УДК 536.24

М.Г. Бердник

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛООБМІНУ РІДИНИ НА ГІДРОДИНАМІЧЕСКІ ПОЧАТКОВІЙ ДІЛЯНЦІ

Анотація. Знайдено температурне поле рідини, яка обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ на гідродинаміческі початковій ділянці у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є .

Ключові слова: інтегральні перетворення Ханкеля, Лапласа, Фур'є, число Пекле, функція Бесселя, трансцендентне рівняння

Вступ. Як показує огляд літератури теплообмін в рідинах, які обертаються, вивчений в даний час ще недостатньо [1,2]. Показано, що чисельні методи дослідження нестаціонарних неосесиметричних задач теплообміну рідин, які обертаються, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання [3].

Так доводиться [3], що умови стійкості обчислень в методі кінцевих елементів і методі кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестаціонарних неосесиметричних температурних полів рідин, які обертаються, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд:

$$1-2\frac{\Delta F_o}{\Delta\varphi^2}\geq 0 \text{ і } \frac{1}{\Delta\varphi}-\frac{Pd}{2}\geq 0,$$

де F_0 – критерій Фур'є, Pd – критерій Предводітелева.

Якщо $Pd=10^5$, що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра $\omega=1{,}671\,сек^{-1}$ радіусом 100 мм, змінні $\Delta\varphi$ и ΔF_o повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta\varphi\leq 2\,10^{-5} \quad \text{і} \qquad \Delta F_o\leq 2\,10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови Bi = 5 (Bi – критерій Біо) час необхідний для того, щоб температура досягла 90%

стаціонарного стану, дорівнює $Fo \approx 0.025$. Це означає, що потрібно принаймні здійснити $1.3 \cdot 10^8$ операцій по часу для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури.

Більше того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити $3.14 \cdot 10^5$ обчислень, так як внутрішній стан у кільці характеризується $3.14 \cdot 10^5$ точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату видається нереальним.

Тому для вирішення крайових задач, які виникають при математичному моделюванні тривимірних нестаціонарних процесів теплообміну в циліндрах і рідинах, які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

Метою роботи є розробка тривимірної математичної моделі температурних розподілів у рідини, яка обертається, з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ на гідродинамічеські початковій ділянці у вигляді крайової задачі математичної фізики для рівняння теплопровідності, та розв'язання отриманої крайової задачі, розв'язки якої використовуються під час керування температурними полями.

Основна частина. Розглянемо розрахунок нестаціонарного неосесиметричного температурного поля рідини, яка обертається, з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ на гідродинамічеські початковій ділянці циліндра без урахування осьової теплопровідності, тобто $Pe > 100$, а $Pr \ll 1$. Рух рідини в напрямку осі OZ відбувається

з постійною швидкістю V. Теплофізичні властивості рідини не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура рідини постійна G_0, а на поверхні рідини температура не залежить від часу $G(\varphi, z)$.

Математично задача визначення температурного поля рідини $T(\rho, \varphi, z, t)$ складається з інтегрування диференціального рівняння теплопровідності в циліндричній системи координат (ρ, φ, z) в області $D = \{(\rho, \varphi, z, t) | \rho \in (0,1), \varphi \in (0,2\pi), \mathrm{z} \in (0,\infty), \mathrm{t} \in (0,\infty)\}$, що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Pd \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + Pe_f \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{z}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2}, \qquad (1)$$

 ISSN 1562-9945

з початковою і граничними умовами, відповідно

$$\theta(\rho,\varphi,z,0)=0,\ \theta(1,\varphi,z,t)=V(\varphi,z),\ \theta(\rho,\varphi,0,t)=0 \qquad (2)$$

де $\theta(\rho,\varphi,z,t)=\dfrac{T(\rho,\varphi,z,t)-G_0}{T_{\max}-G_0}$ – відносна температура рідини; $T_{\max}=\max\limits_{\varphi,z}\{G(\varphi,z)\}$; $\rho=\dfrac{r}{R}$; R – радіус циліндра; c– питома теплоємність; γ – щільність середовища; λ – коефіцієнт теплопроводності; μ – коефіцієнт в'язкості; $a=\dfrac{\lambda}{c\gamma}$ – коефіцієнт температуропровідності; $Pd=\dfrac{\omega\cdot R^2}{a}$ – критерій Предводітелева; $Fo=\dfrac{a\cdot t}{R^2}$ – критерій Фур'є; $\Pr=\dfrac{c\cdot\mu}{\lambda}$ – число Прандля ; $Pe=\dfrac{V\cdot R}{a}$ – число Пекле; $Pe_f=Pe\cdot R$; $V(\varphi,z)=\dfrac{G(\varphi,z)-G_0}{T_{\max}-G_0}$; $V(\varphi,z)\in \mathrm{C}(\mathrm{D})$.

Тоді рішення крайової задачі (1)-(2) $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ є двічі диференційованим по ρ,z і φ, один раз по t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [4], тобто $\theta(\rho,\varphi,z,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\overline{D})$, а функції $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ і $V(\varphi,z)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [5]:

$$\begin{Bmatrix}\theta(\rho,\varphi,z,t)\\ V(\varphi,z)\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\theta_n(\rho,z,t)\\ V_n(z)\end{Bmatrix}\cdot\exp(in\varphi), \qquad (3)$$

де $\theta_n(\rho,z,t)=\theta_n^{(1)}(\rho,z,t)+i\theta_n^{(2)}(\rho,z,t)$, $\mathrm{V_n}(z)=V_n^{(1)}(z)+i\,\mathrm{V_n^{(2)}(z)}$, i – уявна одиниця.

З огляду на те, що $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ функція дійсна, обмежимося надалі розглядом $\theta_n(\rho,z,t)$ для n=0,1,2,...,тому що $\theta_n(\rho,z,t)$ і $\theta_{-n}(\rho,z,t)$ будуть комплексно спряженими [5]. Підставляючи значення функцій з (3) у (1) та (2) одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial Fo}+\vartheta_n^{(i)}\theta_n^{(m_i)}+Pe_f\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial \mathrm{z}}=\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\theta_n^{(i)} \qquad (4)$$

з початковими і граничними умовами, відповідно

$$\theta_n^{(i)}(\rho,z,0)=0,\ \theta_n^{(i)}(1,z,Fo)=V_n^{(i)}(z),\ \theta_n^{(i)}(\rho,0,Fo)=0 \qquad (5)$$

де $\vartheta_n^{(1)}=-Pd\cdot n;\quad \vartheta_n^2=Pd\cdot n;\quad \mathrm{m_1}=2;\quad \mathrm{m_2}=1;\quad$ i=1,2.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (4) із початковими і граничними умовами (5) інтегральне перетворення Ханкеля [4]:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \int_0^1 \rho\, \mathrm{f}(\rho) J_n(\mu_{n,k}) d\rho,$$

де $J_n(x)$ – функція Бесселя 1-го роду n-го порядку; $\mu_{n,k}$ – корні трансцендентного рівняння $J_n(\mu_{n,k}) = 0$, які можна знайти за формулою [6]:

$$\mu_{n,k} = \beta - \frac{m-1}{8\beta} - \frac{4(m-1)(7m-31)}{3(8\beta)^3} - \frac{32(m-1)(83m^2 - 982m + 3779)}{15(18\beta)^5} -$$
$$- \frac{64(m-1)(6949m^3 - 15385m^2 + 1585743m - 6277237)}{105(8\beta)^7},$$

де $\beta = \frac{1}{4}\pi(2n + 4k - 1)$, $\mathrm{m} = 4\mathrm{n}^2$, а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(\rho) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{n,k}\rho)}{[J'_n(\mu_{n,k})]^2} \bar{f}(\mu_{n,k}). \quad (6)$$

У результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial\, Fo} + \vartheta_n^{(i)} \bar{\theta}_n^{(m_i)} + Pe_f \frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial\, \mathrm{z}} = \mu_{n,k} J'_n(\mu_{n,k})\, V_n^{(i)}(\mathrm{z}) - \mu_{n,k}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} \quad (7)$$

з початковими та граничними умовами

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(z,0) = 0, \; \bar{\theta}_n^{(i)}(0,t) = 0, \; (\mathrm{i}=1,2). \quad (8)$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (7) з початковими умовами і граничними умовами (8) інтегральне перетворення Лапласа за змінною $z^* = \frac{z}{Pe_f}$ і Fo [4]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau}\, \mathrm{d}\tau, \quad (9)$$

а також застосовуючи формули оберненого перетворення Лапласа [4] в результаті одержуємо:

$$\bar{\theta}_n^{(i)}\left(\mu_{n,k}, z^*, t\right) = \left\langle \int_0^{Fo} \exp\left(\mu^2{}_{n,k} Fo'\right)[W_n^{(i)}\left(\mu_{n,k}, z^* - Fo + Fo'\right)\eta\left(z^* - Fo + Fo'\right) \right.$$
$$\cos nPd\left(Fo - Fo'\right) + \delta_i W_n^{(i)}\left(\mu_{n,k}, z^* - Fo + Fo'\right)\eta\left(z^* - Fo + Fo'\right) \qquad ,(10)$$
$$\left. \sin nPd\left(Fo - Fo'\right)]\, \mathrm{d}Fo' \right\rangle \exp\left(-\mu^2{}_{n,k} Fo\right)$$

де $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = 1$; $W_n^{(i)}\left(\mu_{n,k}, z^* - Fo + Fo'\right) = \mu_{n,k} J_n'\left(\mu_{n,k}\right) V_n^{(i)}\left(z^* - Fo + Fo'\right)$; i=1,2.

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0 \\ 1, & \text{якщо} \quad x \ge 0 \end{cases}.$$

Таким чином з урахуванням формули оберненого перетворення (6) одержуємо температурне поле рідини, яка обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ:

$$\theta\left(\rho, \varphi, z^*, Fo\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ 2 \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \left[\bar{\theta}_n^{(1)} + i \cdot \bar{\theta}_n^{(2)} \right] \frac{J_n\left(\mu_{n,k}\rho\right)}{\left[J_n'\left(\mu_{n,k}\right)\right]^2} \right\} \cdot \exp(in\varphi),$$

де значення $\bar{\theta}_n^{(1)}$ і $\bar{\theta}_n^{(2)}$ визначаються за формулами (10).

Висновки. Знайдено температурне поле рідини, яка обертається, з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є. Знайдений аналітичний розв'язок крайової задачі теплообміну рідини, яка обертається, та може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (у прокатних валках, турбінах тощо).

ЛІТЕРАТУРА

1. Еремин А.В. Нестационарный теплообмен в цилиндрическом канале при ламинарном течении жидкости / Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Рассіпнов А.Ю., Кузнецова А.Э. //Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. №4 (33). С. 122-130.
2. Кудинов В.А. Аналитические решения задач теплообмена при течении жидкости в плоскопараллельных каналах на основе определения фронта температурного возмущения / Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Антимонов М.С. // Инженерно-физический журнал, 2007. Т. 80, №5. С. 176-186.
3. Kuwashimo Kensuke Temperature distribution within a rotatinq cylindrieal body/ Kuwashimo Kensuke, Yamada Tominori // Bull. JSME. – 1978. – Vol. 21, N 152. – P. 266 – 272.

4. Галицын А.С. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности / А.С.Галицын, А.И. Жуковский.– Киев,Наукова думка.1979. – 561С.
5. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / Михлин С.Г. – М., Высшая школа, 1977. – 427 С.
6. Грэй Э., Мэтьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике / Грэй Э., Мэтьюз Г.Б. – М., ИЛ., 1949. – 386 С.

 ISSN 1562-9945