УДК 615.071

А.И. Михалев, А.А. Стенин, В.П. Пасько, М.А. Солдатова

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ НА БАЗЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЙ УОЛША

Аннотация. В статье для параметрической идентификации квазистационарных систем предлагается подход, основанный на совместном использовании сплайн-функций и функций Уолша. Алгоритм оценивания параметров линейной квазистационарной системы на каждом из интервалов постоянства параметров сводится к решению n систем линейных алгебраических уравнений. В силу приближенного задания коэффициентов матриц квазистационарной системы, устойчивое решение полученных систем линейных алгебраических уравнений обеспечивается методом регуляризации А.Н. Тихонова.

Ключевые слова: динамические системы, квазистационарность, сплайн-функции, функции Уолша, параметрическая идентификация, адаптивный алгоритм.

Введение

Большой интерес к теории оценивания возник в результате необходимости повышения качества функционирования технических систем, а также вследствие существенного изменения возможностей применения теории оценивания, связанного с огромными возможностями современных вычислительных машин [1,2]. В тоже время существующие методы идентификации зачастую либо вообще не применимы к системам с переменными параметрами, либо не дают возможности получить оценки в аналитическом виде, что очень важно при последующей оптимизации таких систем. С учетом последнего замечания в данной статье для параметрической идентификации квазистационарных систем предлагается подход, основанный на совместном использовании сплайн-функций и функций Уолша [3,4].

Постановка задачи

Для модели линейной динамической системы, описываемой системой дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{\overline{x}}(t) = A(t)\overline{x}(t) + B(t)\overline{u}(t),\ t \in \left[t_0, T_j\right] \quad (1)$$

где $\overline{x}(t)$ – n-мерный измеряемый вектор состояния; $\overline{u}(t)$ – m-мерный измеряемый вектор управления, а A(t) и B(t) – матрицы неизвестных параметров системы, размерности $n \times n$ и $n \times m$, соответственно, значения которых необходимо оценить.

Если параметры объекта изменяются достаточно медленно по сравнению с длительностью переходных процессов, вызванных изменением входных воздействий, то можно говорить о квазистационарности системы (1) Это означает, что на некоторых интервалах времени $\left[t_l, t_l + T_l\right] \in \left[t_0, T_f\right](l = \overline{1, L})$ параметры объекта остаются неизменными и коэффициенты уравнения (1) можно считать постоянными, т.е. $a_{ij}(T_l) = const$, $b_{ik}(T_l) = const$ $(i, j = \overline{1, n})(k = \overline{1, m})$. Здесь L – количество интервалов квазистационарности. Оценку параметров будем производить, исходя из минимума квадрата невязки:

$$I = \min\left\{\int_{t_0}^{t_0+T_f} \left[\dot{\overline{x}}(t) - A(t)\overline{x}(t) - B(t)\overline{u}(t)\right]^2 dt\right\} \quad (2)$$

Это позволяет при минимизации интегрального квадратичного критерия невязки (2) получить оценки искомых постоянных коэффициентов разложения в ряд Уолша неизвестных функций параметров $a_{ij}(t)$, $b_{ik}(t)$ путем решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

Решение задачи

Для квазистационарной системы вида (1) весь интервал наблюдения $[t_0, T_f]$ некоторым образом разбивается на подинтервалы $[t_l, t_l + T_l]$, где коэффициенты $a_{ij}(T_l), b_{ik}(T_l)(i, j = \overline{1, n}), (k = \overline{1, m})$ матриц $A(t), B(t)$ соответственно, можно считать неизменными. Идентификация осуществляется на каждом из интервалов постоянства параметров, при этом для последующего интервала заново оценивается матрица параметров, тогда как данные, не относящиеся к рассматриваемому подинтервалу, полностью игнорируются. Очевидно, что коэффициенты $a_{ij}(T_l), b_{ik}(T_l)(l = \overline{1, L})$ на отдельных подинтервалах могут быть различными. Для системы (1) при условии, что вектор управления $\overline{u}(t)$ задан, а вектор-функция состояния

$\overline{u}(t)$ определена на отрезке $[t_l, t_l + T_l]$ своими значениями $\overline{x}^{(i)} = \overline{x}(t_i), t_i \in [t_l, t_l + T_l] (i = \overline{0, N})$ задача идентификации состоит в нахождении оценок $\hat{a}^{\,l}_{ij} = \hat{a}_{ij}(T_l),\ \hat{b}^{\,l}_{ik} = \hat{b}_{ik}(T_l)(i, j = \overline{1, n}), (k = \overline{1, m})$ неизвестных параметров $a_{ij}(T_l),\ b_{ik}(T_l)$ матриц A(t) и B(t), обеспечивающих минимум квадратичного критерия (2) внутри рассматриваемого подинтервала $[t_l, t_l + T_l]$.

Применение в задачах идентификации функционала вида (2) предполагает наличие известного аналитического выражения как для вектора состояния $\overline{x}(t)$, так и для его производной $\dot{\overline{x}}(t)$. Используя кубические сплайны для интерполирования значений вектора $\overline{x}^{(i)}\ (i = \overline{0, N})$:

$$\hat{x}_1(t) \to S_1(t), \ldots, \hat{x}_i(t) \to S_i(t), \ldots, \hat{x}_n(t) \to S_n(t),$$

получаем аналитическое выражение для оценки $\hat{\overline{x}}(t)-$ вектор-функции состояния, осуществив таким образом переход от $\overline{x}(t_i)(i = \overline{0, N})$ к $\overline{S}(t)$, где $\overline{S}(t)$ – n-мерная вектор-функция, каждая составляющая $S_i(t)(i = \overline{1, n})$ которой является кубической сплайн-функцией [5]. В силу свойства дифференцируемости сплайнов определяем приближение ($\dot{x}_i(t) - \hat{x}_i(t)$) как производную от сплайна ($S_i(t) - \dot{S}_i(t)$). Тогда модель системы (1) примет вид:

$$\dot{S}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a^l_{ij} S_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b^l_{ik} u_k(t)\, (i = \overline{1, n}), t \in [t_{l,} t_l + T_l], \tag{3}$$

а интегральный квадратичный критерий невязки вида (2) системы (1) может быть представлен как:

$$Q_i(\overline{g}^i_l) = \int_{t_l}^{t_l + T_l} [\dot{S}_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a^l_{ij} S_j(t) - \sum_{k=1}^{m} b^l_{ik} u_k(t)]^2 dt\, (i = \overline{1, n}). \tag{4}$$

Используя необходимые условия минимума функционала (4), дифференцируем $Q_i\ (i = \overline{1, n})$ по элементам матриц $A(t)$ и $B(t)$ и приравниваем производные нулю:

$$\partial Q_i(\hat{\overline{g}}^{(i)}_l) / \partial \hat{a}^{\,l}_{ij} = 0, \partial Q_i(\hat{\overline{g}}^{(i)}_l) / \partial \hat{b}^{\,l}_{ik} = 0\, (j = \overline{1, n}), (k = \overline{1, m}).$$

Тогда для минимума Q_i невязки, получаем

$$\int_{t_l}^{t_l+T_l}[\dot{S}_i(t)-\sum_{j=1}^{n}\hat{a}_{ij}^{l}S_j(t)-\sum_{k=1}^{m}\hat{b}_{ik}^{l}u_k(t)][-S_j(t)]dt=0,$$

$$\int_{t_l}^{t_l+T_l}[\dot{S}_i(t)-\sum_{j=1}^{n}\hat{a}_{ij}^{l}S_j(t)-\sum_{k=1}^{m}\hat{b}_{ik}^{l}u_k(t)][-u_k(t)]dt=0,$$

$$(j=\overline{1,n}),(k=\overline{1,m}.)$$

После ряда преобразований для определения вектора оценок $\overline{\hat{g}}_l^{(i)}$ на подинтервале $[t_l,t_l+T_l]$ получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$C^{(i)}\overline{\hat{g}}_l^{(i)}=\overline{d}^{(i)}. \tag{5}$$

Здесь $C^{(i)}$ – матрица размерности $(n+m)\times(n+m)$, имеющая блочную структуру

$$C^{(i)}=\begin{bmatrix}C^{(i)}_{(n\times n)} & \vdots & C^{(i)}_{(n\times m)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ C^{(i)}_{(m\times n)} & \vdots & C^{(i)}_{(m\times m)}\end{bmatrix},$$

элементы которой определяются следующим образом:

$$C^{i}_{(n\times n)}=\{c^{(i)}_{i_1,j}\},c^{(i)}_{i_1,j}=\int_{t_l}^{t_l+T_l}S_{i_1}(t)S_j(t)dt, \tag{6}$$

$$C^{i}_{(n\times m)}=\{c^{(i)}_{i_1,k}\},c^{(i)}_{i_1,k}=\int_{t_l}^{t_l+T_l}S_{i_1}(t)u_k(t)dt, \tag{7}$$

$$C^{i}_{(m\times n)}=\{c^{(i)}_{kj}\},c^{(i)}_{kj}=\int_{t_l}^{t_l+T_l}u_k(t)S_j(t)dt, \tag{8}$$

$$C^{i}_{(m\times m)}=\{c^{(i)}_{i_2,k}\},c^{(i)}_{i_2,k}=\int_{t_l}^{t_l+T_l}u_{i_2}(t)u_k(t)dt; \tag{9}$$

$\overline{d}^{(i)T}=\{d_1^{(i)},...,d_n^{(i)},d_{n+1}^{(i)}...,d_{n+m}^{(i)}\}$ – $(n+m)$-мерный вектор свободных членов, элементы которого определяются следующим образом:

$$d^{(i)}_{l_1}=\int_{t_l}^{t_l+T_l}S_{l_1}(t)\dot{S}_i(t)dt\,(l_1=\overline{1,n}), \tag{10}$$

$$d^{(i)}_{l_2}=\int_{t_l}^{t_l+T_l}u_{l_2-n}(t)\dot{S}_i(t)dt\,(l_2=\overline{n+1,n+m}), \tag{11}$$

$\overline{\hat{g}}_l^{(i)}=\{\hat{a}_{i1}^{l},...,\hat{a}_{in}^{l},\hat{b}_{i1}^{l},...,\hat{b}_{n+m}^{l}\}$ – $(n+m)$-мерный вектор оценок неизвестных параметров на интервале квазистационарности $[t_l,t_l+T_l]$.

Заметим, что входные данные (коэффициенты матрицы и правой части) системы (5) определяются с погрешностью, зависящей от погрешности приближения состояния системы (3) сплайнами и аппроксимации соотношений (6) – (11) формулами численного интегрирования, которую всегда можно оценить. В силу приближенного задания коэффициентов матриц $C^{(i)}, \overline{d}^{(i)}$, устойчивое решение системы (5) может быть получено методом регуляризации А.Н. Тихонова [6].

Таким образом, алгоритм оценивания параметров линейной квазистационарной системы (3) сведен к решению n систем линейных алгебраических уравнений вида (5) на каждом из интервалов постоянства параметров T_l.

Перейдем к вопросу о выборе интервалов квазистационарности. Рассмотрим два способа разбиения интервала наблюдения $[t_0, T_f]$.

1. Алгоритм с фиксированным разбиением интервала. Такой метод эффективен при наличии некоторой априорной информации о динамике изменения неизвестных параметров во времени. В этом случае удается построить хорошее равномерное или неравномерное разбиение интервала. При выборе длительности интервала квазистационарности можно положить $T_l \ge t_{рег}$, где $t_{рег}$ – время переходного процесса.

2. Алгоритм с адаптивным выбором разбиения интервала. Текущую информацию о поведении системы (наблюдения состояния в некоторых точках) можно использовать для адаптивного выбора величина временных интервалов при кусочно-постоянной аппроксимации неизвестных параметров. Алгоритм строится следующим образом.

0 шаг. Пусть $l = 1$.

1 шаг. На интервале $[t_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)H}]$, где $t_{l+1}^{(i)H} = t_l^{(i)} + \delta_l, \delta_l > 0$ получена оценка $\hat{g}_l^{(i)}$ по приведенному алгоритму идентификации.

2 шаг. На интервале $[t_{l+1}^{(i)H}, t_{l+1}^{(i)'}]$, где $t_{l+1}^{(i)'} = t_l^{(i)H} + \eta_0 \delta_l$, по уравнениям состояния (1) с оценками $\hat{g}_l^{(i)}$ рассчитывается состояние модели $x_i^M(t)$, при этом полагаем $x_i^M(t_{l+1}^{(i)H}) = x_i(t_{l+1}^{(i)H})$.

3 шаг. В окрестности $[t_{l+1}^{(i)'} - \delta', t_{l+1}^{(i)'}] (\delta' < t_{l+1}^{(i)'} - t_{l+1}^{(i)H})$ интервала $[t_{l+1}^{(i)H}, t_{l+1}^{(i)'}]$ рассматривается функционал $I = 1/P \sum_{p=1}^{P} (x_i(t_p) - x_i^M(t_p))^2$.

Если:

$I > \varepsilon,$ где $\varepsilon > 0$, то параметр η_0 уменьшается, вводится параметр $\eta_1 = \mu\eta_0\,(0 < \mu < 1, \mu = const)$ и происходит переход к шагу 2. Если через m шагов $\eta_m = \mu^m \eta_0 \approx 0$, то переход к шагу 4.

$I \le \varepsilon.$ Условие (4) не выполнилось ни на одном из шагов, то формируется интервал $[t_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)'}]$, где принимается оценка $\overset{\frown}{g}_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)H} = t_{l+1}^{(i)'}$ и переход к шагу 2. В противном случае переход к шагу 4.

4 шаг. На интервале $[t_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)})$, где $t_{l+1}^{(i)} = t_{l+1}^{(i)'}$ принимается оценка $\overset{\frown}{g}_l^{(i)}\ (i = \overline{1,n})$.

5 шаг. Полагаем $l = l + 1$ и переход к шагу 1.

Алгоритм выполняется до тех пор, пока не будет проанализирован весь интервал наблюдения. Схема системы, реализующей алгоритм идентификации с адаптивным разбиением временного интервала показана на рис. 1.

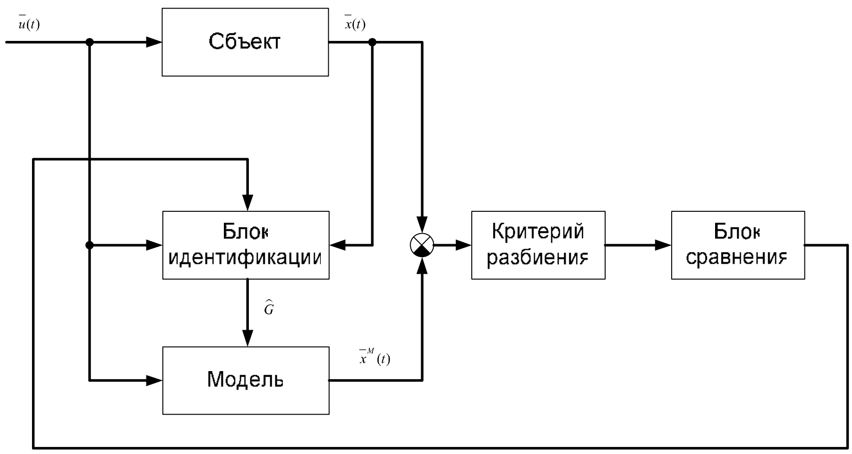

Рисунок 1 - Схема системы, реализующей алгоритм адаптивной идентификации

Для дальнейшего использования полученных оценок $\overset{\frown}{g}_l^{(i)}\ (i = \overline{1,n}), (l = \overline{1,L})$ в алгоритмах управления их удобно представить в виде

$$\hat{a}_{ij}(t) = \sum_{l=1}^{L} \hat{a}_{ij}^{(l)} \beta_i^{(l)}(t), \hat{b}_{ik}(t) = \sum \hat{b}_{ik}^{(l)} \beta_i^{(l)}(t),$$

ISSN 1562-9945

где $\hat{a}_{ij}^{(l)}, \hat{b}_{ik}^{(l)}$ – постоянные коэффициенты, полученные в результате алгоритма идентификации на интервале $[t_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)})$; $\beta_i^{(l)}(t)$ – известные функции, определяемые следующим образом:

$$\beta_i^{(l)}(t) = \begin{cases} 1, \text{если}\, t \in [t_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)}) \subset [t_0, T_f], \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В качестве примера рассмотрим задачу идентификации нестационарного объекта второго порядка

$$\dot{x}_1(t) = a_{12}(t) x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = b_2(t) u(t), \ t \in [0,100]$$

где $x_1(0) = 30,\ x_2(0) = 50,\ b_2(t) = 1,\ u(t) = -1$. Точное значение оцениваемого параметра $a_{12}(t) = 0{,}000012t^3 - 0{,}0014t^2 + 0{,}033t + 2$. Параметры алгоритмов разбиения временного интервала следующие: $L = 10; P = 5; \delta' = 1;\ \delta_l = 1\,\text{для всех}\, l;\quad \eta_0 = 10; \varepsilon = 0{,}2; \mu = 0{,}5.$ Результаты оценивания $\hat{a}_{12}(t)$ для фиксированного $(L = 10)$ и адаптивного разбиения интервала приводятся на рис.2, где кривая 1 – точное значение $a_{12}(t)$, кривая 2 – оценка $\hat{a}_{12}(t)$ при фиксированном разбиении; кривая 3 – оценка $\hat{a}_{12}(t)$ при адаптивном разбиении.

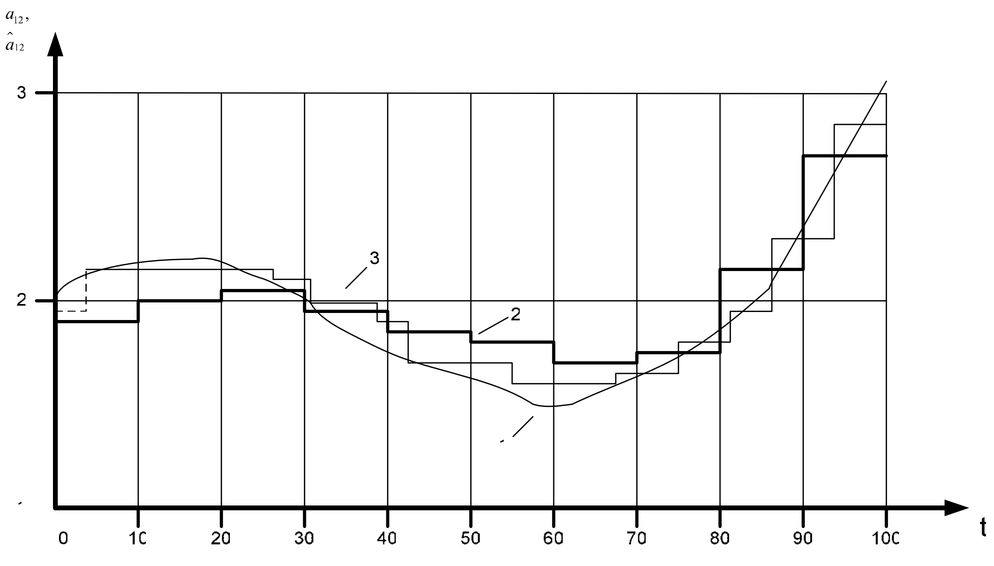

Рисунок 2 - Результаты моделирования алгоритма адаптивного оценивания

Точность оценки параметра $a_{12}(t)$ характеризуется величиной:

$$\delta^2 = \sum_{m=0}^{M} [\delta \hat{a}_{12}(t_m)]^2 / \sum_{m=0}^{M} [a_{12}(t_m)]^2.$$

Сравнение оценок, полученных при фиксированном и адаптивном разбиении временного интервала, для рассмотренного примера позволяет сделать вывод, что точность оценки параметра $a_{12}(t)$ может быть существенно повышена при использовании алгоритма с адаптивным выбором интервала квазистационарности.

Выводы

Использование предложенного в данной статье подхода к параметрической идентификации нестационарных систем, основанного на совместном использовании сплайн-функций и функций Уолша, позволяет получить оценки неизвестных параметров в аналитическом виде, что является одним из необходимых условий при оптимизации таких систем. Практическая реализация данного подхода показана на примере квазистационарной системы. Для увеличения точности оценки предложен адаптивный алгоритм разбиения интервала наблюдения. Данный подход может быть обобщен на линейные динамические системы с распределенными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир. – 1975. – 684с.
2. Новоселов О. Н. Идентификация и анализ динамических систем: Монография. 2-е изд. испр. и доп. — М.: Изд. Моск. гос. ун-та леса, 2007. — 316 с.
3. Chen C. F., Hsiao C. H. Walsh series analysis in optimal control // Int. g. Control.– 1979. – v.21.–p.p.881-897c
4. Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. — М.: Наука, 1989.
5. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985, 304 с.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. – 1986. – 288с.

 ISSN 1562-9945