УДК 514.180

Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага

ВИЗНАЧЕННЯ ТА АНАЛІЗ ПАРАБОЛІЧНОЇ ПОВЕРХНІ БАЛЮБИ (БПП)

Анотація. В статті досліджено застосування поверхонь типу «Лупа» для моделювання складних багатофакторних процесів. Зокрема, введено назву «параболічна поверхня Балюби - БПП», що будується за емпіричними даними, зроблено її аналіз та виявлено властивості та ознаки, які пояснюють можливість перетворення БПП у площину, пряму, точку. Обґрунтовується, що БПП є композицією вихідних точок, а також можливість її застосування у способі розгортання-згортання чарунок. Ці дослідження обґрунтовують можливості застосування способу розгортання-згортання чарунок для моделювання багатофакторних процесів. Цей спосіб, у подальшому, буде покладено у основу математичного апарату в інформаційних системах підтримки управлінських рішень при впровадженні енергозберігаючих проектів.

Ключові слова: моделювання, багатофакторний, параболічний, поверхня, точкове рівняння, комбінація, композиція, аналіз, суперпозиція.

Постановка проблеми. Застосування поверхонь типу «Лупа» для моделювання, за емпіричними вихідними даними, топографічних поверхонь та складних багатофакторних процесів, викликало необхідність їхнього визначення, з'ясування їхнього місця серед багатьох інших поверхонь, виявлення властивостей, що їм притаманні. Усвідомлення способу їхнього утворення та властивостей, що їм притаманні, надасть можливість більш обґрунтованого їх застосування у тому чи іншому випадках. Тому проведення аналізу параболічних поверхонь типу «Лупа» з метою виявлення способів їхньої побудови, встановлення обмежень та притаманних їм властивостей, є актуальним. З'ясуванню означених актуальних питань, щодо параболічних поверхонь типу «Лупа», і присвячено цю статтю.

Огляд літературних джерел. Рівняння параболи у точковій формі, що проходить через наперед визначені три дійсних і одну невласну точки, було запропоноване Балюбою І.Г. [1]. З його використанням було розроблено спосіб «Лупа» [2] для побудови за емпіричними даними відсіку параболічної поверхні, що проходить через дійсних дев'ять точок, ребрами якої є точкові рівняння парабол. Приклади застосування способу «Лупа» і подальший його розвиток спостерігаємо у роботах [3, 4]. Однак, у жодній з наукових робіт, щодо теоретичного аналізу способу «Лупа», не йдеться. Такий аналіз можна зробити тільки дослідивши окремі питання теорії функцій, на розвиток якої вплинули дослідження О. Гільберта, Н.К. Барі, Д.Є. Меньшова, А. Лебега [6], А.Н. Колмогорова [7]. У подальших дослідженнях знадобиться поняття складної функції. Складна функція [5], це функція, що являє собою композицію декількох простих функцій. Якщо множина значень Y_i функцій f_i вміщується у множині визначення X_{i+1} функції f_{i+1}: $f_i : X_i \to Y_i \subset X_{i+1}$, для $i=1, n-1$, то функція $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$, для $n \geq 2$, яка визначається рівністю: $(f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1)(x) = f_n(f_{n-1}(\ldots f_1(x)\ldots))$, для $x \in X$, називається складною функцією або $(n-1)$ – кратною композицією функцій $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Складні функції зберігають властивості функцій, композицією яких вони є.

Усіляка раціональна функція будь-якої кількості змінних є композицією чотирьох арифметичних дій, тобто композицією функцій $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$, x/y.

Простою функцією називається вимірювана функція $g : X \to R^1, g(x)=y_n$, $y_n \neq y_k$ при $n \neq k$, якщо $x \in X_n$, $U_{n-1}^{\infty} x_n = x$.

Проста функція g називається такою, що додається, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu x_n$ збігається абсолютно; сума цього ряду є інтегралом Лебега: $\int g d\mu$.

Відомо [5], якщо інтегральна сума: $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \mu(M_i)$, у сенсі Лебега, у разі наближення до нуля максимальної з різниць $y_i - y_{i-1}$, тобто коли існує таке число I, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що єдиній умові $max(y_i - y_{i-1}) < \delta$ буде відповідати нерівність $|\sigma - I| < \varepsilon$. При цьому, вказана межа I називається визначеним інтегралом Лебега від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Іншими словами, I-інтеграл Лебега дорівнює площі між підінтегральною кривою та віссю y у межах відрізку $[a, b]$. Замість відрізку $[a, b]$ у інтегралі Лебега розглядається довільна множина, що вимірюється відносно деякої

 ISSN 1562-9945

додатної повної рахунково-адитивної міри, під якою треба розуміти функцію множин λ деякої множини X на класі підмножин ε, коли $\lambda(U_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i)$, де $E_i \in \varepsilon, U_{i=1}^{n} E \in \varepsilon, E_i \cap E_j = Ш$ для $i \neq j$, відповідно, при $n=2$, n – будь-яке кінцеве $n < \infty$.

Якщо розглянути (рис.1) геометричну схему для створення точкового рівняння дуги параболи, що проходить через точки A, C_∞, C, B, де точка C_∞ є невласною та визначає напрям гілок параболи [8], то дуга параболи другого порядку на відрізку AB у точковій формі, матиме точкове рівняння:

$$M = A\frac{\bar{t}(t_c - t)}{t_c} + B\frac{t(t - t_c)}{\bar{t_c}} + C\frac{t\bar{t}}{t_c\bar{t_c}}, \tag{1}$$

де $0 \le t \le 1$ - параметр, що визначає дугу параболи;

$\bar{t} = 1 - t$ - доповнення параметра t до одиниці;

t_c – значення параметру, що визначає невласну точку дуги параболи;

$\overline{t_c} = 1 - t_c$ - доповнення параметра t_c до одиниці.

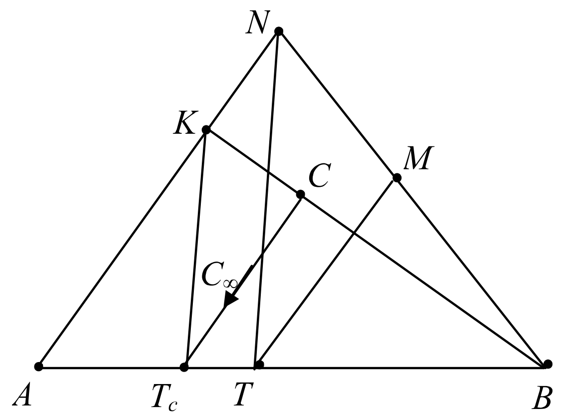

Рисунок 1 – Схема побудови змінюваної точки M параболи

Однак, ні у цій роботі [8], ні у інших [1, 2, 3, 4], де йдеться про подібні параболи та поверхні типу «Лупа», які побудовані з використанням аналогічних парабол другого порядку, не надаються визначення, аналіз та властивості парабол та поверхонь типу «Лупа».

Ціль та завдання статті. Сформулювати визначення для поверхонь типу «Лупа», виконати аналіз їхніх властивостей.

Основна частина. Нехай задано дев'ять дійсних точок X_{11}, ..., X_{33} (рис.2).

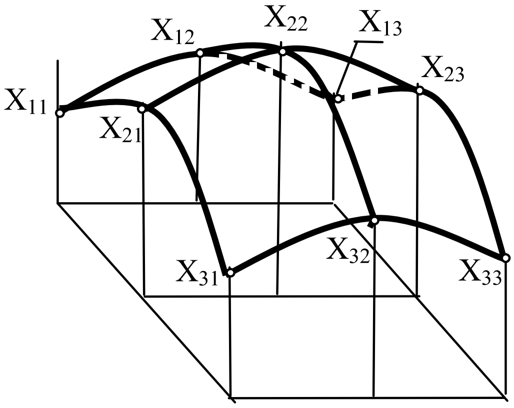

Рисунок 2 – Параболічна поверхня

По аналогії з (1) введемо позначення:

$$a_1 = \frac{\bar{v}(v_c - v)}{v_c};\ \ a_2 = \frac{v\bar{v}}{v_c\bar{v}_c};\ \ a_3 = \frac{v(v - v_c)}{\bar{v}_c};$$

$$b_1 = \frac{\bar{u}(u_c - u)}{u_c};\ \ b_2 = \frac{u\bar{u}}{u_c\bar{u}_c};\ \ b_3 = \frac{u(u - u_c)}{\bar{u}_c};$$

Тоді $a_{11}=a_1b_1;\ a_{21}=a_2b_1;\ a_{31}=a_3b_1;\ a_{12}=a_1b_2;\ a_{22}=a_2b_2;$

$$a_{32}=a_3b_2;\ a_{13}=a_1b_3;\ a_{23}=a_2b_3;\ a_{33}=a_3b_3 \qquad (2)$$

Функції a_i, b_j, a_{ij} – є функціями операцій додавання, різниці, множення та ділення і є простими додавальними функціями. Якщо розглянути складку функцію, що утворена сумою a_{ij}, то дістанемо складну функцію $f(a_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}$, яка буде суперпозицією простих функцій a_{ij}. Оскільки у точковому БН-численні вимірювання відбувається через відношення однорідних геометричних фігур, то усі параметри повинні знаходитися у межах $0 \le v, u, \bar{v}, \bar{u}, v_c, u_c \bar{v}_c, \bar{u}_c \le 1$. Зафіксуємо напрям осі параболи, прийнявши $v_c = u_c = \bar{v}_c = \bar{u}_c = 0,5$, та розрахуємо функції a_{ij} для різних значень їхніх параметрів u та v. Результати розрахунків зведемо у таблицю 1.

Графіки простих функцій з таблиці 1 зобразимо на рисунку 3.

Суперпозиція функцій-параметрів a_{ij} завжди буде дорівнювати одиниці: $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} = 1$. Доведемо це, склавши таблицю:

$$\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_3 \end{array}$$

 ISSN 1562-9945

Таблиця 1

Результати розрахунків функції a_{ij}

для різних значень параметрів u та v

	u, v						
a_{ij}	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1
a_{11}	1	0,2304	0,0144	0	0,0064	0,0144	0
a_{21}	0	0,3072	0,1152	0	-0,0768	-0,0768	0
a_{31}	0	-0,0576	-0,0096	0	-0,0096	-0,0576	0
a_{12}	0	0,3072	0,1152	0	-0,0768	-0,0768	0
a_{22}	0	0,4096	0,9216	1	0,9216	0,4096	0
a_{32}	0	-0,0768	-0,0768	0	0,1152	0,3072	0
a_{13}	0	-0,0576	-0,0096	0	-0,0096	-0,0576	0
a_{23}	0	-0,0768	-0,0768	0	0,1152	0,3072	0
a_{33}	0	0,0144	0,0064	0	0,0144	0,2304	1

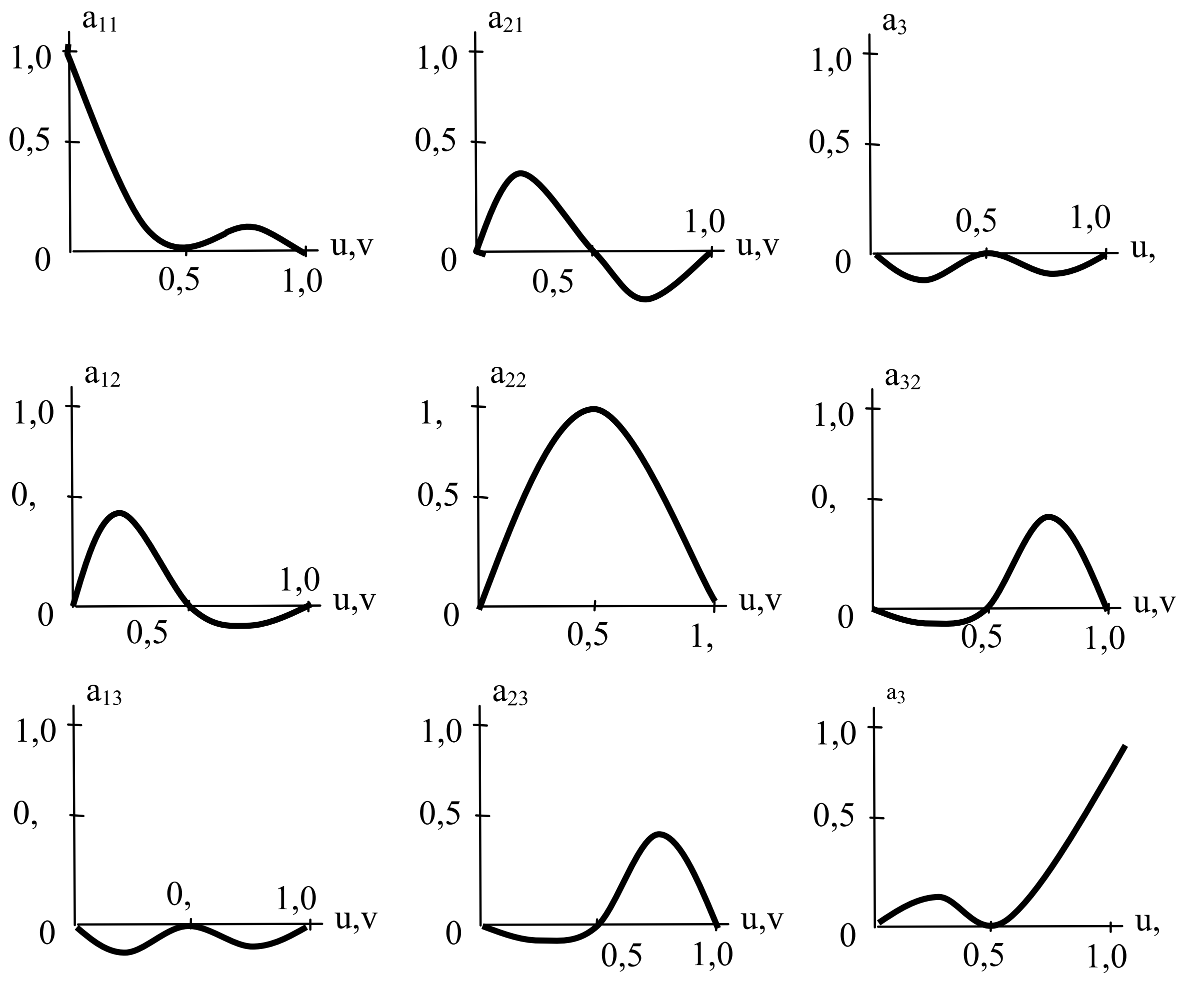

Рисунок 3 – Графіки функцій a_{ij}

Кожен з рядків a_i відповідає першій, другій та третій параболам, що побудовані за вихідними даними x_{ij}. Як відомо з [1,2,3,4,8], сума $a_1+a_2+a_3=1$, за тими нормами також $b_1+b_2+b_3=1$, звідки сума добутків $a_1b_1+a_2b_1+a_3b_1=b_1$. Аналогічно $a_1b_2+a_2b_2+a_3b_2=b_2$ та $a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3=b_3$. Складемо ці три рівняння, зробимо відповідні заміни, дістанемо:

$$a_1b_1+a_2b_1+a_3b_1+a_1b_2+a_2b_2+a_3b_2+a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3=b_1+b_2+b_3;$$

$$a_{11}+a_{21}+a_{31}+a_{12}+a_{22}+a_{32}+a_{13}+a_{23}+a_{33}=1 \qquad (3)$$

З графічної точки зору, ліва частина (3) означає суперпозицію усіх графіків (рис.3) і буде мати вигляд (рис.4). Функції-параметри a_{ij} (2) побудовані на основі параболи (1), тому для усіх значень u, v вони будуть постійно такими, як зображено на рис. 3. Для іншого точкового рівняння, аналогічно (1), іншими будуть і (2). Як бачимо (рис.3), відносно a_{22}, що знаходиться всередині, a_{11} є симетричним до a_{33}, (рис.5) відносно прямої $u,v=1$.

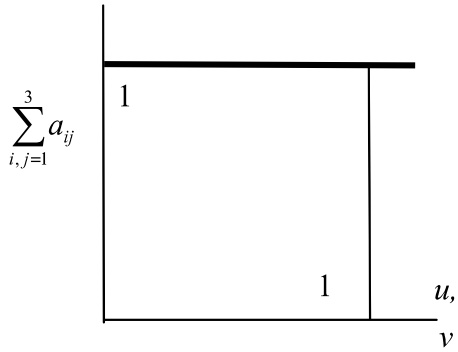

Рисунок 4 – Зображення суперпозиції (3)

Інші шість параметрів є попарно рівними: $a_{13}= a_{31}$; $a_{12}= a_{21}$; $a_{23}= a_{32}$. Однак, a_{21} є симетричним до a_{32} відносно прямої $u,v=0{,}5$ (рис.5); a_{12} - симетричний до a_{23} відносно прямої $u,v=0{,}5$ (рис.5).

Оскільки $a_{12}= a_{21}$, $a_{23}= a_{32}$, то їх зображення на рис.5 є однаковими, і якщо їх накласти один на один, вони співпадуть.

Ця симетрія викликана тим, що a_1 та b_1 є однаковими за структурою написання, тільки призначені для різних параметрів (2) $a_1(u)$, $b_1(v)$. Аналогічно $a_2(u)$, $b_2(v)$ та $a_3(u)$, $b_3(v)$. Однак, коли структури написання a_1 та b_1, a_2 та b_2, a_3 та b_3 будуть різними, то графіки функцій-параметрів a_{ij} не будуть симетричними.

 ISSN 1562-9945

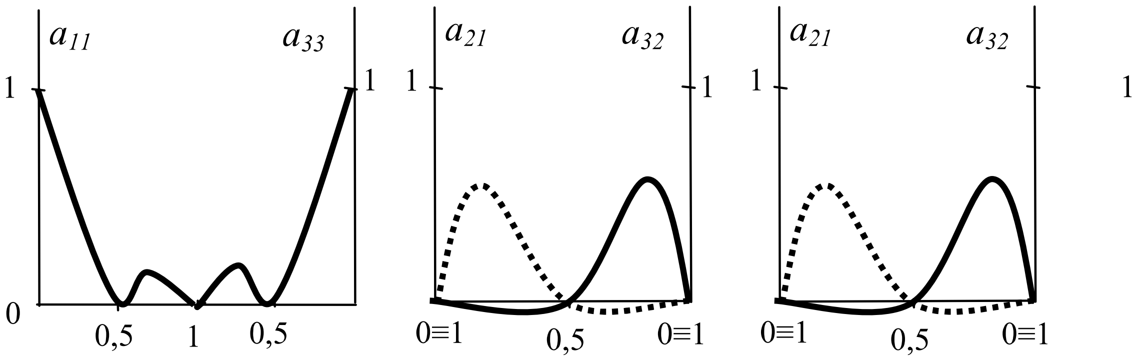

Рисунок 5 – Симетричність параметрів

Якщо параметри a_{ij} з (3) помножити на відповідні вихідні координати точок x_{ij}, отримаємо рівняння параболічної поверхні М:

$$M=x_{11}a_{11}+x_{21}a_{21}+x_{31}a_{31}+x_{12}a_{12}+x_{22}a_{22}+x_{32}a_{32}+x_{13}a_{13}+x_{23}a_{23}+x_{33}a_{33} \quad (4)$$

Оскільки ідея створення поверхонь (4) була висунута професором Балюбою І.Г., то автори пропонують у подальшому називати їх параболічними поверхнями Балюби замість раніше вживаної їхньої назви «поверхня типу Лупа».

Твердження: Якщо у точковому рівнянні (4) $M=\sum_{i,j=1}^{3} x_{ij}a_{ij}$ суперпозиція функцій-параметрів $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}=1$, то точкове рівняння М є БПП (Балюби параболічна поверхня).

Вище було з'ясовано, що ліва частина з (3) є суперпозицією дев'яти функцій-параметрів a_{ij}, яка являє собою, за визначенням, композицію. Однак, тотожність (3), в цілому, є комбінація, тому що зі зміною одного будь-якого з дев'яти a_{ij} будуть змінюватись усі інші. За визначенням [5], комбінація – це взаємно зумовлене поєднання однорідних елементів у більш складну детерміновану форму, у якій зміна одного елементу тягне за собою зміну усіх інших. Композиція (ліва частина з (3)) перетворилася у комбінацію (3), тому що дорівняли її до одиниці. У той же час, будь-яку комбінацію можна перетворити у композицію. Як відомо [5], композиція – це результат складання взаємно незалежних елементів з метою отримання певних рішень, при цьому, зміна будь-якого з елементів композиції не тягне за собою зміни інших. Для прикладу розглянемо точкове рівняння БПП (4), у якому координати x_{ij} є вихідними умовами, що обрані з області визначення. Кожну з них обираємо довільно і їх значення не залежать одне від одного, тому сума їхніх добутків на відповідні функції-параметри $\sum_{i,j=1}^{3} x_{ij}a_{ij}$ порушує комбінацію (3) і перетворюється у композицію (4), за допомогою якої визначається змінювана точка М. Кожен з елементів a_{ij} є функцією параметрів u,v: $a_{ij}(u,v)$, $0 \le u, v \le 1$. Змінюючи u та v у означених межах, розраховуємо a_{ij} з (2), що є частинами від одиниці (3). Тоді значення M_{ij} є композицією частин від одиниці кожної з вихідних точок x_{ij}.

Твердження: значенню будь-якої змінюваної точки M_{ij} параболічної поверхні Балюби, поданої точковим рівнянням $M = \sum_{i,j=1}^{3} x_{ij}a_{ij}$, відповідає одна і тільки одна композиція добутків вихідних координат x_{ij} та відповідних їм елементів a_{ij} тотожності $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} = 1$.

У зв'язку з цим, задаючи вихідні дані x_{ij} певним чином, можемо утворити такі частини, що поверхня БПП вироджується у площину або криву лінію, або у пряму і, навіть, у точку.

Виходячи зі сказаного вище, точкове рівняння параболи (1) треба розглядати не суто як параболу, а як спосіб встановлення взаємно зумовленого поєднання параметрів (комбінацію) для виконання тотожності (3), а змінювані її точки M_i також можна подати як набір частин від одиниці точок А, В, С. Така парабола також може вироджуватись у пряму або точку.

Цю властивість виродження БПП покладено в основу способу розгортання-згортання чарунок [9]. Також це дозволяє не виконувати аналіз вихідних емпіричних даних, що значно спрощує їхнє застосування.

У теоретичному плані БПП, на нашу думку, слід віднести до окремої групи композиційних поверхонь.

Висновки та напрями подальших досліджень. Результати досліджень, викладені в ці статті, отримано авторами вперше і є науковою новизною. Сформульовано означення та виконано аналіз, встановлено і досліджено властивості та ознаки створення параболічної поверхні Балюби (БПП). Ці дослідження обґрунтовують справедливість можливості способу розгортання-згортання чарунок, який, у подальшому, буде покладено у основу моделювання багатофакторних процесів, зокрема, в системах підтримки управлінських рішень в сфері енергозбереження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Балюба И.Г. Точечное уравнение параболической дуги кривой второго порядка / И.Г. Балюба, А.И. Бумага // Збірник тез доповідей і повідомлень VI Міжнародної наукової конференції молодих вчених, аспірантів, студентів. – Макіївка: ДонНАБА, 2007 – с. 64.
2. Кучеренко В.В. Реконструкція способом “Лупа” дискретно представленої поверхні земельної ділянки на основі рівномірної сітки у плані / В.В. Кучеренко, В.М. Верещага, І.Г. Балюба, Є.В. Конопацький // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип. 4, т. 55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012 – С. 143-147.
3. Бумага А.И. Теоретические основы конструирования геометрических объектов многомерного пространства в БН-исчислении / А.И. Бумага, А.В. Найдыш, Е.В. Конопацкий, О.А. Чернышова // Научные итоги: достижения, перспективы, гипотезы: Сб. докл. XVIII юбилейной междунар. научн.-практ. конф. (28 ноября 2013 г.) – Вып. 18. С. 151-154.
4. Кучеренко В.В. Формалізовані геометричні моделі нерегулярної поверхні для гіперкількісної дискретної скінченої множини точок: дис. ... канд. техн. наук, 05.01.01 / Вадим Володимирович Кучеренко, Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь, 2013. – 232 с.
5. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия. тт. 2, 3, 4, 5. 1979 – 1984 гг.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. ч. 1-2, - М., 1971-73.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976.
8. Бумага А.І. Точкове рівняння дуги параболи другого порядку. Геометрическое и компьютерное моделирование: энергосбережение, экология, дизайн: Матер. IX Крымской междунар. науч.-практ. конф. (24-28 сентября 2012 г.). Симферополь. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Прикладна геометрія та інженерна графіка (спецвипуск). К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 49-52.