения математического программирования является невыпуклой задачей, и поэтому рассматривается в отдельном контексте.

Ключевые слова: топология, оптимизация, устойчивость, матрица жесткости.

Введение

Рациональная конструктивная схема, лежащая в основе стержневой системы, определяет, с одной стороны, соответствие техническим и эксплуатационным требованиям, а с другой – экономическую целесообразность и эффективность проекта. Согласно [1], до 73% стоимости конструкции составляют затраты на материалы, поэтому оптимальный расход последних является одним из важнейших пунктов при проектировании. Основу же оптимального проектирования стержневых систем составляет обширное семейство математических методов оптимизации – как аналитических, так и численных.

Так, в [2] авторы решают задачи оптимизации стержневых систем, пластин и оболочек, используя генетические алгоритмы. При этом учитываются такие свойства, как геометрическая неизменяемость системы, жесткость, прочность. В [3] оптимизация стержневой конструкции рассматривается как задача линейного программирования, а в [4, 5] – как задача выпуклого программирования. Все эти публикации объединяет то, что проблема общей устойчивости системы либо не рассматривается вообще, либо рассматривается в недостаточной мере. В [6] ограничение по устойчивости анализируется более подробно, при этом учитывается тот факт, что оценка устойчивости выходит за рамки выпуклой оптимизации, так как сами по себе алгоритмы проверки устойчивости приводят к функциям, которые не яв-

ляются выпуклыми, что нарушает общий подход к решению задачи и поиску оптимального в глобальном смысле решения. В свете сказанного представляется важным рассмотреть проблему выпуклой оптимизации топологии и определения устойчивости стержневой системы как две составляющие одной задачи.

Проблема устойчивости стержневой системы

На практике для стержней большой гибкости решение означенной проблемы состоит, как правило, в использовании формулы Эйлера:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu L)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{s^2}, \quad (1)$$

где E – модуль Юнга, J – момент инерции сечения, L – длина стержня, A – площадь сечения, μ – коэффициент приведения длины, s – гибкость.

Для стержней со средней гибкостью (участок II на рис. 1) применяют формулу Ясинского:

$$\sigma_{crit} = a - bs, \quad (2)$$

где коэффициенты a и b подбираются из таблиц в зависимости от типа материала и сечения. Стержни малой гибкости (участок III на рис. 1) проверяют не на устойчивость, а на прочность, как при простом сжатии.

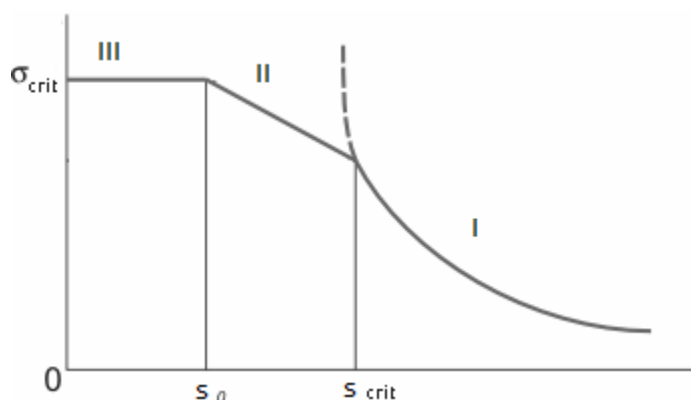


Рисунок 1 - Границы применимости формулы Эйлера (участок I)

Основная проблема при таком подходе состоит в поиске подходящего значения μ для каждого стержня в отдельности. Согласно [7], оно может колебаться в довольно значительных пределах, поэтому более рациональным представляется подход, основанный на применении метода конечных элементов.

Если каждый трехмерный стержень, который присутствует в конструкции, подчиняется классической теории Эйлера-Бернулли, то для него можно записать матрицу жесткости:

$$k = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 \\ \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GI_x}{L} & 0 & 0 \\ \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} \\ \text{Sym.} & & & & & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ & & & & & & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{L} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где G - модуль сдвига, I_x - полярный момент, I_y , I_z - моменты инерции сечения.

Матрица жесткости, которая учитывает нелинейные эффекты, возникающие при воздействии силы f на стержень, называется геометрической и имеет такой вид:

$$k_g = f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{-6}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{6}{5L} & 0 & \frac{-1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6}{5L} & 0 & \frac{-1}{10} & 0 \\ \frac{I_y + I_z}{AL} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-I_y + I_z}{AL} & 0 & 0 \\ \frac{2L}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{30} & 0 \\ \frac{2L}{15} & 0 & \frac{-1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{10} \\ \text{Sym.} & & & & & & \frac{6}{5L} & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ & & & & & & \frac{I_y + I_z}{AL} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{2L}{15} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{2L}{15} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Касательная матрица жесткости стержня является суммой (3) и (4):

$$k_i = k + k_g. \quad (5)$$

Стоит отметить, что матрица (5) задана в локальных координатах стержня, поэтому понадобится их приведение к общей - глобальной - координатной сетке. Данная процедура осуществляется с помощью трансформационной матрицы [8]:

$$T = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где t - матрица направляющих косинусов размером 3×3 . Она имеет следующий вид:

$$t = \begin{pmatrix} C_{Xx} & C_{Yx} & C_{Zx} \\ C_{Xy} & C_{Yy} & C_{Zy} \\ C_{Xz} & C_{Yz} & C_{Zz} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где нотация C_{Ab} представляет собой косинус угла между глобальной осью A и локальной осью b в трехмерном пространстве. С помощью (6) матрицу (5) можно трансформировать так:

$$K_i = T^T k_i T. \quad (8)$$

Таким образом для каждого стержня конструкции строится своя касательная матрица жесткости K_i . Из совокупности этих матриц с помощью специальной процедуры ("сборки") формируется касательная матрица жесткости конструкции K , которая, собственно, и используется для определения общей устойчивости. Для этого выполним LDL^T декомпозицию:

$$K = LDL^T, \quad (9)$$

где L - нижнетреугольная матрица, D - диагональная матрица. Тогда согласно [9] возможны такие ситуации:

1. $\forall i : D_{ii} > 0 \Rightarrow$ система находится в стабильном равновесии.
2. $\exists i : D_{ii} = 0 \Rightarrow$ система находится в безразличном равновесии.
3. $\exists i : D_{ii} < 0 \Rightarrow$ система находится в нестабильном равновесии.

С другой стороны, если $\det K = \prod D_{ii} < 0$, то система не находится в равновесном состоянии, т.е. неустойчива. Отсюда следует,

что, система будет устойчива при выполнении условия $D_{ii} > 0 \forall i$ (и, соответственно, $\det K > 0$).

Полуопределенная оптимизация топологии стержневой системы

Проблему оптимизации топологии стержневой конструкции можно записать в виде задачи полуопределенной оптимизации [4,6]:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize}_{w,v} W \\
 & \text{s.t.} \sum_{i=1}^m v_i \leq V \\
 & v_i \geq 0 \forall i = 1 \dots m \\
 & \begin{pmatrix} W & F^T \\ F & \sum_{i=1}^m \frac{E_i v_i}{L_i^2} a_i a_i^T \end{pmatrix} \geq 0
 \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь W представляет собой верхнюю оценку величины энергии упругой деформации стержневой системы; v_i - объемы стержней, количество которых равно m ; F - внешние силы, приложенные к n узлам конструкции; E - модули Юнга; L - длины стержней; a_i - i -й столбец матрицы уравнений системы A . Таким образом, оптимизационная задача сводится к поиску минимальной величины W при заданных ограничениях. Особую роль здесь играет переменная V - верхняя граница суммы объемов стержней, от которой, собственно, и зависит выполнение условий прочности и устойчивости. Если положить $V=1$, то решение представленной в таком виде задачи (10) позволяет определить топологию системы и получить соотношение между объемами стержней $v_1:v_2:\dots:v_m$. Тогда, итерационно увеличивая V , можно найти минимальный объем материала (и каждого стержня соответственно), при котором выполняются условия общей устойчивости и прочности. На рис. 2 представлена схема решения этой общей оптимизационной задачи.

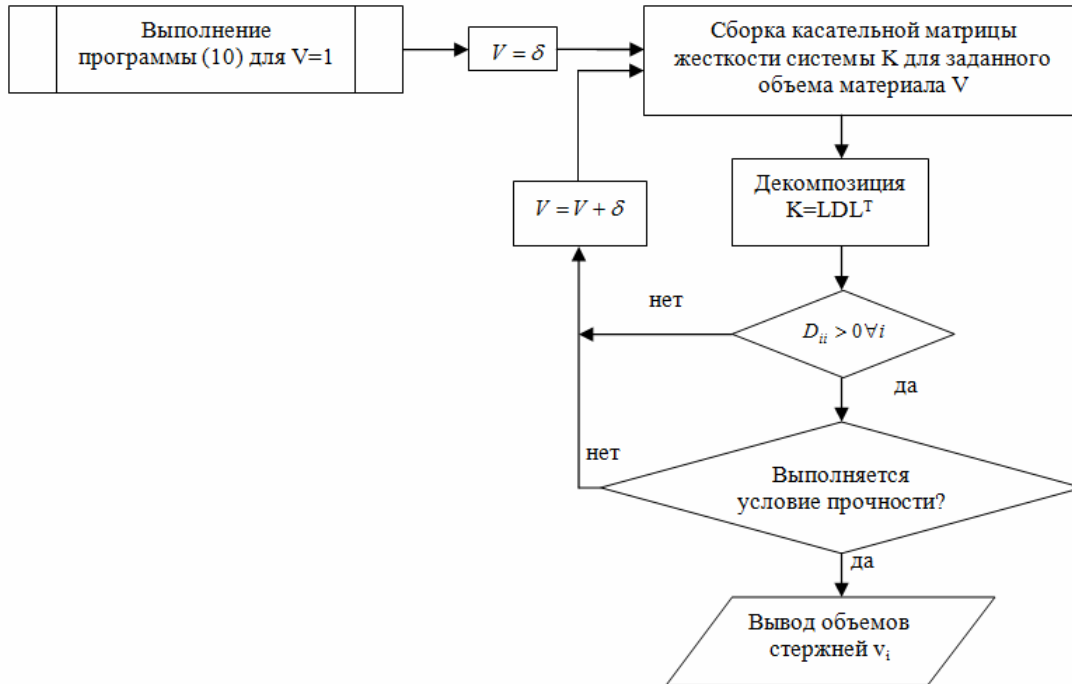


Рисунок 2 - Блок-схема решения общей оптимизационной задачи

Оптимальный дизайн фермы с учетом общей устойчивости

Рассмотрим конструкцию, полный граф которой изображен на рис.3. Узел 1 имеет шарнирно-неподвижную опору, узел 9 - шарнирно-подвижную. К узлам 4 и 8 приложены силы $|F|=10^5$ Н.

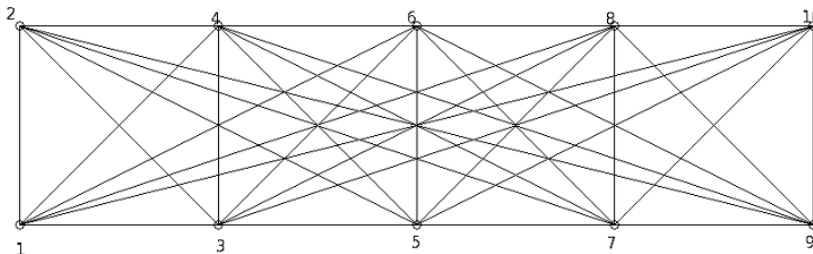


Рисунок 3 - Полный граф фермы

Таблица 1

Координаты вершин графа

Вершина	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ось X	0	0	3	3	6	6	9	9	12	12
Ось Y	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3

В таблице 1 приведены координаты вершин. При расчете модуль Юнга был принят равным $2 \cdot 10^{11}$ Па, модуль сдвига $7.81 \cdot 10^{10}$ Па, расчетное сопротивление материала $2.1 \cdot 10^8$ Па, коэффициент условий работы 0.9. При этом использовалась сечение "труба" с соот-

ношением внутреннего и внешнего диаметров $d/D=0.95$. При решении полуопределенной оптимизационной задачи в среде Matlab R2010b с использованием пакета CVX была получена топология, изображенная на рис. 4. Диаметры труб приведены в таблице 2.

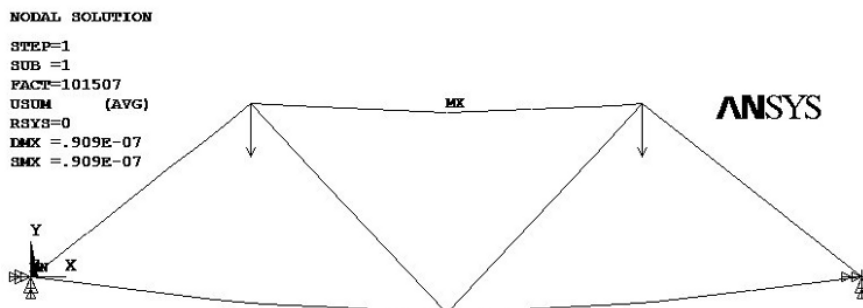


Рисунок 3 - Топология фермы

Таблица 2

Диаметры труб

Стержень	1-3	1-4	3-5	4-5	4-6	5-7	5-8	6-8	7-9	8-9
D, мм	123	146	123	98	116	123	98	116	123	146

Проверка полученной модели в программном комплексе ANSYS показала, что конструкция потеряет устойчивость, если в узлах 4 и 8 будут приложены силы больше чем 101507 Н; расчет же выполнялся, исходя из нагрузки в узлах в 100000Н. Таким образом, результаты решения оптимизационной задачи в Matlab хорошо согласуются с результатами проверки модели в ПК ANSYS.

Заключение

В статье рассмотрен вопрос поиска оптимальной топологии стержневой конструкции с использованием полуопределенной оптимизации. При этом преследовалась цель получить именно такое решение, которое бы отвечало условиям прочности и устойчивости. Для определения устойчивости вычислялась касательная матрица жесткости системы на основе полученного решения оптимизационной задачи с последующей LDL^T декомпозицией. Верификация результатов проводилась с использованием комплекса ANSYS.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленя Е. И., Гениев А. Н., Балдин В. А. Металлические конструкции. – М.: Стройиздат, 1985.
2. Серпик И. Н., Алексейцев А. В., Лелетко А. А. Генетические алгоритмы оптимизации металлических строительных конструкций. – Брянск: Изд-во БГИТА, 2010.
3. Takada T. Multiobjective optimization of truss topology by linear/sequential linear programming method. *Journal of Mechanical Engineering and Automation*. – 2012. - Vol. 2. – P. 585-593.
4. Ben-Tal A., Nemirovski A. Robust truss topology design via semidefinite programming. *SIAM Journal on optimization*. – 1997. - Vol. 7, no. 4. - P. 991-1016.
5. Yonekura K., Kanno Y. Global optimization of robust truss topology via mixed integer semidefinite programming. *Optimization and Engineering*. – 2010. – Vol. 11, no. 3. – P. 355-379.
6. Ben-Tal A., Jarre F., Kocvara M., Nemirovsky A., Zowe J. Optimal design of trusses under a nonconvex buckling constraint. *Optimization and Engineering*. – 2000. – Vol. 1, no. 2. – P. 189-213.
7. Arbabi F. *Structural Analysis and Behavior*. - New York: McGraw-Hill, 1991.
8. Kattan P. *Matlab Guide to Finite Elements*. Springer, 2008.
9. Wriggers P. *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer, 2008.