

АППРОКСИМАЦИЯ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ И ПОИСК ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ

Аннотация. В статье рассмотрена задача кусочно-линейной аппроксимации момента инерции плоского сечения, которая возникает при решении проблемы оптимизации топологии стержневой системы и проверке ее на устойчивость.

Ключевые слова: аппроксимация, момент инерции, сечение, устойчивость, оптимизация.

Введение

Оптимальное проектирование конструкций — сложная междисциплинарная проблема, которая вынуждена решать множество зачастую противоречащих друг другу задач. Важность этой проблемы подчеркивается тем фактом, что конечная стоимость сооружения во многом зависит от количества израсходованного материала [1], поэтому оптимизационные методы, позволяющие снизить материалоемкость без ущерба инженерно-техническим требованиям, являются ключевыми при проектировании конструкции.

С другой стороны, огромное разнообразие численных и аналитических методов порождает как проблему поиска общей подходящей стратегии оптимизации, так и проблему применимости того или иного метода на определенном этапе проектирования. Большое количество работ [2] посвящено частным оптимизационным задачам, в которых практически не уделяется внимание вопросам комбинирования этих задач с тем, чтобы обеспечить комплексный и всесторонний анализ проблемы. Так, в [3-5] рассматривается оптимизация топологии стержневой системы с использованием генетических алгоритмов. В [6, 7] приводится решение этой же задачи на основе выпуклой оптимизации. Тут же возникает ряд инженерно-практических проблем, среди которых есть такой основополагающий, как проверка системы на устойчивость. В упомянутых выше работах этот вопрос не рас-

смаатривается. Расчеты конструкции на устойчивость естественным образом основываются на использовании осевых моментов инерции плоских сечений [8, 9], в то время как большинство методов оптимизации топологии стержневой системы в качестве ответа дают либо объемы стержней, либо их площади, либо простое соотношение между их площадями. Вопрос же перехода от, например, площади сечения стержня к его осевым моментам инерции является малоосвещенным в литературе.

В схеме «оптимизация топологии системы» - «проверка системы на устойчивость» появляется важный аспект, связанный с необходимостью функционального представления моментов инерции стержней и оптимизацией их сечений. При этом важно не забывать об ограниченности вычислительных ресурсов, т.к. в реальных структурах количество конечных элементов может быть очень велико.

Полуопределенная оптимизация топологии стержневой системы

Проблему полуопределенной оптимизации топологии стержневой системы можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize}_{w,v} W \\
 & \text{s.t.} \sum_{i=1}^m v_i \leq V \\
 & v_i \geq 0 \forall i = 1 \dots m \quad , \\
 & \begin{pmatrix} W & F^T \\ F & \sum_{i=1}^m \frac{E_i v_i}{L_i^2} a_i a_i^T \end{pmatrix} \geq 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

где W - верхняя оценка величины энергии упругой деформации стержневой системы; v_i - объем стержня; F - внешние силы, приложенные к узлам конструкции; E_i - модуль Юнга; L_i - длина стержня; a_i - i -й столбец матрицы уравнений системы A , которая находится из уравнения баланса сил $Af + F = 0$. Оптимизационная задача сводится к поиску минимальной величины W при заданных ограничениях. Более подробно математические формы задачи оптимизации топологии стержневой системы рассмотрены в [9]. Результат решения оптимизационной задачи (1) представляется в виде $v_1 : v_2 : \dots : v_m$, т. е. в виде соотношений объемов стержней. Конкретные значения v_i определяются из условий, которые обеспечивают выполнение инженерно-

технических требований к исследуемой системе. Среди них — и проверка конструкции на устойчивость.

Сама подзадача проверки стержневой системы на устойчивость может записываться в разных формах [8-10]. Все эти формы объединяет тот факт, что в уравнениях, которые используются в процессе вычислений, так или иначе фигурируют осевые моменты инерции сечений стержней.

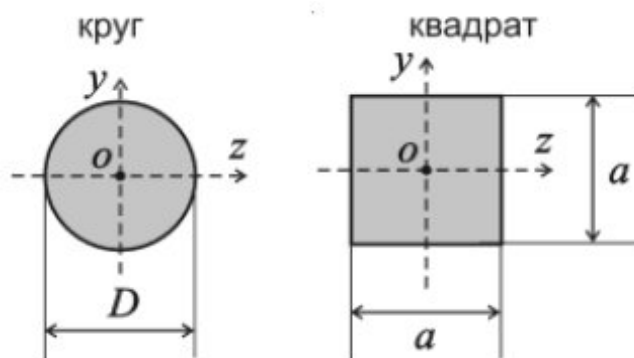


Рисунок 1 — Примеры простых сечений

И если в случае простых сечений типа «круг», «квадрат» (рис.1) существует взаимно однозначное отображение «площадь сечения» - «осевой момент инерции плоского сечения», то для сложных сечений такой простой связи нет. Задача еще больше усложняется, когда заранее не известна форма сечения стержней, т.е. возникает и проблема выбора «на лету» оптимальной геометрии сечения по заданным параметрам.

Кусочно-линейная аппроксимация осевого момента инерции плоского сечения

Исходные условия таковы, что, имея только расчетное значение площади сечения стержня, полученное из решения задачи (1), мы приходим к некорректно поставленной по Адамару задаче [11], т. к. одному и тому же значению площади могут соответствовать несколько значений моментов инерции, что наглядно демонстрирует рис. 2. Решение таких некорректных задач осуществляется, как правило, посредством регуляризации, которая позволяет использовать некоторую дополнительную информацию для поиска решения — часто приближенного. При расчете момента инерции стержня по его площади сечения роль такой «регуляризирующей информации» могут играть

табличные данные из сортамента, откуда можно брать «опорные» точки, используемые для вычисления моментов инерции.

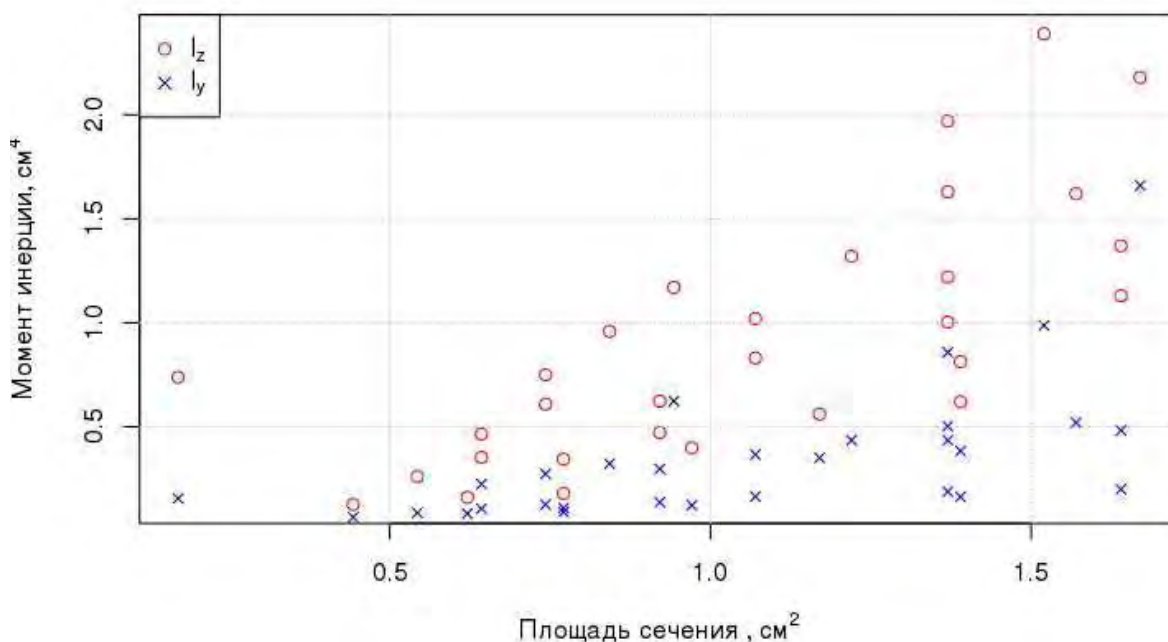


Рисунок 2 — Зависимость плоского момента инерции сечения типа «прямоугольная труба» от площади сечения

Допустим, известно расчетное значение площади сечения стержня A . Очевидно, что A будет принадлежать некоторому интервалу (A_1, A_2) , причем для значений A_1 и A_2 известны табличные значения осевых моментов инерций I_{1y} , I_{2y} , I_{1z} , I_{2z} . Проведенные численные эксперименты показывают, что с достаточной точностью значения осевых моментов инерции для I_y и I_z могут быть вычислены с помощью кусочно-линейной аппроксимации (рис. 3). Для этого запишем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} I_{1y} = k_y A_1 + b_y \\ I_{2y} = k_y A_2 + b_y \\ I_{1z} = k_z A_1 + b_z \\ I_{2z} = k_z A_2 + b_z \end{cases} \quad (2)$$

Решая систему (2) относительно коэффициентов k_y , k_z и свободных членов b_y , b_z и выполняя подстановку A , получим:

$$\begin{cases} I_y = k_y A + b_y \\ I_z = k_z A + b_z \end{cases} \quad (3)$$

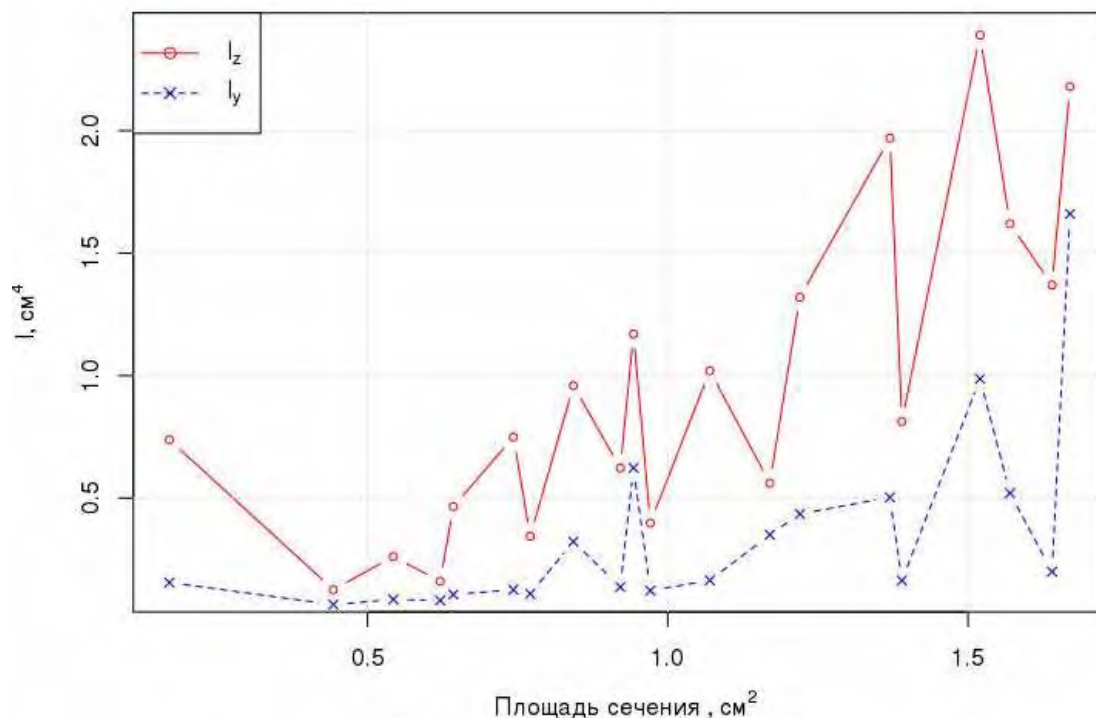


Рисунок 3 — Кусочно-линейная аппроксимация моментов инерции сечения

Выбор оптимальной формы сечения

Используя кусочно-линейную аппроксимацию, можно определить алгоритм выбора оптимальной формы сечения в случае, если заранее эта форма не задана или не известна. Тут можно исходить из тех соображений, что при равных площадях сечений более эффективным является то, у которого осевые моменты инерции больше. На рис. 4 проиллюстрирована эта идея: в некоторых случаях выгоднее использовать квадратную трубу, в других же — прямоугольную. Алгоритм выбора оптимальной формы сечения можно свести к следующим шагам:

Вход: $S=(S_1, \dots, S_n)$ — множество таблиц сечений формата (A, I_z, I_y) ; A_i — площадь i -го стержня.

Для S_j :

Найти интервалы $(A_{j1}, A_{j2}), (I_{jz1}, I_{jz2}), (I_{jy1}, I_{jy2})$

Решить систему (3)

Если новые значения (I_z, I_y) больше предыдущих, то

Запомнить $j, (I_z, I_y)$

КонецДля

Вывод $j, (I_z, I_y)$

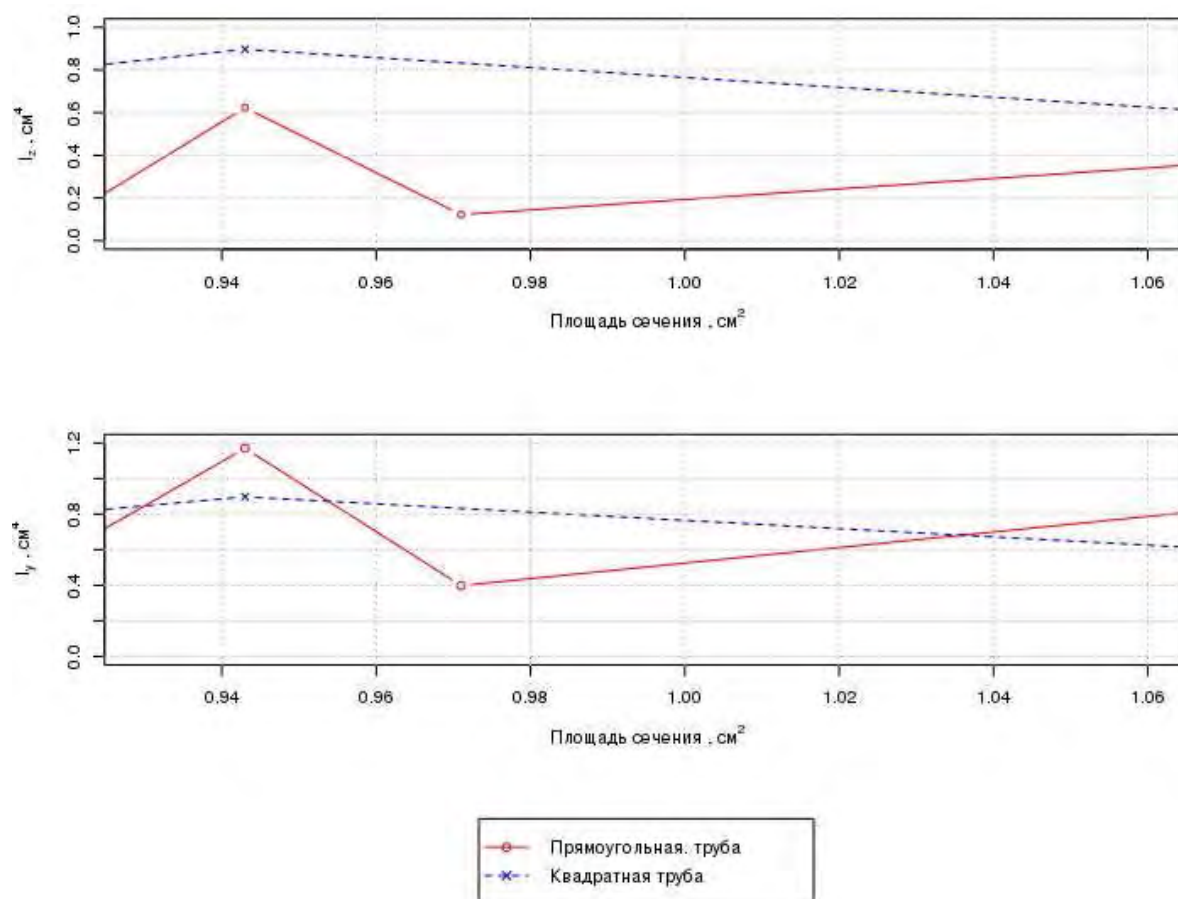


Рисунок 4 — Сравнение моментов инерции сечений типа «прямоугольная труба» и «квадратная труба»

Пример кусочно-линейной аппроксимации осевых моментов инерции стержня и выбор оптимальной формы сечения

Проведем расчет осевых моментов инерции для стержня с площадью сечения 1 см^2 . В наличии квадратные и прямоугольные трубы (рис. 4). Имеем такие табличные данные:

Таблица 1

Данные для расчета моментов инерции

Сечение	$A_1, \text{ см}^2$	$A_2, \text{ см}^2$	$I_{z1}, \text{ см}^4$	$I_{y1}, \text{ см}^4$	$I_{z2}, \text{ см}^4$	$I_{y2}, \text{ см}^4$
Кв. труба	0.943	1.071	0.897	0.897	0.6	0.6
Пр. труба	0.971	1.07	0.122	0.398	0.366	0.831

Решая системы (2) и (3), получим, что если использовать квадратную трубу, то моменты инерции по осям Z и Y составят 0.76 см^4 . Если использовать прямоугольную трубу, то $I_z=0.19 \text{ см}^4$, $I_y=0.53 \text{ см}^4$. Очевидно, что в данной ситуации сечение типа «квадратная труба» имеет большие моменты инерции и является более выгодным.

Заключение

В статье рассмотрен вопрос аппроксимации осевых моментов инерции плоских сечений в контексте решения задачи оптимизации топологии стержневой системы. Также приведен алгоритм поиска оптимальной геометрии сечения. Применение такого подхода позволяет упростить расчеты, связанные проверкой конструкции на устойчивость. Моделирование проводилось в среде Matlab.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленя Е. И., Гениев А. Н., Балдин В. А. Металлические конструкции. – М.: Стройиздат, 1985.
2. Валуйских В.П. Статистические методы оптимального проектирования конструкций. - Владимир: Владим. гос. ун-т, 2001. - 156 с.
3. Chen, S. An approach for impact structure optimization using the robust genetic algorithm // Finite Elem. Anal. Design. - 2001. – Vol. 37, no.5. – P.431-446.
4. Серпик И. Н., Алексейцев А. В., Лелетко А. А. Генетические алгоритмы оптимизации металлических строительных конструкций. – Брянск: Изд-во БГИТА, 2010.
5. Woon, S. Y. Structural application of a shape optimization method based on genetic algorithm // Struct. Multidiscip. Optim. - 2001. - Vol. 22, no. 1. - P. 57-64.
6. Ben-Tal A., Nemirovski A. Robust truss topology design via semidefinite programming. SIAM Journal on optimization. – 1997. - Vol. 7, no. 4. - P. 991-1016.
7. Yonekura K., Kanno Y. Global optimization of robust truss topology via mixed integer semidefnite programming // Optimization and Engineering. - 2010. - Vol. 11, no. 3. - P. 355-379.
8. Wriggers P. Nonlinear Finite Element Methods. Springer, 2008.
9. Кучеренко А.Е. Оптимизация топологии стержневых систем и их устойчивость // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. - Выпуск 4(99). - Днепропетровск, 2015. - С.23-30.
10. Kattan P. Matlab Guide to Finite Elements. Springer, 2008.
11. Hadamard J. Sur les problemes aux derivees partielles et leur signication physique // Princeton University Bulletin.- 1902.- Vol. 13, no. 4.- P. 49-52.