УДК 624.04+519.6

А.Е. Кучеренко

ОПТИМИЗАЦИИ ТОПОЛОГИИ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ БУТСТРЭП ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

Аннотация. В статье рассмотрено решение задачи выпуклой оптимизации топологии стержневой системы для случая, когда силы, воздействующие на конструкцию, заданы в виде статистических распределений, Предложенный метод позволяет определить доверительный интервал с заданным уровнем значимости для каждого рассчитываемого параметра системы.

Ключевые слова: топология, оптимизация, бутстрэп, распределение.

Введение

Рациональная схема любой системы во многом определяет ее эффективность и целесообразность - как с инженерной, так и с экономической точки зрения. Учитывая тот факт, что значительная доля расходов при строительстве приходится, как правило, на материалы [1], методы, позволяющие снизить их потребление при сохранении необходимых параметров, обеспечивающих выполнение технических требований к конструкции, являются важным пунктом на этапе проектирования.

Понятие «оптимизация» само по себе поднимает сразу множество вопросов, связанных с необходимостью одновременного выполнения противоречащих друг другу задач. Так, снижение веса конструкции зачастую сопровождается и снижением ее прочностных характеристик, что является нежелательным следствием. Более того, часто невозможно точно определить нагрузки, которым будет подвергаться конструкция, и при определении параметров такой системы нет единой стратегии.

Сами же методы оптимизации отличаются крайним разнообразием в своей реализации [2], и универсального похода при решении комплексной оптимизационной задачи не существует. Так, в работах [3, 4] авторы успешно применяют генетические алгоритмы для оптимизации стержневых конструкций. А в [5, 6, 7] задача оптими-

 ISSN 1562-9945

зации стержневой системы представлена в виде выпуклой полуопределенной задачи математического программирования, которая имеет определенное преимущество перед другими формами - прежде всего, в эффективном вычислительном алгоритме, что позволяет решать проблемы большой размерности (в отличие от генетических алгоритмов, известных своей ресурсоемкостью).

Еще одна проблема, вскользь упомянутая выше, возникает, если неизвестны точные значения сил, воздействующих на конструкцию. Часто в такой ситуации используют либо средние значения, либо максимальные, что не может не сказаться на качестве решения. В этой статье предлагается подход, основанный на применении статистического бутстрэпа, который позволяет вычислить значения параметров стержневой системы с заданным уровнем статистической значимости. Сам же базовый метод оптимизации топологии стержневой системы основан на выпуклой - полуопределенной - форме оптимизационной задачи [8].

Выпуклая оптимизация топологии стержневой системы

Задачу оптимизации топологии стержневой системы в полуопределенной форме можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&minimize_{W,v} W \\
&s.t. \sum_{i=1}^{m} v_i \le V \\
&v_i \ge 0 \forall i = 1...m \\
&\begin{pmatrix} W & F^T \\ F & \sum_{i=1}^{m} \dfrac{E_i v_i}{L_i^2} a_i a_i^T \end{pmatrix} \ge 0
\end{aligned} \quad . \qquad (1)$$

Тут W представляет собой верхнюю оценку величины энергии упругой деформации стержневой системы; v_i - объемы стержней, количество которых равно m; F - внешние силы, приложенные к узлам конструкции; E - модули Юнга; L - длины стержней; a_i - i-й столбец матрицы уравнений системы A. Таким образом, оптимизационная задача сводится к поиску минимальной величины W при заданных ограничениях. Для простоты заранее условимся не рассматривать проблему устойчивости стержневой системы.

Очевидно, что форма записи оптимизационной задачи (1) пригодна для случая с точно определенными значениями внешних сил

F. Вместе с тем, во многих случаях внешние силы имеют вероятностную природу и требуют учета этой особенности при решении соответствующих задач. Например, сила, действующая на конструкцию, может быть задана в виде теоретической функции распределения (например, нормального) или же эмпирической функции распределения (рис. 1), построенного по выборке из наблюдений. В таком случае решение оптимизационной задачи (1) не может быть получено напрямую; более того, так как нас интересует не только топология проектируемой системы, но и параметры стержней, из которых она состоит, при наличии вероятностного компонента в исходных данных эти параметры также должны быть представлены в виде, допускающем вероятностную трактовку результата - например, в виде доверительного интервала с заданным уровнем значимости.

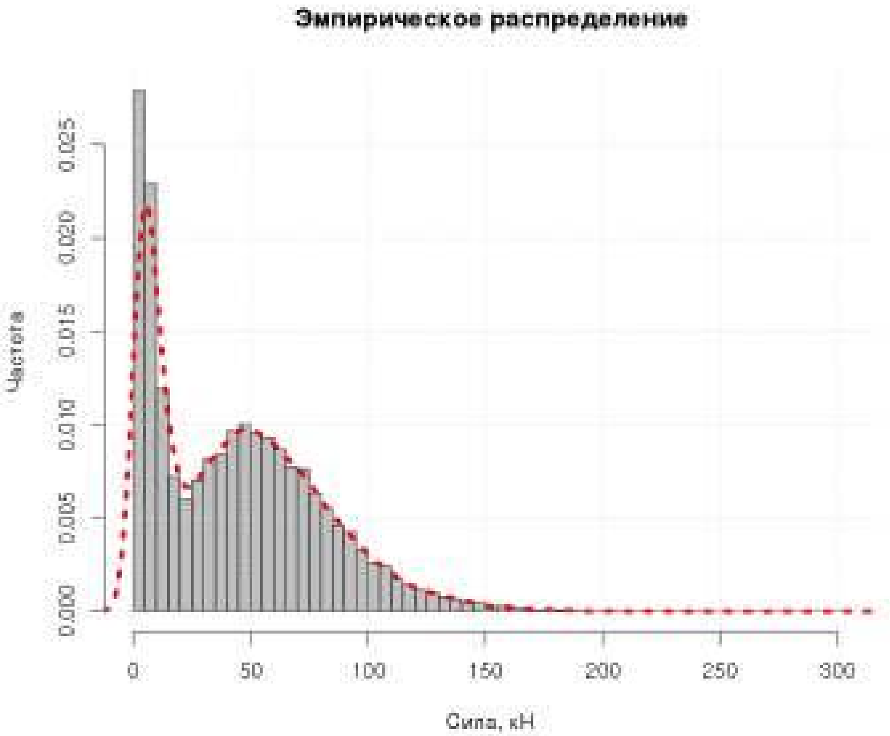

Рисунок 1 - Эмпирическая функция распределения нагрузки

Решение оптимизационной задачи осложняет и тот факт, что даже если и известны теоретические функции распределения внешних сил, воздействующих на стержневую систему, определение функций распределения параметров стержней остается нетривиальной задачей. Кроме того, сам поиск доверительного интервала для каждого вычисленного параметра существенно усложняется в случаях, когда теоретическое или эмпирическое распределение этого параметра не является нормальным (например, является мультимодальным), что не

 ISSN 1562-9945

позволяет использовать стандартный подход на основе распределения Стьюдента.

В данной ситуации для решения проблемы более всего подходит широко распространенная в статистике техника, известная как бутстрэп - «метод исследования распределения статистик вероятностных распределений, основанный на многократной генерации выборок методом Монте-Карло на базе имеющейся выборки» [9]. Такой подход позволит оценить различные параметры распределений исследуемых параметров стержневой системы - доверительные интервалы, дисперсии, другие моменты случайных величин.

В свете сказанного решение оптимизационной задачи (1) с использованием статистического бутстрэпа естественным образом разбивается на три этапа:

1. Сэмплирование из распределений, т.е. выбор случайных значений нагрузок из каждого изначально заданного распределения.
2. Решение оптимизационной задачи (1) для каждого набора случайно выбранных значений.
3. Формирование эмпирических распределений рассчитываемых параметров стержневой системы, использование бутстрэпа для определения доверительных интервалов с заданным уровнем значимости.

Оптимальный дизайн простейшей фермы для случая с нагрузкой, распределенной по нормальному закону

Рассмотрим простейшую конструкцию, полный граф которой изображен на рис.2. Узел 1 имеет шарнирно-неподвижную опору, узел 5 - шарнирноподвижную. К узлу 4 приложена направленная вниз сила F, распределенная по нормальному закону со средним значением 10^5Н и среднеквадратическим отклонением равным $5*10^3$Н (рис. 3).

В таблице 1 приведены координаты узлов стержневой системы. При расчете модуль Юнга был принят равным $2*10^{11}$ Па, модуль сдвига $7.81*10^{10}$ Па, расчетное сопротивление материала $2.1*10^8$ Па, коэффициент условий работы 0.9. При этом для упрощения примера использовалась сечение "круг". При решении оптимизационной задачи в среде Matlab с использованием пакета CVX [10] была получена топология, изображенная на рис. 4.

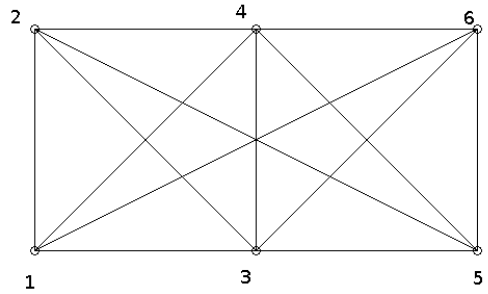

Рисунок 2 - Полный граф-прототип фермы

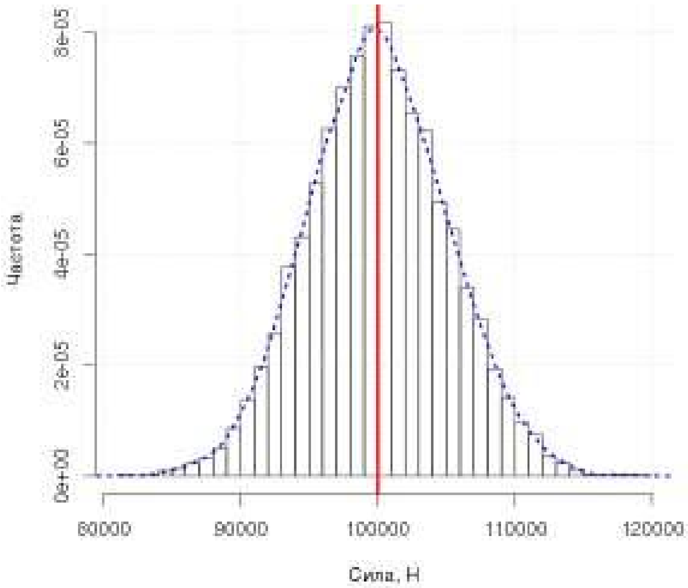

Рисунок 3 - Функция распределение силы, приложенной к узлу 4

Таблица 1

Координаты вершин графа

Вершина	1	2	3	4	5	6
Ось X	0	0	3	3	6	6
Ось Y	0	3	0	3	0	3

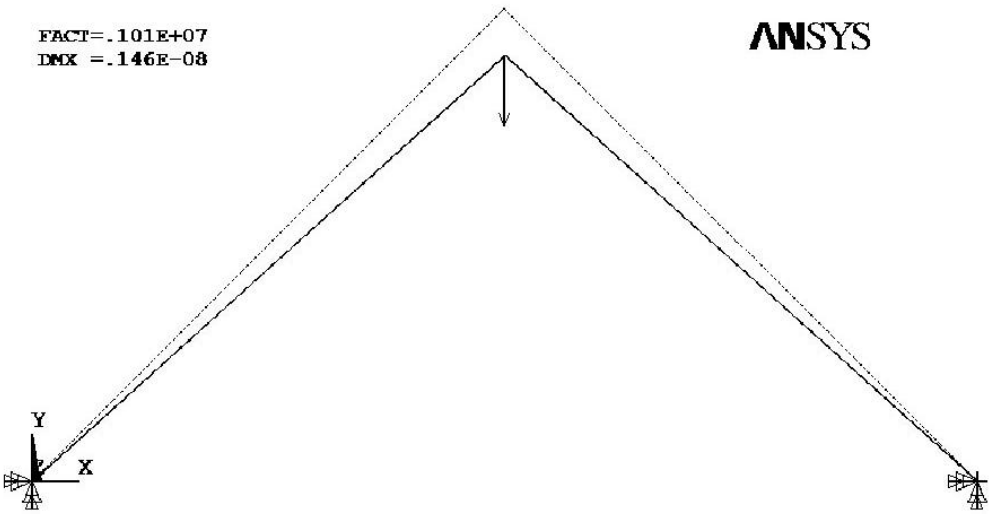

Рисунок 4 - Оптимальный граф простейшей фермы

ISSN 1562-9945

Так как конструкция симметричная, то стержни 1-4 и 4-5 будут иметь одинаковые характеристики сечения. На рис. 5 представлена эмпирическая функция распределения площади сечения стержней 1-4 и 4-5. Полученный с помощью статистического бутстрапа 95% доверительный интервал для площади сечения равен [3.78, 3.84]*10^{-4} $м^2$ (отмечен вертикальными линиями на рис. 5) со средним значением 3.81*10^{-4} $м^2$ и среднеквадратическим отклонением 1.89*10^{-5} $м^2$.

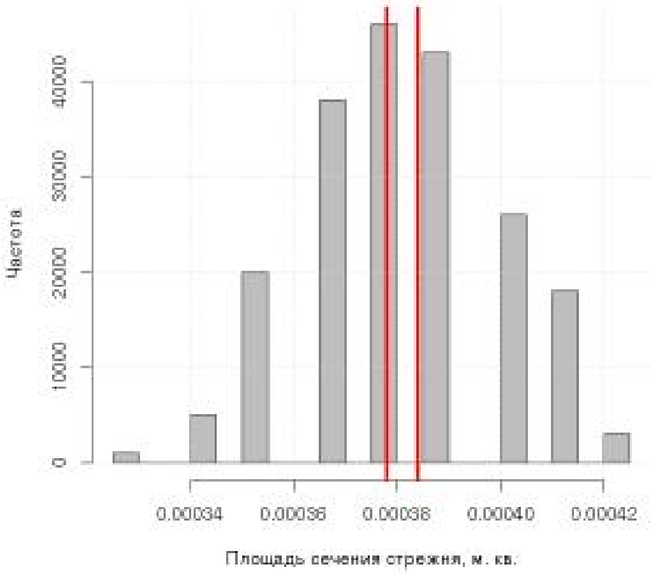

Рисунок 5 - Эмпирическая функция распределения площади сечения стержня

Заключение

В статье рассмотрен вопрос поиска оптимальной топологии стержневой системы с использованием полуопределенной оптимизации. При этом анализировался такой случай, при котором внешние силы, воздействующие на конструкцию, заданы в виде статистического распределения. Использование сэмплирования и бутстрэпа позволяет определить доверительные интервалы с заданным уровнем значимости для рассчитываемых параметров стержневой системы. Моделирование проводилось в среде Matlab с использованием пакета CVX.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленя Е. И., Гениев А. Н., Балдин В. А. Металлические конструкции. – М.: Стройиздат, 1985.
2. Валуйских В.П. Статистические методы оптимального проектирования конструкций. - Владимир: Владим. гос. ун-т, 2001. - 156 с.
3. Серпик И. Н., Алексейцев А. В., Лелетко А. А. Генетические алгоритмы оптимизации металлических строительных конструкций. – Брянск: Изд-во БГИТА, 2010.
4. Woon, S. Y. Structural application of a shape optimization method based on genetic algorithm // Struct. Multidiscip. Optim. - 2001. - Vol. 22, no. 1. - P. 57-64.
5. Ben-Tal A., Nemirovski A. Robust truss topology design via semidefinite programming. SIAM Journal on optimization. – 1997. - Vol. 7, no. 4. - P. 991-1016.
6. M. Ohsaki, K. Fujisawa, N. Katoh. Semi-defnite programming for topology optimization of trusses under multiple eigenvalue constraints. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. - 1999. - Vol. 180, no. 1-2. - P. 203-217.
7. Кучеренко А.Е. Оптимизация топологии стержневых систем и их устойчивость // Системные технологии. Регональний межвузовский зборник научных работ. - Выпуск 4(99). - Днепропетровск, 2015. - С.23-30.
8. Bendsoe M. P., Sigmund O. Topology Optimization: theory, methods and applications. - Berlin: Springer, 2003. - 370 p.
9. https://uk.wikipedia.org/wiki/Статистичний_бутстреп
10. Michael Grant and Stephen Boyd. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0 beta. http://cvxr.com/cvx, September 2013.

 ISSN 1562-9945