

Д.А. Дегтярев, В.П. Семененко, С.В. Тарасов
**СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАСТИ
ВЕРТИКАЛЬНО-ОСЕВЫХ ВЕТРОУСТАНОВОК**

Аннотация. Разработана инженерная методика определения собственных частот колебаний лопасти. Методика учитывает упругое соединение лопасти и траверсы, которое определяется отношением их жесткостных характеристик. Расчетные формулы представлены в виде, удобном для проведения различного рода анализов. Как частные случаи, при предельных значениях отношения жесткостей, получаются условия шарнирного опирания или жесткого соединения лопасти и траверсы.

Ключевые слова: лопасть, траверса, собственная частота колебаний, отношение жесткостей.

Введение

Решение задачи обеспечения динамической прочности вертикально-осевых ветроэлектрических установок (ВО ВЭУ) в типовых рабочих режимах требует знания значений собственных частот отдельных конструктивных элементов с целью обеспечения их рассогласования. Первый этап процесса проектирования, как правило, начинается с исследования ряда конструктивных вариантов траверсы, лопастей, ротора в целом, элементов трансмиссии, опорно-поворотного узла, опорной башни и выбора их параметров. Эти значения параметров служат для расчета собственных частот колебаний конструктивных элементов. При этом для обеспечения долговечности и безопасности работы ВО ВЭУ необходимо, чтобы собственные частоты элементов и подсистем отличались не менее чем в $\sqrt{2}$ раз. На этапе выбора базовых конструктивных решений по элементам конструкции актуальным является наличие простых и наглядных расчетных инженерных соотношений.

Для проектантов актуальным вопросом является не только выявление тенденций увеличения или уменьшения значений собственных частот колебаний при изменении отдельных проектных парамет-

ров, но и возможность давать численную оценку изменения величин собственных частот колебаний.

Целью настоящего исследования является разработка инженерной методики определения собственных частот колебаний лопасти с учетом реальных условий её соединения с траверсой.

Для решения поставленной задачи возможно использование специализированных программных САЕ-комплексов конечно-элементного анализа типа ANSYS, но их применение в ряде случаев является избыточным. Разработанная методика позволяет оперативно определить тенденции влияния проектных параметров на значения собственных частот и дать количественную оценку эффектам взаимодействия лопасти и траверсы.

Инженерная методика определения значений собственных частот колебаний лопасти

Рассматривается лопасть ВО ВЭУ с Н-ротором Дарье (рисунок 1) с двумя узлами крепления к траверсам (рисунок 2) расположенными симметрично относительно центральной части лопасти.



Рисунок 1 – ВО ВЭУ с Н-ротором Дарье



Рисунок 2 – Схема узла лопасть-траверсы

Узлу лопасть-траверсы ставится в соответствие расчетная схема в виде балки опирающейся на две симметрично расположенные опоры, расстояние между которыми составляет $2a$ (рисунок 3).

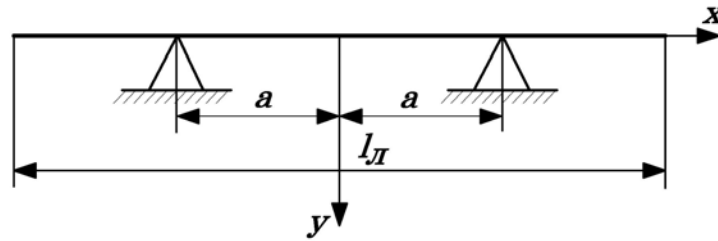


Рисунок 3 – Расчетная схема лопасти

Прогиб нейтральной оси лопасти описывался уравнением[1]:

$$Y(\bar{x}) = Y_0 K_1(\bar{x}) + \frac{K_3(\bar{x})}{\bar{\alpha}^2 E_L J_L} M_0 + \frac{K_4(\bar{x} - \bar{a})}{\bar{\alpha}^3 E_L J_L} R \Big|_{\bar{x} > \bar{a}} + \frac{K_3(\bar{x})}{\bar{\alpha}^2 E_L J_L} M_T - \frac{K_3(\bar{x} - \bar{a})}{\bar{\alpha}^2 E_L J_L} M_T \Big|_{\bar{x} > \bar{a}} \quad (1)$$

где Y_0, M_0 – прогиб и изгибающий момент в начале координат (в центральной части лопасти); R, M_T – сосредоточенные сила и момент реакции в месте расположения опор; $E_L J_L$ – изгибная жесткость лопасти;

$\bar{\alpha} = \alpha l_L$ – безразмерный параметр, $\alpha^4 = \frac{\omega^2 F_L \rho_L}{E_L J_L}$; ω – собственная частота колебаний лопасти;

F_L – площадь поперечного сечения лопасти;

ρ_L – плотность материала лопасти; l_L – длина лопасти; $2\bar{a} = \frac{2a}{l_L}$ –

безразмерное расстояние между опорами лопасти; $\bar{x} = \frac{x}{l_L}$ – безразмерная продольная координата по лопасти с началом отсчета в середине лопасти ($0 \leq \bar{x} \leq 0.5$).

Функции Крылова, входящие в (1), имеют вид

$$\begin{aligned} K_1(\bar{x}) &= 0,5(ch\bar{\alpha}\bar{x} + \cos\bar{\alpha}\bar{x}), & K_2(\bar{x}) &= 0,5(sh\bar{\alpha}\bar{x} + \sin\bar{\alpha}\bar{x}), \\ K_3(\bar{x}) &= 0,5(ch\bar{\alpha}\bar{x} - \cos\bar{\alpha}\bar{x}), & K_4(\bar{x}) &= 0,5(sh\bar{\alpha}\bar{x} - \sin\bar{\alpha}\bar{x}). \end{aligned} \quad (2)$$

В формулы (2) входит четыре неизвестных величины - Y_0, M_0, R, M_T . Необходимые для их нахождения четыре уравнения получены из следующих условий.

Прогиб лопасти в районе опоры равен нулю

$$Y(\bar{a}) = Y_0 K_1(\bar{a}) + \frac{K_3(\bar{a})}{\bar{\alpha}^2 E_L J_L} M_0 + \frac{K_3(\bar{a})}{\bar{\alpha}^2 E_L J_L} M_T = 0 \quad (3)$$

Изгибающий момент и перерезывающая сила на торце лопасти отсутствуют

$$E_{\text{Л}}J_{\text{Л}}Y''(0.5) = E_{\text{Л}}J_{\text{Л}}\bar{\alpha}^2 K_3(0.5)Y_0 + K_1(0.5)M_0 + K_1(0.5)M_T + \frac{K_2(0.5 - \bar{a})}{\bar{\alpha}}R - K_1(0.5 - \bar{a})M_T = 0 \quad (4)$$

$$E_{\text{Л}}J_{\text{Л}}Y'''(0.5) = E_{\text{Л}}J_{\text{Л}}\bar{\alpha}^3 K_2(0.5)Y_0 + K_4(0.5)\bar{\alpha}M_0 + K_1(0.5 - \bar{a})R - K_4(0.5 - \bar{a})\bar{\alpha}M_T = 0 \quad (5)$$

Четвертое уравнение получено из условия совместности деформаций лопасти и траверсы в районе их соединения, выражающееся в равенстве угла поворота поперечного сечения лопасти $\vartheta_{\text{Л}}$ в районе опоры и угла поворота поперечного сечения траверсы $\vartheta_{\text{Т}}$ на ее конце

$$\vartheta_{\text{Л}}(\bar{a}) = \vartheta_{\text{Т}}(l_{\text{Т}}) \quad (6)$$

где $l_{\text{Т}}$ - длина траверсы.

Применение метода начальных параметров и функций Крылова для описания деформированного состояния траверсы с использованием выражения (6) дает четвертое уравнение в виде

$$\bar{\alpha}K_4(\bar{a})Y_0 + \frac{K_2(\bar{a})}{\bar{\alpha}E_{\text{Л}}J_{\text{Л}}}M_0 + \frac{K_2(\bar{a})}{\bar{\alpha}E_{\text{Л}}J_{\text{Л}}}M_T + \frac{K_2(l_{\text{Т}})}{\bar{\alpha}_{\text{Т}}E_{\text{Т}}J_{\text{Т}}}M_T = 0 \quad (7)$$

где $E_{\text{Т}}J_{\text{Т}}$ - изгибная жесткость траверсы; $\bar{\alpha}_{\text{Т}} = \alpha_{\text{Т}}\ell_{\text{Т}}$ - безразмерный параметр; $\alpha_{\text{Т}}^4 = \frac{\omega^2 F_{\text{Т}} \rho_{\text{Т}}}{E_{\text{Т}}J_{\text{Т}}}$; $F_{\text{Т}}$ - площадь поперечного сечения траверсы;

$\rho_{\text{Т}}$ - плотность материала траверсы; $K_2(l_{\text{Т}})$ - функция Крылова, определяемая параметрами траверсы.

Система уравнений относительно неизвестных Y_0, M_0, R, M_T , полученная на основе условий (3) - (5), (7) имеет вид

$$\sum_{i=1}^4 a_{ij}X_i = b_i, j = 1...4 \quad (8)$$

где $X = (Y_0, M_0, R, M_T)^T$; $b_i = 0$

Расчет значений собственных частот колебаний сводился к отысканию собственных значений определителя системы (8) с элементами

$$a_{1,1} = K_1(\bar{a}\bar{\alpha}); a_{2,1} = \bar{\alpha}^2 K_3(0,5\bar{\alpha}); a_{3,1} = \bar{\alpha}^3 K_2(0,5\bar{\alpha}); \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
a_{4,1} &= \bar{\alpha} K_4(\bar{a}\bar{\alpha}); \quad a_{1,2} = \frac{K_3(\bar{a}\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}^2 E_l J_l}; \quad a_{2,2} = \frac{K_1(0,5\bar{\alpha})}{E_l J_l}; \quad a_{3,2} = \bar{\alpha} \frac{K_4(0,5\bar{\alpha})}{E_l J_l}; \\
a_{4,2} &= \frac{K_2(\bar{a}\bar{\alpha})}{\bar{\alpha} E_l J_l}; \quad a_{1,3} = 0; \quad a_{2,3} = \frac{K_2((0,5-\bar{a})\bar{\alpha})}{\bar{\alpha} E_l J_l}; \quad a_{3,3} = \frac{K_1((0,5-\bar{a})\bar{\alpha})}{E_l J_l}; \\
a_{4,3} &= 0; \quad a_{1,4} = \frac{K_3(\bar{a}\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}^2 E_l J_l}; \quad a_{2,4} = \frac{K_1(0,5\bar{\alpha}) - K_1((0,5-\bar{a})\bar{\alpha})}{E_l J_l}; \\
a_{3,4} &= \bar{\alpha} \frac{K_4(0,5\bar{\alpha}) - K_4((0,5-\bar{a})\bar{\alpha})}{E_l J_l}; \quad a_{4,4} = \frac{K_2(\bar{a}\bar{\alpha})}{\bar{\alpha} E_l J_l} + \frac{K_2(\bar{\alpha}_T)}{\bar{\alpha}_T E_T J_T}
\end{aligned}$$

Определитель с элементами (9) является некоторым обобщением результатов исследований по определению значений собственных частот колебаний лопасти. В нем учтена не только сосредоточенная сила в месте соединения лопасти и траверсы, но сосредоточенный момент в этом месте.

Анализ элементов определителя (9) показал, что нахождение его собственных значений зависит от жесткостных и массовых характеристик лопасти и траверсы, а так же от расстояния между опорами.

Для получения удобных в инженерной практике простых расчетных соотношений, определяющих значения собственных частот колебаний лопасти были выделены три расчетных случая. Их границы определяются отношением жесткостных параметров лопасти и траверсы.

Первый расчетный случай соответствует шарнирному соединению лопасти и траверсы. Он реализуется, когда жесткостные параметры лопасти ($E_l J_l$) значительно превосходят жесткостные параметры траверсы ($E_T J_T$). Сосредоточенный изгибающий момент в месте соединения лопасти и траверсы $M_T = 0$, угол поворота не равен нулю и, имеет максимальное значение $\vartheta = \vartheta_{max}$.

При шарнирном опирании для значений $0 \leq \bar{a} \leq 0.5$ порядок определителя (9) изменяется с четвертого к третьему. Он может быть представлен в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}^2 E_l K_1(\bar{a}\bar{\alpha}) & K_3(\bar{a}\bar{\alpha}) & 0 \\ \bar{\alpha}^3 E_l K_3(0,5\bar{\alpha}) & \bar{\alpha} K_1(0,5\bar{\alpha}) & K_2[(0,5-\bar{a})\bar{\alpha}] \\ \bar{\alpha}^3 E_l K_2(0,5\bar{\alpha}) & \bar{\alpha} K_4(0,5\bar{\alpha}) & K_1[(0,5-\bar{a})\bar{\alpha}] \end{vmatrix} \quad (10)$$

Раскрытие определителя (10) приводит к уравнению:

$$\begin{aligned} \Phi_{uu}(\bar{a}, \bar{\alpha}) = & \{ch[(0,5 - \bar{a})] \bar{\alpha} + \cos[(0,5 - \bar{a})] \bar{\alpha}\} \times \\ & \times \{ch0,5\bar{\alpha} \cdot \cos \bar{a}\bar{\alpha} + ch\bar{a}\bar{\alpha} \cdot \cos 0,5\bar{\alpha}\} - \\ & - \{sh[(0,5 - \bar{a})\bar{\alpha}] + \sin[(0,5 - \bar{a})\bar{\alpha}]\} \times \\ & \times \{sh0,5\bar{\alpha} \cdot \cos \bar{a}\bar{\alpha} - ch\bar{a}\bar{\alpha} \cdot \sin 0,5\bar{\alpha}\} \end{aligned} \quad (11)$$

При одной центральной опоре ($\bar{a} = 0$) трансцендентное уравнение (11) упрощается и принимает вид

$$ch0,5\bar{\alpha} \cdot \cos 0,5\bar{\alpha} = -1, \quad (12)$$

а при двух опорах по краям лопасти ($\bar{a} = 0,5$) становилось обычным тригонометрическим уравнением

$$\cos 0,5\bar{\alpha} = 0 \quad (13)$$

Сравнение вида уравнений (12), (13) и их корней с приведенными в [2] показало, что корни этих уравнений характеризуют только симметричные колебания лопасти. Для учета и антисимметричных колебаний в случае шарнирного опирания необходимо рассматривать уравнение

$$\sin 0,5\bar{\alpha} = 0 \quad (14)$$

Корни уравнения (14) $\bar{\alpha} = n \cdot \pi$, корни уравнения (13) $\bar{\alpha} = (2n - 1) \cdot \pi$. При $n = 1, 2, 3, \dots$ ряд корней уравнения (14) $\bar{\alpha} = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, уравнения (13) - $\bar{\alpha} = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

Второй расчетный случай характеризуется жесткостными параметрами лопасти и траверсы, имеющими один и тот же порядок. Этот случай характерен для упругого соединения лопасти и траверсы. Значения сосредоточенного изгибающего момента и угла поворота в месте соединения лопасти и траверсы определяются на основе контактной задачи сопряжения лопасти и траверсы. Их значения определяются неравенствами

$$0 < M_T < M_T^{max}; \vartheta_{max} < \vartheta < 0 \quad (15)$$

Третий расчетный случай реализуется, когда жесткостные параметры лопасти значительно меньше жесткостных параметров траверсы. Сосредоточенный изгибающий момент в месте соединения лопасти и траверсы достигает своего максимального значения $M_T = M_T^{max}$, а угол поворота $\vartheta = 0$. Этот случай характерен для жесткого соединения лопасти и траверсы. Для нахождения значений соб-

ственных колебаний используется определитель системы (8), в котором коэффициент $a_{4,4}$ состоит не из двух, а из одного слагаемого. Отсутствует слагаемое, определяемое жесткостными и массовыми характеристиками траверсы. Коэффициент $a_{4,4}$ был представлен в виде

$$a_{4,4} = \frac{K_2(\bar{a}\bar{\alpha})}{\bar{\alpha} \cdot E_{Л} J_{Л}} \quad (16)$$

Раскрытие определителя для третьего расчетного случая приводит к трансцендентному уравнению

$$\begin{aligned} \Phi_{жс}(\bar{a}, \bar{\alpha}) = & \left\{ 1 + ch \left[(0,5 - \bar{\alpha}) \bar{\alpha} \right] \cdot \cos \left[(0,5 - \bar{a}) \bar{\alpha} \right] \right\} \times \\ & \times (ch \bar{a} \bar{\alpha} \cdot \sin \bar{a} \bar{\alpha} + sh \bar{a} \bar{\alpha} \cdot \cos \bar{a} \bar{\alpha}) \end{aligned} \quad (17)$$

При одной центральной опоре выражение (17) вырождается. При предельном переходе оно дает значение корня такое же, как и при шарнирном опирании. При двух опорах по краям лопасти уравнение (17) переходит к уравнению вида

$$cth 0,5 \bar{\alpha} \cdot tg 0,5 \bar{\alpha} = -1 \quad (18)$$

Корни этого уравнения также описывают симметричные колебания лопасти. Для учета антисимметричных колебаний в случае жесткого опирания необходимо рассматривать уравнение

$$ch \bar{\alpha} \cdot \cos \bar{\alpha} = 1 \quad (19)$$

Корни уравнения (19) $\bar{\alpha} = 1,875; 4,694; 7,855; 10,996; 14,137; 17,279 \dots$
Корни уравнения (18) - $\bar{\alpha} = 4,72; 11; 17,28$

Формула для определения значений собственных частот колебаний представлена в виде

$$\omega_i = \beta_i(\bar{a}, \chi) \cdot \omega_0 \quad (20)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_{Л}}{m_{Л}}}$, $C_{Л} = \frac{E_{Л} J_{Л}}{l_{Л}^3}$ - коэффициент изгибной жесткости лопасти; $m_{Л}$ - её масса; $\chi = \frac{E_{Л} J_{Л}}{l_{Л}} \cdot \frac{l_{Т}}{E_{Т} J_{Т}}$ - отношение изгибных жесткостных параметров лопасти и траверсы.

В выражении (20) коэффициент $\beta_i(\bar{a}, \chi)$ характеризует i -ю форму симметричных колебаний, зависит от расстояния между опорами и отношения изгибных жесткостных параметров лопасти и траверсы. Он определялся по формуле

$$\beta_i(\bar{a}, \chi) = k_i^2(\bar{a}, \chi) \quad (21)$$

В выражении (21) k_i в двух предельных случаях – шарнирного и жесткого соединения лопасти и траверсы – являлись корнями уравнений (11), (17). Для упругого соединения лопасти и траверсы в качестве значений k_i служат собственные значения определителя системы (8).

На рис.4 представлена зависимость первых двух значений коэффициента β_i от безразмерного расстояния между опорами для условий шарнирного и жесткого соединения лопасти и траверсы.

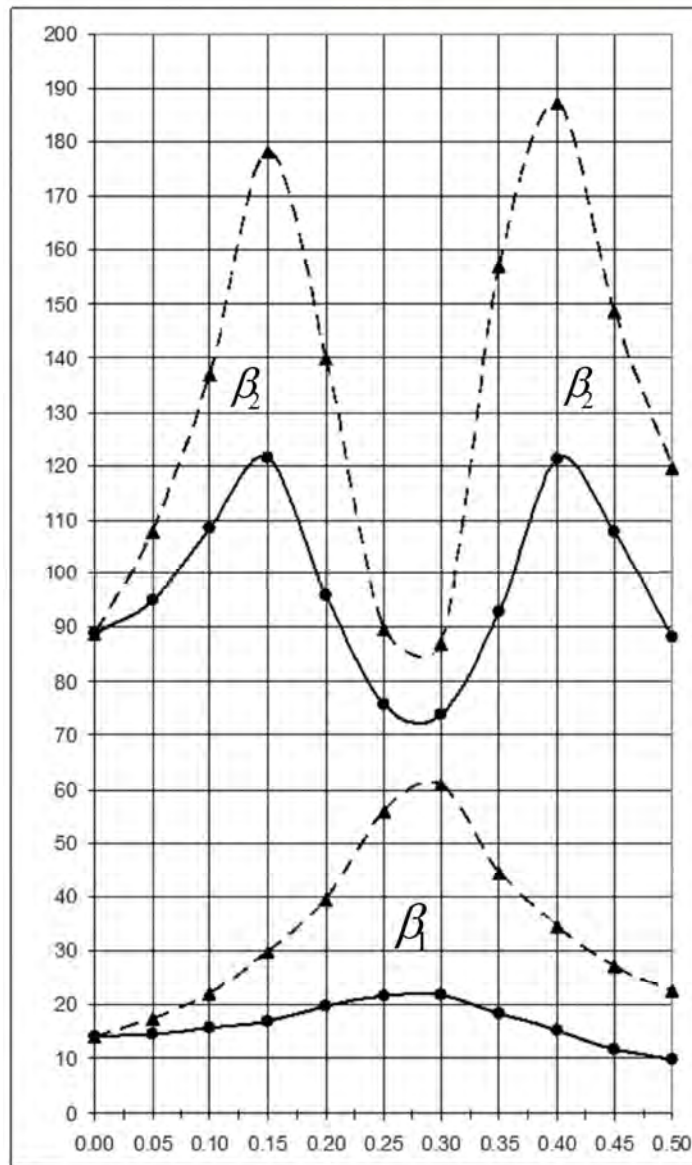


Рисунок 4 - Зависимость значений коэффициентов β_1, β_2 от безразмерного расстояния между опорами лопасти \bar{a} при шарнирном (сплошная линия) и жестком (пунктирная) соединении лопасти и траверсы

Для условий упругого соединения лопасти и траверсы значения β_i лежат между двумя значениями, полученными при условии шарнирного ($M_T = 0, \vartheta = \vartheta_{max}$) и жёсткого ($M_T = M_T^{max}, \vartheta = 0$) соединения лопасти и траверсы.

Формула (20) проста, наглядна и удобна для анализа влияния жесткостных ($C_{Л}$), массовых ($m_{Л}$) и геометрических (\bar{a}) характеристик на значения собственных колебаний симметричной формы.

В частности, путем дифференцирования полученных аналитических выражений (11) и (17) было получено значение безразмерного расстояния между опорами лопасти $\bar{a} = 0.277$, при котором реализуется экстремум β . При данном значении β первая частота имеет максимум, а вторая – минимум.

Выводы

Для лопасти с двумя симметричными относительно её центральной части точками опоры разработан инженерный метод определения значений собственных частот колебаний лопасти при ее упругом соединении с траверсой.

Основой разработанной методики являются расчетные формулы и графики. С их помощью можно проследить тенденцию изменения значения собственных частот колебаний лопасти от жесткостных, массовых и геометрических параметров лопасти и траверсы.

Расчетные формулы состоят из стандартной части, как корень квадратный из отношения изгибной жесткости лопасти к её массе и коэффициента β . Данный коэффициент зависит от отношения изгибной жесткости лопасти к изгибной жесткости траверсы и от расстояния между опорами лопасти.

В зависимости от соотношения изгибных жесткостей лопасти и траверсы выделены три характерных случая. В первом случае, когда жесткостные параметры лопасти значительно превосходят жесткостные параметры траверсы, в месте их соединения сосредоточенный изгибающий момент равен нулю. Этот случай соответствует классическому – шарнирному – опиранию. При этом угол поворота лопасти в месте её соединения с траверсой отличен от нуля и имеет максимальное значение.

Во втором случае соединение лопасти и траверсы происходит в соответствии с их конечными значениями жесткостных параметров.

При этом, значение сосредоточенного изгибающего момента и угол поворота лопасти в месте её соединения с траверсой отличны от нуля, но меньше максимально возможных величин. Этот случай получил название упругого соединения лопасти и траверсы.

Третий случай определен, когда жесткостные параметры лопасти значительно меньше жесткостных параметров траверсы. Угол поворота лопасти в месте её соединения с траверсой равен нулю, а сосредоточенный изгибающий момент достигает своего максимального значения. Такое соединение лопасти и траверсы было охарактеризовано как жесткое соединение.

Определена область значений безразмерного расстояния между опорами лопасти, при котором реализуются экстремальные значения собственных частот колебаний лопасти. При $\bar{a} \approx 0.27...0.28$ значение первой частоты имеет максимум, а значение второй – минимум.

Практические рекомендации

Представленные результаты могут служить основой для выбора шага разбиения лопасти при использовании САЕ-комплексов конечно-элементного анализа типа ANSYS.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федосьев В.И. Сопротивление материалов / В.И. Федосьев - М.:Наука, 1972 – 543 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко – М.:Наука, 1967 – – 442с.