УДК 656.211.3:656.211.5

В.В. Скалозуб, Л.А. Паник

# О ПОСТРОЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ПЛАНИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

*Аннотация. В статье построены и исследованы математические модели экономических принципов равновесия для неоднородных транспортных потоков. Модели обобщают принципы Вардропа, и предназначены для анализа и планирования неоднородных потоков в транспортных сетях.*

*Ключевые слова: транспортные потоки, принципы Вардропа, неоднородный поток, математические модели равновесия.*

## Введение

Большинство транспортных потоков неоднородны – содержат элементы с различными свойствами по функциональному назначению, эффективности, требованиям к процессу транспортировки по времени, сервисам др. При планировании и рациональной организации перевозок учитывают и формируют однородные в определенном смысле процессы, исходя из главных характеристик и требований. С учетом этого разработаны различные математические модели транспортных процессов, в том числе как задач оптимального или рационального планирования [1 – 3]. Непрерывное развитие методов и средств анализа свойств элементов потоков, а также создание современных информационно-коммуникационных технологий и систем, создают возможность для все более полного учета требований и свойств отдельных категорий объектов транспортных потоков, а также их взаимодействия. В настоящее время одним из глобальных решений проблем организации и управления транспортными потоками является создание и продвижение интеллектуальных транспортных систем (ИТС) [4].

Учет специфических категорий требований или свойств объектов транспортных потоков существенно влияет на содержание и сложность соответствующих моделей и методов их анализа и плани-



 ISSN 1562-9945

рования [5]. В [1] и других исследованиях в частности рассмотрен один из подходов к моделированию и исследованию транспортных потоков, основанный на теории конкурентного бескоалиционного равновесия. Теория дает возможность достаточно адекватно описать механизм функционирования автотранспортных улично-дорожных сетей. При этом учитываются основные элементы системы, включающие в себя транспортную сеть, потребности в перевозках, критерии эффективности транспортной системы и общие принципы ее функционирования. Указанные исследования все же рассматривают однородные потоки. Вместе с тем проблемы анализа и планирования неоднородных потоков в сетях остаются актуальными.

**Модели экономического равновесия**
**для описания транспортных систем**

Для выяснения отличий моделей неоднородных транспортных потоков, остановимся на некоторых вопросах моделирования процессов функционирования однородных автотранспортных сетей [1, 3]. При этом основное внимание уделим формированию принципов, отражающих содержание транспортного равновесия. В [1] выполнено исследование транспортных потоков с помощью теории экономического равновесия, как одного из наиболее агрегированных способов описания транспортных систем. Этот подход соответствует модели черного ящика, на входе которого X – это нагрузка на транспортную систему (общие затраты, направленные на перевозки), а на выходе Y – объемы грузов или количество людей, перевезенные системой. Кроме описания технологически допустимых сочетаний затрат X и выхода Y в задачу моделирования также входит формирование понятия эффективного функционирования системы, а также отбор и анализ эффективных вариантов. Полученные при этом модели являются одним из инструментов для объективной оценки эффективности проектов по модификации транспортной системы, улучшения качества транспортного обслуживания и др.

Для определения рациональных объемов загрузки транспортной сети выполняется моделирование транспортных потоков, которое рассматривается как задача принятия решений. При этом в первую очередь выявляются правила, по которым отдельные транспортные средства выбирают маршрут следования. Ряд моделей транспортного равновесия формируется на основе поведенческих принципов, которые были окончательно сформулированы в [2]. При этом постулируются два принципа.

1) Независимый выбор маршрута следования, соответствующего минимальным транспортным расходам каждого (первый принцип Вардропа, В1).

2) Выбор маршрутов следования пользователями, исходя из минимизации общих транспортных расходов в сети (второй принцип Вардропа, В2).

Согласно В1 (пользовательская оптимизация) распределение транспортных потоков соответствует конкурентному бескоалиционному равновесию, предполагающему «совершенный эгоизм» всех участников дорожного движения (выбирается маршрут, который соответствует собственным минимальным временным, финансовые и др. затратам). Этот поведенческий принцип предполагает допущения о совершенной информированности участников движения о ситуациях (знание затрат на передвижения по тем или иным маршрутам). В настоящее время такое предположение технически и информационно реализуемо, поскольку интенсивно развиваются и внедряются автоматизированные автонавигаторы и ИТС. Согласно В1 предполагается малое влияние отдельного участника движения на затраты по всем маршрутам. Заметим, что такое предположение заведомо неверно для крупногабаритных транспортных средств, неоднородных потоков, хотя приемлемо для легковых автомобилей.

Второй принцип Вардропа (системная оптимизация) предполагает централизованное управление движением в сети. Соответствующее ему распределение транспортных потоков называют системным оптимумом. Примером пользователей, передвигающихся согласно второму принципу, служат водители маршрутизированного транспорта. Ранее поведенческие принципы транспортного равновесия сформулировали Ф. Найт [3] и А. Пигу [6]. Они утверждали, что все участники движения, направляющиеся из одного узла сети в другой, распределяются по различным маршрутам таким образом, чтобы удельные (в расчете на один автомобиль) затраты на проезд были одними и теми же для всех.

Рассмотрим соотношение между конкурентным и системным равновесием. Общие затраты при системной оптимизации не могут превышать общих затрат при пользовательской оптимизации. Поэто-

 ISSN 1562-9945

му разность между совокупными транспортными затратами пользователей сети согласно первому или второму принципам Вардропа можно считать ценой несогласованности, отсутствия взаимодействия и организации участников потока. Принципиальная разница между конкурентным транспортным равновесием и системным оптимумом указана в работе А. Пигу [6], где рассмотрена простейшая транспортная сеть, состоящую из двух дуг, соединяющих два пункта: пункт А и бизнес-зону В (см. рис. 1).

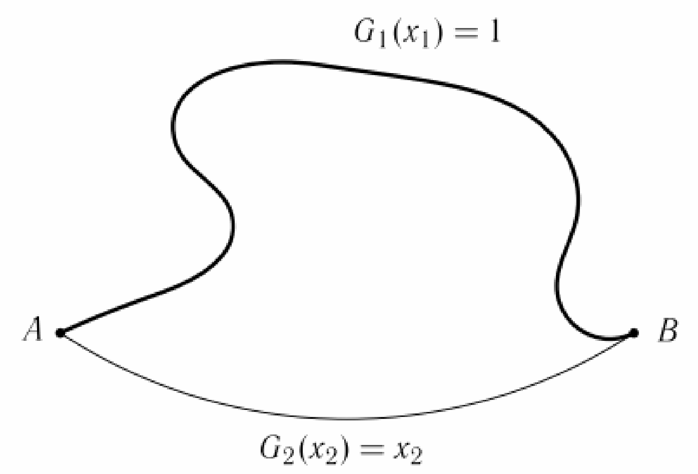


Рисунок 1 - Пример транспортной сети

Обозначим через x1 и x2 доли общего объема транспортного потока, следующего по первой и второй дугам. Эти пути в сети неравноценны. Первая – способна принять весь поток автомобилей из пункта А в пункт В без ограничения и замедления движения. Проезд по ней требует определенного времени G1, которое считаем равным часу – G1(x1)=1. Второй путь существенно короче, но здесь движение существенно зависит от величины потока, замедляется при наличии на нем значительного потока автомобилей. Считается, что время проезда по второй дороге G2 линейно зависит от потока x2 по ней и задается согласно G2(x2)=x2.

В соответствии с первым принципом Вардропа равновесному транспортному состоянию будет соответствовать следующее распределение потоков (x1, x2)

$$
\begin{aligned}
&G1(x_1) = G2(x_2);\\
&x_1 + x_2 = 1; \qquad (1)\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;
\end{aligned}
$$

откуда $x_1 = 0, x_2 = 1$; при этом оценка затрат равна $G(x_1, x_2) = 1 * x_1 + x_2 * x_2 = 1$;

Для системного оптимума распределение потоков в соответствии со вторым принципом Вардропа определяется путем решения оптимизационной задачи вида:

$$\begin{gathered} G(x_1, x_2) = 1 * x_1 + x_2 * x_2 \to \min \\ x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{gathered} \qquad (2)$$

решение которой равно: $x_1^* = x_2^* = 0.5$; здесь $G(x_1^*, x_2^*) = 0.75$; пример показывает, что суммарные затраты в конкурентном равновесии могут составлять 4/3 от суммарных затрат системного оптимума, что также устанавливается в других исследованиях [1].

**Обобщение моделей экономического равновесия в применении к неоднородным транспортным потокам**

Указанные принципы равновесия были сформулированы для однородных автотранспортных потоков [2, 3, 6]. Дадим интерпретацию этим принципам моделирования транспортного равновесия, исходя из развития методов формирования критериев оптимальности для решения задач анализа и планирования, а также с учетом введения дополнительных требований относительно «индивидуальных» свойств для классов элементов в моделях планирования и управления неоднородными потоками.

Принцип равенства удельных затрат В1 соответствует широкому классу подобных «физических принципов» оптимальности (условий рациональности), которые выдвигались в разных областях техники и технологий на начальных этапах развития теории и распространения практики вариантного и оптимального проектирования и планирования [7, 8]. Примерами подобных естественных или физических принципов, например, в области оптимального проектирования строительных конструкций (ОПК) являются «равнопрочность», «равнонапряженность», «равноустойчивость» и др. [8]. Их общность состоит в конкретных формах реализации принципа неопределенности Бернулли, что позволяет построить систему разрешающих уравнений. Как известно, принципы равенства, упрощая расчетные и вычислительные модели, в общем случае не обеспечивают оптимальности

 ISSN 1562-9945

решения (проекта) в общепринятой математической формулировке, как задач ОПК, так и других [7]. Здесь также уместно отметить множественность возможных формулировок таких принципов.

Рассмотрим вопрос обобщения принципов В1 и В2, задачи (1) и (2) индивидуальной рациональности и системной оптимизации транспортного равновесия, в условиях нескольких категорий объектов автотранспортного потока. Для простоты изложения постановки задачи и системы обозначений возьмем ту же транспортную сеть из 2-х дуг (рис. 1). Далее пусть имеем поток, состоящий из 2-х категорий автомобилей К1, К2. Обозначим $\overline{x_i^k}$ - поток по i-ой дуге объектов k-ой категории, а $x_i^{(k)}$ – доли потока k-ой категории на i-ой дуге, $\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} x_i^{(k)} = 1$. Обозначим $x_i^{(1)} + x_i^{(2)} = Z_i$ доли потока по i-ой дуге, а $x_1^{(k)} + x_2^{(k)} = P_k$ доли автомобилей k-ой категории. $\sum_{i=1}^{2} Z_i = 1$, $\sum_{k=1}^{2} P_k = 1$, Учитывая предположения модели (2) о зависимости затрат от величины потока, обозначим удельные затраты на первой дуге для двух видов транспорта $\beta_1$, а для второй дуги $\beta_2$. Получим математическую модель принципа равновесия в потоке В2 вида:

$$G(x_1, x_2) = \beta_1 * Z_1 + \beta_2 * Z_2^2 \to \min$$

$$\begin{gathered} 0 \le \overline{x_i^k} \le c_i^k,\ i = 1,2 \\ \overline{x_i^1} + \overline{x_i^2} \le c_i,\ i = 1,2 \\ \beta_1 + \beta_2 = 1 \end{gathered} \tag{3}$$

где $c_i^k$ - пропускная способность на i-ой дуге для k-ой категории, $c_i$ - общая пропускная способность i-ой дуги.

От примера частного случая В2 перейдем к дальнейшему обобщению моделей Вардропа. Принцип Вардропа 1 (ОВ1) содержательно состоит в следующем: для каждой k-ой категории транспортного потока на всех его допустимых маршрутах удельные затраты (на каждую единицу потока) будут одинаковыми. При этом получаем следующую обобщенную модель принципа равновесия неоднородного потока (ОВ1):

$$\forall k : G(x_p^{(k)}) = G(x_q^{(k)});\ \ \forall (p,q) : x_p^{(k)}, x_q^{(k)} \in X^{(k)}; \tag{4}$$

$$\sum_{p} x_p^{(k)} = X^{(k)}, \quad \sum_{k} X^{(k)} = 1; \qquad (5)$$

$$x_p^{(k)} \geq 0\,,\ p \in I_p\,. \qquad (6)$$

В (4) – (6) $p \in I_k$ множество индексов маршрутов для категории транспорта «$k$».

Используя такие же предпосылки, обобщенный принцип Вардропа 2 (ОВ2), соответствующий требованию системной оптимизации для «k» участников потока, может быть представлен следующей моделью равновесия:

$$G_*(\bar{X}) = \sum_{k}\sum_{i} \beta_i^{(k)} (x_i^{(k)})^{(1+\gamma(i,k))} \to \min \qquad (7)$$

$$\sum_{k} x_i^{(k)} \leq c_i; \quad 0 \leq x_i^{(k)} \leq c_i^{(k)};\ i \in I_X\,; \qquad (8)$$

$$\sum_{k}\sum_{i} \beta_i^{(k)} = 1\,. \qquad (9)$$

В модели ОВ2 (7) – (9) параметры $\beta_i^{(k)}$ удельные затраты на маршруте $x_i^{(k)}$ k-ого участника транспортного потока; $\gamma(i,\mathrm{k})$ – параметр, который учитывает зависимость удельных затрат по в зависимости от значения потока $x_i^{(k)}$. Например, в модели (2) этот параметр равен 1. Остальные обозначения и ограничения соответствуют модели ОВ1 (4) – (6). Так при k=2 и $\gamma(\mathrm{i},k) = 1$ получаем математическую модель (7) – (9) ОВ2 в виде (3).

Реализация последней модели (3) равновесия ОВ2 позволила получить естественное заключение, что с увеличением удельной стоимости проезда транспортных средств на первой дуге растет поток по второй $-\overline{x_2^k}$. То же утверждение было получено и для транспортных средствах, следующих по первой дуге, рис. 1 .

**Выводы**

В работе получены обобщения моделей для экономических принципов равновесия транспорных потоков Вардропа, (4) – (6) и (7) – (9). Эти модели для однородных потоков переходят в ранее известные. Заметим, что помимо них могут быть предложены и другие модели равновесия неоднородных транспортных потоков. Так вместо чистых стратегий распределения «$k$» категорий участников потока согласно решению (4) – (6), можно рассмотреть принцип равновесия Нэша [9] в смешанных стратегиях для некооперативных игр и др. Задачи описания неоднородности транспортных потоков еще не исследованы в достаточной мере, а учет различных форм неоднородности приводит к необходимости совершенствования их математических моделей, а также усовершенствования методов их реализации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гасников В.А. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие / А.В. Гасников и др. М.: МЦНМО, 2013. - 428 с.
2. Wardrop J. Some Theoretical Aspects of Road Tra ffic Research / Proceedings of the Institute of Civil Engineers. 1952.
3. Knight F. H. Some fallacies in the interpretation of social cost / The Quarterly Journal of Economics. 1924. V. 38, № 4. P. 582–606.
4. Скалозуб В.В. Интеллектуальные транспортные системы железнодорожного транспорта (Основы инновационных технологий) / В. В. Скалозуб, В. П. Соловьев, И. В. Жуковицкий, К. В. Гончаров – Д.: Изд-во Днепропетр. нац. ун-та ж.-д. трансп. им. акад. В. Лазаряна, 2013. – 208 с.
5. Скалозуб В.В. Развитие многопродуктовых и многокритериальных моделей потоковых задач с учетом специализации носителей потоков / В.В. Скалозуб, Л.А. Паник, Є.С. Блохін. Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2011 - №4 - С.7-11
6. Пигу А. С. Экономическая теория благосостояния / А.С. Пигу. Т. 1 –2. Сер. Экономическая мысль Запада. М.: Прогресс, 1985.
7. Рейтман М.И., Шапиро Г.С. Методы оптимального проектирования деформируемых тел / М.И. Рейтман, Г.С. Шапиро – М.: Наука, 1976. – 268 с.
8. Лихтарников Я.М. Вариантное проектирование и оптимизация стальных конструкций / Я.М. Лихтарников – М. Стройиздат, 1979, – 319 с.
9. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. / Н. Н. Воробьев. М.: Наука, 1985.