

Ю.В. Бразалук, А.И. Губин, Д.В. Евдокимов, О.А. Коваленко
ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ

Аннотация. Предложен асимптотический алгоритм расчета распределения температур и тепловых потоков в неасимптотически тонких теплозащитных покрытиях. Предложенный алгоритм позволяет рассчитывать температурные поля покрытий вместе с аналогичными полями защищаемого тела, модифицируя граничные условия для последнего, а также учесть тепловые потоки вдоль теплозащитного слоя. Для расчета полей температур в защищаемом массивном теле использовался метод граничных элементов. Эффективность и точность предложенного подхода подтверждены путем сравнения результатов с аналитическими решениями тестовых задач. Предложенный подход может быть использован при решении проблем энергосбережения.

Ключевые слова: Тепловая защита, Асимптотический метод, Теплозащитное покрытие, Метод граничных элементов

Введение

Системы теплоизоляции, иногда также называемые системами тепловой защиты, уже довольно давно стали неотъемлемой частью самых разнообразных технологий и технических систем. Простейшие из них представляют собой относительно тонкие покрытия, выполненные из материала с достаточно малой теплопроводностью. Подобные теплозащитные покрытия чрезвычайно широко распространены, что объясняется их простотой и высокой технологичностью их производства особенно в случае, когда защищаемый объект имеет простую каноническую форму. В последнем случае расчет температурных и иных полей в рассматриваемых системах также не будет представлять собой сколько-нибудь существенных трудностей даже при использовании аналитических методов исследования. Однако для неканонических форм объектов, подлежащих тепловой защите, значительно усложняется не только задача производства рассматриваемых покрытий, но даже их расчет, который в этом случае представляет собой значительные вычислительные трудности. Природа ука-

занных трудностей является прямым следствием относительно малой толщины теплозащитного покрытия в сравнении с геометрическими масштабами защищаемого объекта. То есть, данный класс задач можно, без всякого сомнения, отнести к так называемым многомасштабным задачам. Для неканонических форм защищаемых объектов необходимо прибегать к численным, а не аналитическим методам. Но для достижения приемлемой точности расчета необходимо соответствие расчетных сеток внутри защищаемого тела и внутри теплозащитного покрытия. Следовательно, для достижения приемлемой точности придется строить расчетные сетки с шагами, которые обеспечили бы корректный расчет поля температур и тепловых потоков в направлении, перпендикулярном теплозащитному покрытию, то есть, в самом малом из всех возможных в данной задаче геометрических масштабов.

К сожалению, традиционно в инженерных расчетах возникла тенденция пренебрегать толщиной защитных покрытий, даже если они не асимптотически тонкие, а имеют конечную толщину. Как правило, наличие теплозащитного покрытия в инженерном тепловом расчете учитывается в экспериментально определяемом коэффициенте теплообмена с окружающей средой. Совершенно очевидно, что такой подход является чересчур затратным, поскольку требует проведения теплофизического эксперимента в широком диапазоне теплофизических параметров для каждой толщины защитного слоя. Кроме того, подобные экспериментальные данные, как правило, с трудом формализуются для использования в расчетных моделях.

Другим, к сожалению, еще очень мало разработанным подходом к расчету теплозащитных покрытий является применение асимптотических подходов совместно с численным моделированием. Указанная альтернатива представляется достаточно многообещающей, поскольку она устраняет трудности, непреодолимые для аналитических и численных методов. Последнее обстоятельство и послужило побудительным мотивом для написания настоящей работы, и, как надеются авторы, послужит стимулом для дальнейших исследований в этой области.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными и практическими задачами

Общая техническая проблема управления тепловыми режимами технических объектов является центральной в современной теплотехнике. Не останавливаясь на многочисленных и весьма разнообразных теоретических и прикладных аспектах этой проблемы, отметим только, что современный энергетический кризис сделал исключительно актуальными решения задач управления тепловыми режимами, обеспечивающие энергосбережение, в частности, задачи теплоизоляции и тепловой защиты. Актуальность подобных задач для экономики Украины не вызывает ни малейшего сомнения. Как на стадии проектирования теплоизоляции, так и на стадии ее эксплуатации возможность эффективного и точного компьютерного моделирования соответствующих процессов теплообмена обеспечивает принятие рациональных решений, а при необходимости и оптимизацию параметров системы тепловой защиты, создавая таким образом дополнительные возможности энергосбережения и экономии материальных ресурсов

Анализ последних достижений и публикаций по проблематике исследования

Учитывая актуальность рассматриваемой проблемы для чрезвычайно широкого спектра направлений хозяйственной и научно-технической деятельности, представляется вполне естественным, что ей посвящена весьма обширная литература, сколь-нибудь полный обзор которой далеко выходит за ограниченные рамки данной статьи и требует отдельного исследования, превосходящего формат обычной статьи. Поэтому ограничимся здесь лишь краткими оценками современного состояния вопроса, основной акцент сделав на недостаточно еще разработанных вычислительных аспектах компьютерного моделирования теплоизоляционных покрытий. Пожалуй, наибольшее число публикаций, в том числе и монографий, справочников и гостов, проблема теплоизоляции стимулировала в области строительных наук и коммунальной сфере, где она является важнейшей составной частью общей проблемы коммунального энергосбережения. К сожалению, особенности задач, возникающих в этой области, таковы, что позволяют удовлетвориться самыми примитивными математическими моделями, основанными на предположениях о стационарности и од-

номерности по пространству полей температур в теплоизоляционном покрытии, что соответствует утверждению о линейном распределении температуры в данном покрытии. Хотя, с точки зрения авторов настоящей работы, такие упрощения не всегда достаточно оправданы, что будет подробнее обсуждаться ниже, они стали стандартом *de facto* в рассматриваемой области. Прямым результатом описанных выше упрощений является совершенно неудовлетворительное состояние математического и численного моделирования в указанной области, не позволяющее даже привести удачные примеры расчетов, выходящие за рамки тривиального случая постоянных температур внутри и снаружи сооружения. Намного более общие постановки задач стали традиционными для математического моделирования систем тепловой защиты, применяемых в авиационной и ракетно-космической технике, а также в отдельных технологиях тепловой и атомной энергетики, металлургической и химической промышленности. Систематическое исследование подобных систем тепловой защиты, характеризующихся большими перепадами температур, возрастанием температур до границ изменения внутренней структуры вещества покрытия (до границ фазовых переходов), приведено в монографии [1]. Однако и этот научный труд, призванный подытожить обширные исследования, проведенные, прежде всего, в ракетно-космической области, не свободен от недостаточно обоснованных упрощающих предположений, например, об одномерном локальном характере теплообмена в теплозащитном покрытии. Неявной истинной причиной, вынудившей прибегнуть к упомянутым предположениям, обоснованным ненадлежащим образом, является реальная многомасштабность рассматриваемой задачи. До самого последнего времени несмотря на многочисленные попытки [2, 3] преодолеть указанную негативную тенденцию не удавалось.

Асимптотические методы традиционно широко использовались в теории тепломассообмена, в том числе и в теории теплопроводности [4 - 6]. Правда, подавляющее большинство таких работ были направлены на преодоление трудностей, связанных с физической нелинейностью разрешаемых уравнений, но, тем не менее, вопросы геометрической асимптотики, то есть исследование случаев тонких тел, также были рассмотрены в указанных книгах. Первой попыткой применения асимптотического подхода к задаче расчета теплофизических процессов в неасимптотически тонком теплозащитном покрытии была

работа [7]. Однако в упомянутой работе [7] рассмотрение ограничилось случаями простейшей геометрии, а о тепловой защите тел сложной геометрической формы там сказано лишь как о потенциальной возможности предложенного подхода.

Цель работы

На основании вышеизложенного цель настоящей статьи можно определить как разработку алгоритма расчета тепловых полей в защищаемом теле и теплозащитном покрытии на основе численных методов при помощи асимптотического подхода.

Поскольку речь идет о разработке принципиальных аспектов расчетной методики, то для упрощения рассуждений и расчетов весь дальнейший анализ будет отнесен к простейшему стационарному плоскому случаю, оставив более сложные случаи для дальнейших исследований.

Основной материал исследования. Математическая модель

Рассмотрим неасимптотически тонкий теплоизолирующий слой в плоском случае. Обозначим область, им занимаемую, через D_1 , а ее границу через Γ_1 . В свою очередь, теплоизолируемое тело занимает область D_2 с границей Γ_2 . Общую часть границы обозначим через $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma$. Простоты ради, материал слоя полагаем однородным и изотропным, теплофизические свойства материала слоя и контактирующих с ним тел, а также диапазон температур полагаем таковыми, что поля температур в них с надлежащей точностью могут быть описаны линейными стационарными уравнениями теплопроводности, геометрическую форму слоя и тела выбираем произвольными, но такими, что граница между ними Γ является гладкой, то есть имеет единственную нормаль. Под предположением о неасимптотической тонкости слоя будем понимать следующее: пусть задано некоторое достаточно малое, но конечное значение максимальной толщины слоя δ^* , тогда для каждой точки общей границы Γ существует хотя бы одна точка на остальной части границы Γ_1 , удаленная от первой на расстояние, меньшее либо равное δ^* . Учитывая постулируемую гладкость границы Γ , последнее определение можно упростить: для каждой точки общей границы Γ расстояние от этой точки до точки пересечения перпендикуляра, из нее проведенного, с остальной частью

границы Γ_1 меньше либо равно δ^* . Далее мы будем рассматривать только случаи, когда указанный перпендикуляр и остальная часть границы Γ_1 имеют единственную точку пересечения, однако в общем случае это может быть и не так. Согласно монографиям [6, 8] в произвольных ортогональных системах координат:

$$\frac{1}{H_{11} \cdot H_{12}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{H_{12}}{H_{11}} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \eta_1} \right) \right] = Q_1, \quad (1)$$

$$\frac{1}{H_{21} \cdot H_{22}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{H_{22}}{H_{21}} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta_2} \left(\frac{H_{21}}{H_{22}} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \eta_2} \right) \right] = Q_2, \quad (2)$$

где $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ – произвольные системы координат; $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$, – соответствующие им коэффициенты Ляме, принимающие конечные положительные значения. Свобода выбора систем координат ограничивается только соображениями удобства при постанове граничных условий и условий сопряжения на общей границе Γ . Источниковые члены Q_1, Q_2 полагаем известными. Из физических соображений естественно первую из координатных систем, используемую для описания поля температуры в изолирующем слое, связать с границей Γ , и первую из координат отсчитывать по нормали к этой кривой, а вторую по касательной.

На общей границе Γ целесообразно поставить условия сопряжения (идеального теплового контакта)

$$T_1|_{\Gamma} = T_2|_{\Gamma}, \quad (3)$$

$$\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \lambda_2 \cdot \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad (4)$$

где λ_1, λ_2 – соответствующие коэффициенты теплопроводности. На внешней границе теплоизолирующего слоя могут быть поставлены стандартные граничные условия одного из трех типов: первого рода

$$T_1|_{\Gamma_1} = T_a \quad (5)$$

второго рода

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = q_a, \quad (6)$$

третьего рода

$$\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = \alpha_1 (T_1 - T_a), \quad (7)$$

где все обозначения понимаются в традиционном смысле [6, 8]. Граничные условия на границах массивного тела, не контактирующих с изолирующим слоем, также ставятся традиционным способом.

Приведем сформулированную выше задачу к безразмерному виду, для чего предположим, что в задаче есть две характерные температуры T_* и T^* (как правило, определяемые из граничных условий), которые могут относиться как к массивному телу, так и к тонкому слою, тогда:

$$\theta_1 = \frac{T_1 - T_*}{T^* - T_*} \quad (8)$$

$$\theta_2 = \frac{T_2 - T_*}{T^* - T_*} \quad (9)$$

Пусть толщина неасимптотически тонкого слоя имеет характерный размер $L_1 = \delta^*$, а размеры массивного тела характеризуются величиной L_2 (очевидно, что $L_1 \ll L_2$), тогда безразмерные координаты ξ_1 , η_1 в неасимптотически тонком слое запишутся в следующем виде

$$\bar{\xi}_1 = \frac{\xi_1}{L_1}, \quad \bar{\eta}_1 = \frac{\eta_1}{L_2}, \quad (10)$$

а ξ_2 , η_2 в массивном теле будут иметь вид:

$$\bar{\xi}_2 = \frac{\xi_2}{L_2}, \quad \bar{\eta}_2 = \frac{\eta_2}{L_2}, \quad (11)$$

Тогда уравнения (1), (2) будут иметь вид

$$\frac{1}{L_1^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \left(\frac{H_{12}}{H_{11}} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\xi}_1} \right) + \frac{1}{L_2^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \left(\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\eta}_1} \right) = \bar{Q}_1 H_{11} \cdot H_{12}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{L_2^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_2} \left(\frac{H_{22}}{H_{21}} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{\xi}_2} \right) + \frac{1}{L_2^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} \left(\frac{H_{21}}{H_{22}} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{\eta}_2} \right) = \bar{Q}_2 H_{21} \cdot H_{22}. \quad (13)$$

После очевидного преобразования видно, что в уравнении (12) присутствует малый параметр

$$\varepsilon = \frac{L_1^2}{L_2^2}, \quad (14)$$

и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \left(\frac{H_{12}}{H_{11}} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\xi}_1} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \left(\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\eta}_1} \right) = \bar{Q}_1 L_1^2 H_{11} \cdot H_{12}. \quad (15)$$

В соответствии с алгоритмом метода малого параметра решение уравнения (15) будем отыскивать в виде ряда по малому параметру

$$\theta_1 = \theta_1^0 + \varepsilon \cdot \theta_1^1 + \varepsilon^2 \cdot \theta_1^2 + \dots + \varepsilon^n \cdot \theta_1^n + \dots, \quad (16)$$

где верхние индексы при θ означают номер приближения, а при ε степень данного параметра. Аналогично решение уравнения (13) будем искать в виде

$$\theta_2 = \theta_2^0 + \varepsilon \cdot \theta_2^1 + \varepsilon^2 \cdot \theta_2^2 + \dots + \varepsilon^n \cdot \theta_2^n + \dots. \quad (17)$$

Подстановка разложений (16), (17) в исходные уравнения дает

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \left(\frac{H_{12}}{H_{11}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} (\theta_1^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \theta_1^k) \right) + \\ & + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \left(\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} (\theta_1^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \theta_1^k) \right) = \bar{Q}_1 L_1^2 H_{11} \cdot H_{12}. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_2} \left(\frac{H_{22}}{H_{21}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_2} (\theta_2^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \theta_2^k) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} \left(\frac{H_{21}}{H_{22}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} (\theta_2^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \theta_2^k) \right) = \bar{Q}_2 L_2^2 H_{21} \cdot H_{22}. \end{aligned} \quad (19)$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях ε , получим последовательность краевых задач для определения неизвестных функций

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \left(\frac{H_{12}}{H_{11}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \theta_1^0 \right) = \bar{Q}_1 L_1^2 H_{11} \cdot H_{12}, \quad (20)$$

откуда

$$\theta_1^0 = \int \left[\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \left(\int \bar{Q}_1 L_1^2 H_{11} \cdot H_{12} d\bar{\xi}_1 + C_1 \right) \right] d\bar{\xi}_1 + C_2. \quad (21)$$

Очевидно, что выражение (21) является общим решением обыкновенного дифференциального уравнения (20), а неизвестные постоянные C_1 и C_2 могут быть найдены из соответствующих граничных условий. Следует отметить, что коэффициенты Ляме являются функциями координат и тоже могут быть разложены по параметру, характеризующему геометрические размеры, подобно (16), (17). В этом случае в нулевом приближении решение (21) заметно упростится, что может обеспечить вычисление соответствующего интеграла в квадратурах. Однако последующие приближения в таком случае усложнятся. Аналогично для первого приближения

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \left(\frac{H_{12}}{H_{11}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \theta_1^1 \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \left(\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \theta_1^0 \right). \quad (22)$$

Отметим, что правая часть уравнения (22) является известной в силу решения (21). Тогда

$$\theta_1^1 = \int \left[\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \left(\int \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \left(\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \theta_1^0 \right) d\bar{\xi}_1 + C_1 \right) \right] d\bar{\xi}_1 + C_2. \quad (23)$$

Выражение (23) является общим аналитическим решением, а неизвестные постоянные, могут быть определены из соответствующих граничных условий. Отметим, что решение (23) отражает тепловые потоки вдоль теплоизолирующего слоя, чего не делалось в традиционных математических моделях теплоизоляции. При практически используемых толщинах теплозащитных слоев вплоть до 0,1 - 0,2 размеров защищаемого тела следующие члены в разложениях (16), (17) имеют порядок $10^{-3} - 10^{-4}$, а это означает, что нулевого и первого приближения (21), (23) вполне достаточно для расчета с приемлемой в инженерных приложениях точностью. Подстановка разложений (16), (17) в граничные условия (3) - (7) совершенно тривиальна, однако при использовании граничных условий второго или третьего рода на внешней границе теплоизолирующего слоя следует учитывать, что нормаль к указанной поверхности слоя может значительно отклоняться от нормали к границе Γ в соответствующей точке (правда, в приложениях такая ситуация возникает крайне редко). В таком случае реализация граничных условий несколько усложняется, но эти усложнения не носят принципиального характера. Особо простым решение (21), а за ним и (23) оказывается в случае $Q_1 = 0$.

Понятно, что выбор системы координат ξ_1, η_1 обусловлен формой границы Γ , однако для системы координат ξ_2, η_2 подобные ограничения не предусматривались, поэтому эта система координат может быть выбрана произвольно из соображений удобства решения соответствующих краевых задач. Поскольку в настоящей статье основное внимание уделяется телам сложной геометрической формы, а уравнение (2) – линейное уравнение Пуассона, то для численного решения данной задачи целесообразно использовать метод граничных элементов, для которого наилучшей является декартова ортогональная система. Тогда уравнение (2) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = Q_2, \quad (24)$$

а уравнение (13):

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{y}^2} = \bar{Q}_2, \quad (25)$$

тогда

$$\frac{\partial^2 \theta_2^0}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta_2^0}{\partial \bar{y}^2} = \bar{Q}_2, \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2^1}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta_2^1}{\partial \bar{y}^2} = 0. \quad (27)$$

Метод численного расчета температурного поля

Для численного расчета поля температур внутри защищаемого тела использовался метод граничных элементов [9, 10]. Для этого уравнения (26), (27) заменим их граничным интегральным аналогом:

$$\begin{aligned} c(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \theta(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = & \oint_{\Gamma_2} \varphi_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_0, \bar{y}_0) \frac{\partial \theta}{\partial n}(\bar{x}, \bar{y}) ds(\bar{x}, \bar{y}) - \\ & - \oint_{\Gamma_2} \theta(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_0, \bar{y}_0) ds(\bar{x}, \bar{y}) + \\ & + \int_{D_2} \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}) \varphi_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_0, \bar{y}_0) d\bar{x} d\bar{y}, \end{aligned} \quad (28)$$

где n – внешняя нормаль к границе, функция c равна 1 для точек, лежащих внутри области решения, S для точек, лежащих на ее границе и 0 для точек вне области, φ_0 – фундаментальное решение уравнения Лапласа в плоском случае

$$\varphi_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_0, \bar{y}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_0)^2}}. \quad (29)$$

Дальнейшая процедура численного решения граничных интегральных уравнений (28) заключается во введении на границе области и внутри ее сеток, подобных конечноэлементным сеткам, аппроксимация на них известных и неизвестных при помощи достаточно простых функций, при чем аппроксимации неизвестных функций должны включать подлежащий определению набор произволов, и, наконец, получение системы линейных алгебраических уравнений. Более подробно на алгоритме метода граничных элементов останавливаться не будем, поскольку он в деталях описан в монографиях [9,

10]. Единственной особенностью процедуры решения является модификация граничных условий для уравнений (28) с учетом решений (21), (23).

Анализ полученных результатов

Поскольку основной целью данной статьи является разработка методики применения асимптотических подходов в задачах тепловой защиты, основным полученным результатом следует считать тестирование данной методики на задачах, имеющих аналитическое решение. В частности, для тестирования была выбрана задача о стационарном распределении температуры в толстостенном цилиндре с внутренним или внешним теплозащитным покрытием постоянной толщины, решение которой известно в квадратурах. При относительной толщине теплозащитного покрытия 0,1 толщины цилиндра и использовании по внешней и внутренней поверхностям цилиндра по 200 граничных элементов погрешность численного расчета не превышала 0,1 %. Помимо приведенной тестовой задачи были численно решены еще несколько задач для случаев более сложной формы защищаемых тел, включая эллипсоидальные тела, прямоугольные тела, тела канонических геометрических форм с внутренними пустотами при постоянных или переменных толщинах теплозащитного покрытия. Все проведенные расчеты подтвердили высокую эффективность предложенного подхода.

Выводы и анализ перспектив дальнейших исследований

Предложенный в настоящей работе подход обобщает предшествующие попытки приближенного анализа теплозащитных покрытий. Данный подход позволяет оценить тепловые потоки в тангенциальном направлении, что не делалось раньше, а также обеспечивает оценку точности приближения. Аналитический характер полученных представлений позволяет использовать для расчета уже существующее программное обеспечение с минимальными изменениями в граничных условиях.

Направления дальнейших исследований совершенно очевидны. Первое из таких направлений и заключается в обобщении исходной проблемы, распространении предложенного подхода на нестационарные и нелинейные задачи, а также на случай, когда в защитном слое происходят фазовые переходы или химические реакции. Вторым направлением развития результатов работы является их применение к

широкому спектру прикладных проблем теплосбережения, весьма актуальных в связи с энергетическим кризисом.

В целом, данная работа представляет собой достаточно успешную попытку решения многомасштабной задачи без потери эффективности существующих вычислительных подходов. Применение данной методики дает возможность исключить из расчетной практики большие объемы экспериментальных данных и уменьшить общий объем дорогостоящих и длительных экспериментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полежаев Ю. В. Тепловая защита / Ю. В. Полежаев, Ф. Б. Юревич. – М.: «Энергия», 1976. – 392 с.
2. Панкратов Б. М. Взаимодействие материалов с газовыми потоками / Б. М. Панкратов, Ю. В. Полежаев, А. К. Рудько. – М.: Машиностроение, 1975. – 224 с.
3. Полежаев Ю. В. Тепловое разрушение материалов / Ю. В. Полежаев, Г. А. Фролов. – К.: Изд-во ИПМ НАНУ, 2005. – 288 с.
4. Федоткин И. М. Асимптотические методы в задачах тепломассопереноса: / И. М. Федоткин, А. М. Айзен. – К.: Наукова думка, 1975. – 252 с.
5. Зино И. Е. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости / И. Е. Зино, Э. А. Тропп. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 224 с.
6. Беляев Н. М. Методы теории теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – М.: «Высшая школа», 1982. – т. 1. – 327 с., т. 2. – 304 с.
7. Евдокимов Д. В. Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое / Д. В. Евдокимов, Д. Н. Ивасишина, А. А. Кочубей, Н. В. Поляков // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – с. 141-156.
8. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М.: «Высшая школа», 1967. – 599 с.
9. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
10. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.