

И.А. Дорош, М.Г. Снегирев, С.В. Тарасов

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА СИЛ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В МАГНИТНЫХ СИСТЕМАХ
ПОДВЕСА НА ПОСТОЯННЫХ МАГНИТАХ**

Аннотация. В статье рассматриваются ряд методов расчета магнитных систем, которые позволяют определять параметры магнитного поля и сил взаимодействия магнитных систем. Проведено сравнение результатов.

Ключевые слова: магнитолевитирующая система, методы расчета, постоянные магниты.

Одним из перспективных методов разгрузки опор роторов вертикально-осевых ветроэнергетических установок являются системы подвеса на основе постоянных магнитов, имеющие различное конструктивное исполнение [1]. Поиск рациональных конструктивных схем подвесов выводит в число актуальных задачу разработки методик моделирования таких систем с целью определения параметров, обеспечивающих их эффективную работу в статических и динамических режимах. Моделирование процессов магнитного взаимодействия в подвесах на различных этапах проектирования ведется как с помощью систем компьютерного моделирования базирующихся, как правило, на методе конечных элементов (AnsysMaxwell, FEMM, ComsolMultiphysics), так и аналитическими методами, позволяющими получить комплекс частных математических моделей, отражающих влияние отдельных конструктивных параметров системы подвешивания на характер процессов взаимодействия ее элементов. Для конструктивно сложных конструкций магнитных систем и на заключительных этапах проектирования, требующих высокой точности вычислений распределения магнитного поля, значений индукционных токов, сил и моментов взаимодействий находят применение конечно-элементные программные пакеты. В то же время комплекс расчетных аналитических моделей фактически составляет основу инженерной

методики проектирования систем подвеса удобных для использования на этапе выбора их базовых конструктивных технических решений.

В первую очередь представляет интерес оценка значений силовых факторов взаимодействия элементов в магнитной системе в зависимости от их геометрической конфигурации и величины внешних нагрузок, приложенных к левитирующей части подвеса.

Задача определения сил взаимодействия в магнитных системах встречает определенные трудности, как при определении их величин различными расчётными методами и моделирующими программами, так и при верификации полученных результатов путем сравнения их между собой и с результатами измерений сил в реальной магнитной системы полученных экспериментальным путем.

С целью сравнительного анализа эффективности и границ применимости базовых расчетных методов – магнитных зарядов, магнитных токов и диполей – использовалась физическая тестовая система в виде типового фрагмента системы подвешивания из двух соосных цилиндрических постоянных магнитов с коллинеарными разнонаправленными векторами индукции.

Для тестовой системы определялось магнитное поле и сила взаимодействия при различных значениях расстояний между верхним и нижним магнитами. Для этого использовались разработанные расчётные методики на основе методов магнитных зарядов, магнитных токов и диполей, а также произведено сравнение с конечноэлементным расчётом в одном из пакетов анализа магнитных систем и с полученными экспериментальными данными.

В большинстве случаев, значения распределений магнитного поля, индукционных токов, сил и моментов систем магнитного подвеса не могут быть вычислены в аналитическом виде и требуют разработки системы специальных конечноэлементных алгоритмов и программных комплексов для их приближенного вычисления.

Для определения сил взаимодействия статических магнитных систем, при использовании программ автоматизации аналитических и численных расчётов, было разработано три программных комплекса расчета магнитного поля системы постоянных магнитов следующими методами – методом магнитных зарядов для случая линейной и аксиальной симметрии магнитной системы, методом поверхностных токов

для случая линейной и аксиальной симметрии магнитной системы и методом диполей [1, 2, 3].

В первых двух случаях, алгоритм вычисления на основе исходной информации о форме внешних поверхностей элементов магнитных систем и параметров их намагниченности производит разбиение исходной магнитной системы на токовые или «зарядовые» элементы. Полученные матрицы ориентаций элементов и их характеристик поступают в вычислительный блок, который переориентирует элементы для их соответствия необходимым аналитическим формулам и вычисляет общее магнитное поле суммированием полей от отдельных магнитных элементов [3, 4].

Отличительной особенностью программ расчета магнитного поля системы постоянных магнитов методом магнитных зарядов и методом токов является малость погрешности вычисления магнитного поля системы на малых расстояниях от граней магнитных элементов. Это позволяет с высокой точностью рассчитывать силы взаимодействия составляющих систем подвеса даже в граничном случае их соприкосновения противостоящими гранями.

Несмотря на сложность аналитических формул, используемых в методе зарядов и токов, скорость вычисления магнитного поля для типичных магнитных систем при аналогичной точности вычислений существенно выше, чем для метода диполей [4], или конечноэлементных методов. Однако, сравнительная скорость вычисления этими двумя методами падает при усложнении внешних обводов элементов магнитных систем. В целом, программ расчета магнитного поля методом магнитных зарядов показывают большую точность и скорость для линейных систем, а программы расчета методом токов – для систем с аксиальной симметрией.

Алгоритм работы программы расчета магнитного поля и сил взаимодействия системы постоянных магнитов методом диполей включает в себя разбиение на основе исходных данных фрагментов магнитной системы на элементарные дипольные элементы и определение генерируемых ими магнитных полей и сил взаимодействия [4]. Алгоритм имеет преимущество при сложной форме элементов магнитолевитирующей системы, однако имеет сравнительно меньшую точность на малых расстояниях от неё. Последний недостаток может быть частично скомпенсирован использованием неравномерной сетки

разбиения магнитной системы. Для систем с цилиндрической симметрией данный метод имеет определённые преимущества по сравнению с методом магнитных зарядов.

Рассмотрим подробнее каждый метод. В методе поверхностных токов свойства каждого из i элементов задаются значениями из 8 параметров – координатами центра элемента $\{R_i, \varphi_i, z_i\}$, компонентами единичного вектора касательного к вектору поверхностного тока элемента $\{n_{Ri}, n_{\varphi i}, n_{zi}\}$, значением площади элемента ΔS_i и величиной внутренней намагниченности элемента B_{0i} . Для системы, составленной из элементов с одинаковой намагниченностью, параметры B_{0i} равны внутренней намагниченности материала B_0 . Величина магнитного поля системы и сила взаимодействия их частей имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(R_2, \varphi_2, z_2) &= \frac{B_0}{4\pi} \sum_i \frac{\vec{n}_i \times (\vec{R}_2 - \vec{R}_{1i})}{((\vec{R}_2 - \vec{R}_{1i}) \cdot (\vec{R}_2 - \vec{R}_{1i}))^{3/2}} \Delta S_{1i} \\ \vec{F}_{12} &= \frac{B_0^2}{4\pi\mu_0} \sum_j \sum_i \frac{\vec{n}_{2i} \times (\vec{n}_{1i} \times (\vec{R}_{2j} - \vec{R}_{1i}))}{((\vec{R}_{2j} - \vec{R}_{1i}) \cdot (\vec{R}_{2j} - \vec{R}_{1i}))^{3/2}} \Delta S_{1i} \Delta S_{2j}, \end{aligned} \quad (1)$$

Алгоритм расчёта основывается на представлении однородного магнитного материала каждой из двух частей магнитного подвеса как системы поверхностей с заданной величиной поверхностного тока на ней, после чего решается задача определения магнитного поля таких токов и сил и моментов их взаимодействия. Такой подход позволяет упростить расчётную модель и снизить количество элементов разбиения за счёт перехода от объёмных элементов к поверхностным. Указанный способ разбиения также имеет дополнительные преимущества для систем с цилиндрической симметрией, в которых исходное выражение для величины магнитного поля может дополнительно однократно проинтегрировано с получением результата в аналитическом виде.

Другим, альтернативным методом определения сил взаимодействия систем постоянных магнитов, является метод зарядов, который основывается на аналогии уравнений полей создаваемых во внешней среде системами токов и электрических зарядов. В этом случае, предполагается, что внешнее магнитное поле системы подвеса задаётся распределением «магнитных зарядов», расположенных для однородно намагниченных элементов на их поверхности.

Аналогично методу токов, дальнейший расчёт проводится конечноэлементным методом с использованием цилиндрической системы координат и с разбиением зарядовых поверхностей составляющих модель системы на отдельные плоские элементы.

Свойства каждого из i элементов задаются значениями 8 параметров – координатами центра элемента $\{R_i, \varphi_i, z_i\}$, компонентами единичного вектора касательного к вектору поверхностного тока элемента $\{n_{Ri}, n_{\varphi i}, n_{zi}\}$, значением площади элемента ΔS_i и величиной внутренней намагниченности элемента магнитной системы B_{0i} . Величина магнитного поля системы и сила взаимодействия их частей имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(R_2, \varphi_2, z_2) &= \frac{B_0}{4\pi} \sum_i \frac{\vec{n}_i (\vec{R}_2 - \vec{R}_{1i})}{((\vec{R}_2 - \vec{R}_{1i}) \cdot (\vec{R}_2 - \vec{R}_{1i}))^{3/2}} \Delta S_{1i} \\ \vec{F}_{12} &= \frac{B_0^2}{4\pi\mu_0} \sum_j \sum_i \frac{\vec{n}_{2i} \vec{n}_{1i} (\vec{R}_{2j} - \vec{R}_{1i})}{((\vec{R}_{2j} - \vec{R}_{1i}) \cdot (\vec{R}_{2j} - \vec{R}_{1i}))^{3/2}} \Delta S_{1i} \Delta S_{2j}, \end{aligned} \quad (2)$$

где индекс i перечисляет элементы первой подсистемы (статора), а индекс j - второй подсистемы (ротора).

Для прямоугольного магнитного элемента, ориентированного по осям системы координат, эквивалентный "потенциал" поля вне магнита может быть записан в аналитическом виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(\vec{R}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma_m (x_0 - \Delta x) \times \\ &\times \text{ArcTan} \left(\frac{(y_0 - \Delta y)(z_0 - \Delta z)}{(x_0 - \Delta x) \sqrt{(x_0 - \Delta x)^2 + (y_0 - \Delta y)^2 + (z_0 - \Delta z)^2}} \right) + \\ &+ (z_0 - \Delta z) \ln \left(\sqrt{(x_0 - \Delta x)^2 + (y_0 - \Delta y)^2 + (z_0 - \Delta z)^2} - y_0 + \Delta y \right) - \\ &+ (y_0 - \Delta y) \ln \left(\sqrt{(x_0 - \Delta x)^2 + (y_0 - \Delta y)^2 + (z_0 - \Delta z)^2} - z_0 + \Delta z \right) \Bigg|_{-\Delta x, -\Delta y, -\Delta z}^{\Delta x, \Delta y, \Delta z} \end{aligned} \quad (3)$$

Для систем с цилиндрической симметрией потенциал в точке с координатами (x_1, y_1, z_1) может быть выражен в аналитическом виде только для дуг окружности, и записывается через гипергеометрические функции

$$\begin{aligned}
d\varphi(r, z, \varphi, r_1, z_1, \varphi_1) &= \frac{\sigma_m}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(-2r\sqrt{1 + \sin(\varphi + \varphi_1)} \sec(\varphi + \varphi_1) \times \right. \\
&\times F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, K_1, K_2\right) \sqrt{\frac{r_1^2(r^2 + r_1^2 + z_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1))}{r^2 r_1 + 2rr_1^2 + r_1(r_1^2 + z_1^2)}} \times \\
&\times \left. \sqrt{\frac{1 - \sin(\varphi + \varphi_1)}{r^2 r_1 - 2rr_1^2 + r_1(r_1^2 + z_1^2)}} \right)_{\varphi = -\Delta\varphi}^{\varphi = \Delta\varphi} dr dz, \tag{4} \\
K_1 &= \frac{r^2 + r_1^2 + z_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}{(r + r_1)^2 + z_1^2}, \\
K_2 &= \frac{r^2 + r_1^2 + z_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}{(r - r_1)^2 + z_1^2}
\end{aligned}$$

Метод зарядов наиболее удобен для определения точного распределения магнитного поля в системах с линейной трансляционной симметрией и прямоугольными магнитными элементами, что покрывает широкий класс магнитных систем, используемых в практических системах магнитного подвеса.

Еще одним альтернативным методом определения сил и моментов взаимодействия элементов магнитного подвеса является метод диполей [1]. Каждый постоянный магнит массива рассматривается как совокупность некоторого набора магнитных диполей. На рисунке 1 показано покрытие объёма тела постоянного магнита эквивалентными объёмами диполей разбиения.

Согласно [1, 4], сила взаимодействия двух элементарных магнитных диполей с векторными дипольными моментами \bar{m}_1 и \bar{m}_2 можно записать в виде

$$\bar{F} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R^5} \left(\bar{m}_1(\bar{m}_2 \cdot \bar{R}) + \bar{m}_2(\bar{m}_1 \cdot \bar{R}) + \bar{R} \left((\bar{m}_1 \cdot \bar{m}_2) - 5 \frac{(\bar{m}_1 \cdot \bar{R})(\bar{m}_2 \cdot \bar{R})}{R^2} \right) \right) \tag{5}$$

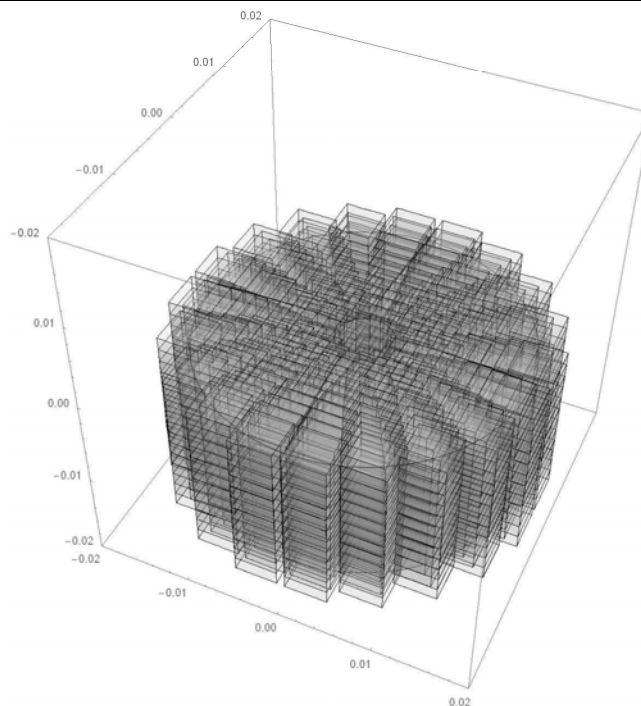


Рисунок 1 – Визуализация эквивалентных объёмов диполей разбиения магнитной системы

Общая сила взаимодействия элементов магнитной системы определяется как сумма взаимодействий элементарных диполей, принадлежащих разным магнитным системам, и имеет вид:

$$\begin{aligned}
 F_{y12} = & \frac{3}{4\pi\epsilon_0 c^2} \sum_j \sum_i \frac{1}{\sqrt{(x_{2j} - x_{1i})^2 + (y_{2j} - y_{1i})^2 + (z_{2j} - z_{1i})^2}^5} \cdot \\
 & \cdot (m_{x2j} (m_{x1i} (x_{2j} - x_{1i}) + m_{y1i} (y_{2j} - y_{1i}) + m_{z1i} (z_{2j} - z_{1i})) + \\
 & + m_{x1i} (m_{x2j} (x_{2j} - x_{1i}) + m_{y2j} (y_{2j} - y_{1i}) + m_{z2j} (z_{2j} - z_{1i}))) + \\
 & + (x_{2j} - x_{1i}) (m_{x1i} m_{x2j} + m_{y1i} m_{y2j} + m_{z1i} m_{z2j} - \\
 & - 5(m_{x1i} (x_{2j} - x_{1i}) + m_{y1i} (y_{2j} - y_{1i}) + m_{z1i} (z_{2j} - z_{1i})) \cdot \\
 & \cdot \frac{(m_{x2j} (x_{2j} - x_{1i}) + m_{y2j} (y_{2j} - y_{1i}) + m_{z2j} (z_{2j} - z_{1i}))}{((x_{2j} - x_{1i})^2 + (y_{2j} - y_{1i})^2 + (z_{2j} - z_{1i})^2)} \Bigg)
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
F_{x12} = & \frac{3}{4\pi\epsilon_0 c^2} \sum_j \sum_i \frac{1}{\sqrt{(x_{2j} - x_{1i})^2 + (y_{2j} - y_{1i})^2 + (z_{2j} - z_{1i})^2}^5} \cdot \\
& \cdot (m_{y2j} (m_{x1i} (x_{2j} - x_{1i}) + m_{y1i} (y_{2j} - y_{1i}) + m_{z1i} (z_{2j} - z_{1i})) + \\
& + m_{y1i} (m_{x2j} (x_{2j} - x_{1i}) + m_{y2j} (y_{2j} - y_{1i}) + m_{z2j} (z_{2j} - z_{1i}))) + \\
& + (y_{2j} - y_{1i}) (m_{x1i} m_{x2j} + m_{y1i} m_{y2j} + m_{z1i} m_{z2j} - \\
& - 5(m_{x1i} (x_{2j} - x_{1i}) + m_{y1i} (y_{2j} - y_{1i}) + m_{z1i} (z_{2j} - z_{1i}))) \cdot \\
& \cdot \left. \frac{(m_{x2j} (x_{2j} - x_{1i}) + m_{y2j} (y_{2j} - y_{1i}) + m_{z2j} (z_{2j} - z_{1i}))}{((x_{2j} - x_{1i})^2 + (y_{2j} - y_{1i})^2 + (z_{2j} - z_{1i})^2)} \right) \Bigg)
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
F_{x12} = & \frac{3}{4\pi\epsilon_0 c^2} \sum_j \sum_i \frac{1}{\sqrt{(x_{2j} - x_{1i})^2 + (y_{2j} - y_{1i})^2 + (z_{2j} - z_{1i})^2}^5} \cdot \\
& \cdot (m_{z2j} (m_{x1i} (x_{2j} - x_{1i}) + m_{y1i} (y_{2j} - y_{1i}) + m_{z1i} (z_{2j} - z_{1i})) + \\
& + m_{z1i} (m_{x2j} (x_{2j} - x_{1i}) + m_{y2j} (y_{2j} - y_{1i}) + m_{z2j} (z_{2j} - z_{1i}))) + \\
& + (z_{2j} - z_{1i}) (m_{x1i} m_{x2j} + m_{y1i} m_{y2j} + m_{z1i} m_{z2j} - \\
& - 5(m_{x1i} (x_{2j} - x_{1i}) + m_{y1i} (y_{2j} - y_{1i}) + m_{z1i} (z_{2j} - z_{1i}))) \cdot \\
& \cdot \left. \frac{(m_{x2j} (x_{2j} - x_{1i}) + m_{y2j} (y_{2j} - y_{1i}) + m_{z2j} (z_{2j} - z_{1i}))}{((x_{2j} - x_{1i})^2 + (y_{2j} - y_{1i})^2 + (z_{2j} - z_{1i})^2)} \right) \Bigg)
\end{aligned} \tag{8}$$

В сравнении с другими приближенными методами, метод разбиения элементов системы на элементарные диполи обладает преимуществом в плане простоты и большей гибкостью в плане его применения к магнитным системам сложной конфигурации. Вместе с тем, точность метода зависит от качества разбиения и соотношения между размерами отдельных элементов и расстояния между ротором и статором системы подвеса, и, в большинстве случаев, заметно хуже точности определения сил методом магнитных зарядов и токов при том же количестве элементов разбиения.

В таблице 1 представлены сводные результаты зависимости силы отталкивания ротора и статора модельной системы от зазора. В нескольких методах расчет был проведен двумя способами – разбиением на мелкие поверхностные элементы (модель 1) и на крупные (модель 2) со значением поля, заданном аналитическими выражениями. Экспериментальные данные были интерполированы кривыми второго порядка на расчётные значения зазоров. Соответствующие

графики зависимостей значений величины силы отталкивания, полученных различными методиками и экспериментальных данных представлены на рисунке 2.

Таблица 1

Сводные результаты зависимостей силы отталкивания от зазора

Δh , мм	Тип расчётногo метода						
	Токов, модель1	Токов, модель2	Зарядов, модель1	Зарядов, модель2	Диполей	Ansoft	Экспер.
5	151.7	157.64	162.2	157.64	138.73	129.08	154.40
10	87.8	90.65	91.6	90.65	90.93	77.50	100.40
15	55.1	56.50	57.2	56.50	54.09	53.37	51.40
20	36.2	36.89	37.4	36.89	36.07	34.74	35.10
25	24.5	24.92	25.1	24.92	26.45	21.14	23.96
30	17	17.31	17.5	17.31	15.93	19.22	14.70
35	12.2	12.33	12.4	12.33	12.89	11.83	11.79
40	8.91	8.97	9.02	8.97	9.18	9.32	9.73

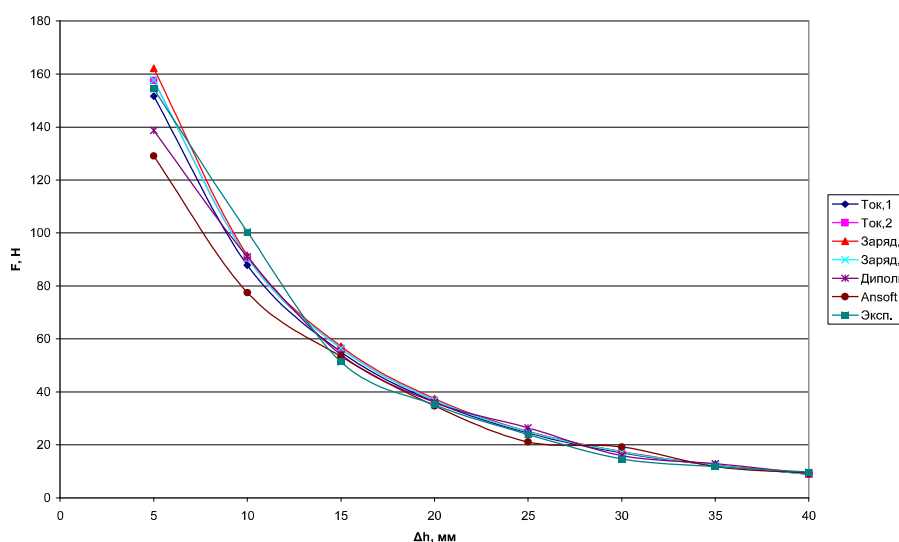


Рисунок 2 – Сравнение значений величины силы отталкивания, полученных различными методиками и из эксперимента

В таблице 2 представлены относительные величины значений сил отталкивания по сравнению со значениями сил, вычисленными по базовому методу модели. В качестве базового метода были приняты метод поверхностных токов и метод магнитных зарядов для маг-

нитных систем с цилиндрической симметрией. Соответствующие графики отношения сил отталкивания представлены на рисунке 3.

Таблица 2

Относительные значения силы отталкивания

Δh , мм	Тип расчётного метода						
	Токов, модель1	Токов, модель2	Зарядов, модель1	Зарядов, модель1	Диполей	Ansoft	Экспер.
5	0.96	1.00	1.03	1.00	0.88	0.82	0.98
10	0.97	1.00	1.01	1.00	1.00	0.85	1.11
15	0.98	1.00	1.01	1.00	0.96	0.94	0.91
20	0.98	1.00	1.01	1.00	0.98	0.94	0.95
25	0.98	1.00	1.01	1.00	1.06	0.85	0.96
30	0.98	1.00	1.01	1.00	0.92	1.11	0.85
35	0.99	1.00	1.01	1.00	1.05	0.96	0.96
40	0.99	1.00	1.01	1.00	1.02	1.04	1.08

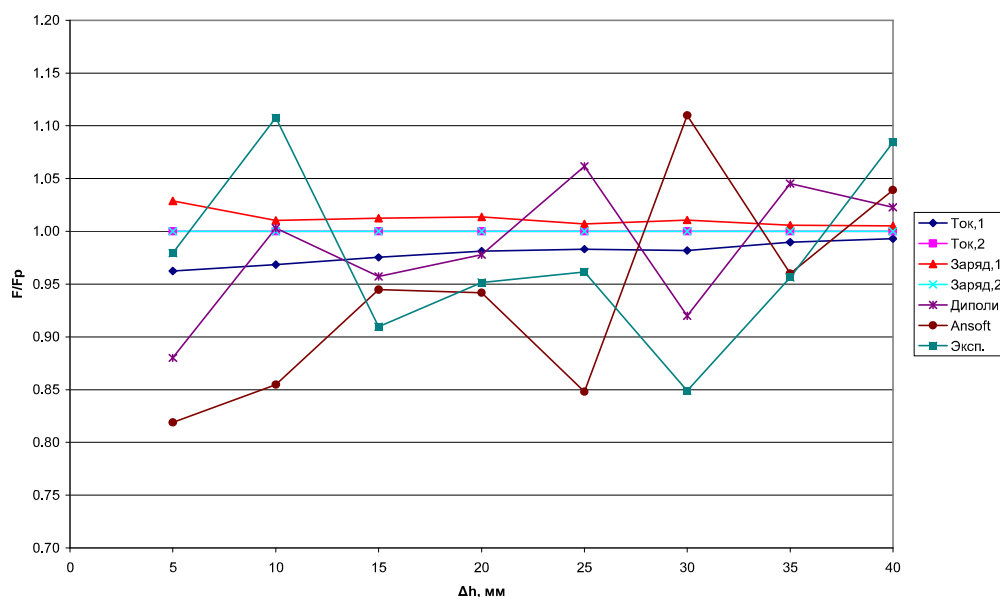


Рисунок 3 – Сравнение относительных значений сил отталкивания, полученных различными методиками из эксперимента

Данные, указанные в таблицах 1-2 и на рисунках 2-3 свидетельствуют о том, что принятые расчётные методы в целом удовлетворительно согласуются между собой и с экспериментальными данными. Разница между результатами расчётов не превышает 5-15% для разработанных расчётных методов и 15-20% для прямого реше-

ния уравнений магнитостатики в системах компьютерного моделирования. Различие вычисленных сил с экспериментом не превышает 10% по величине магнитного поля и 10-15% по величине сил, что лежит в области погрешностей полученных экспериментальных данных.

С помощью различных методов было вычислено магнитное поле и сила взаимодействия при различном значении зазора между постоянными магнитами выбранной магнитной системы. Был проведен сравнительный анализ полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарасов С.В. Магнитолевитирующий подвес роторов вертикально-осевых ветроэлектрических установок с Н-ротором Дарье на базе массива Хальбаха / С.В. Тарасов, М.Г. Снегирев, И.А. Дорош // Техническая механика. – 2010. – №1. – с. 94-103.
2. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Учебное пособие. Том II. Теория поля – 7-ое издание / Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 512 стр.
3. Synthesis about Analytical Approaches for Calculating the Magnetic Field Produced by Permanent Magnets of Various Topologies / R. Ravaud ,G. Lemarquand // PIERS Proceedings, Cambridge, USA, July 5-8, 2010.
4. Дорош И.А. Разработка алгоритма и программного средства для расчета параметров магнитного поля магнитного подвеса энергетической установки / И.А. Дорош, М.Г. Снегирев, С.В. Тарасов // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – 2011. – №5(76). – с.84-90