УДК 536.24

М.Г. Бердник

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ТЕПЛООБМІНУ ПОРОЖНЬОГО КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА

Анотація. Розроблена математична модель температурних розподілів у порожньому кусково-однорідному циліндрі, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді крайової задачі Неймана математичної фізики. Розроблено нове інтегральне перетворення для кусково-однорідного простору, за допомогою якого знайдено температурне поле порожнього кусково-однорідного кругового циліндра у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є.

Ключові слова: крайова задача Неймана, узагальнене рівняння переносу енергії, інтегральні перетворення Лапласа, Фур'є, час релаксації.

Вступ. У феноменологічній теорії теплопровідності передбачається, що швидкість поширення тепла є нескінченно великою[1, 2]. Однак при високих інтенсивних нестаціонарних процесах, що спостерігаються, наприклад, при вибухах, надзвукових потоках, великих швидкостях обертання використання цього припущення приводить до помилок, тому необхідно враховувати, що розповсюдження теплоти проходить з кінцевою швидкістю.

Як показує огляд літератури теплообмін в циліндрах, які обертаються, вивчений в даний час ще недостатньо [3, 4]. Показано [1], що чисельні методи дослідження нестаціонарних неосесиметричних задач теплообміну циліндрів, які обертаються, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання. Так доводиться [1], що умови стійкості обчислень в методі кінцевих елементів і методі кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестаціонарних неосесиметричних температурних полів циліндрів, які обертаються, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд:

$$1-\frac{\Delta F_0}{\Delta\phi^2}\geq 0 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\Delta\phi}-\frac{Pd}{2}\geq 0,$$

де F_0 – критерій Фур'є, Pd – критерій Предводітелева.

Якщо $Pd=10^5$, що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра $\omega=1,671$ $сек^{-1}$ радіусом 100 мм, змінні $\Delta\phi$ и ΔF_o повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta\phi\leq 2\cdot 10^{-5} \quad \text{і} \quad \Delta F_o\leq 2\cdot 10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови Bi = 5 час необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює $F_o\approx 0.025$[1]. Це означає, що потрібно принаймні здійснити $1.3\cdot 10^8$ операцій по часу для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури.

Більше того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити $3.14\cdot 10^5$ обчислень, так як внутрішній стан у кільці характеризується $3.14\cdot 10^5$ точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату видається нереальним.

Тому для вирішення крайової задачі, яка виникають при математичному моделюванні нестаціонарних процесів теплообміну в циліндрі, які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

Метою роботи є розробка нової узагальненої математичної моделі температурних розподілів у кусково-однорідному циліндрі у вигляді крайової задачі Неймана математичної фізики для рівняння теплопровідності, та розв'язання отриманої крайової задачі, розв'язки якої використовуються під час керування температурними полями.

Основна частина. Розглянемо розрахунок нестаціонарного температурного поля порожнього кругового циліндра зовнішнього радіуса R в циліндричній системи координат (r,ϕ,z), кусково-однорідного в напрямку полярного радіуса r, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. Теплофізичні властивості якого в кожному шарі не залежать від температури за умови ідеального теплового контакту між шарами, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна G_0, а на зовнішній і внутрішній поверхні циліндра відомі теплові потоки $G(\phi)$ і $G_1(\phi)$ відповідно.

Відносну температуру циліндра $\theta(\rho,\phi,t)$ можна представити у вигляді:

$$\theta(\rho,\phi,t)=\begin{cases}\theta_1(\rho,\phi,t)\ , & \text{якщо} \quad \rho\in\ (\rho_0,\rho_1)\\ \theta_2(\rho,\phi,t)\ , & \text{якщо} \quad \rho\in\ (\rho_1,\rho_2)\end{cases} \tag{1}$$

Відносні температури $\theta_s(\rho,\phi,t)$ s–го шара циліндра обчислюються по формулам:

$$\theta_s(\rho,\phi,t)=\frac{T_s(\rho,\phi,t)-G_0}{T_{\max}-G_0},$$

де $T_s(\rho,\phi,t)$ - температури s–го шара циліндра; $T_{\max}$ - максимальна температура циліндра; $\rho=\frac{r}{R}$; s=1,2.

В [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно [1] узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, який обертається, з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні приймає вигляд:

$$\gamma\ c\left\{\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}+\omega\frac{\partial T}{\partial\phi}+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\omega\frac{\partial^2 T}{\partial\phi\partial t}\right]\right\}=\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \tag{2}$$

де γ – щільність середовища; с-питома теплоємність; λ - коефіцієнт теплопровідності; $T(\rho,\phi,t)$ – температура середовища; t – час; τ_r - час релаксації.

Математично задача визначення відносної температури циліндра $\theta(\rho,\phi,t)$ складається в інтегруванні гіперболічних диференціальних рівнянь теплопровідності (2) в області $D_s=\left\{(\rho,\phi,t)\ \middle|\rho\in(\rho_{s-1},\rho_s),\ \phi\in(0,2\pi),\ \mathrm{t}\in(0,\infty)\ \right\}$, що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді:

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial\ t}+\omega\frac{\partial\theta_s}{\partial\ \phi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\ t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\ \phi\partial\ t}=\alpha_s^2\left[\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_s}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\ \phi^2}\right] \tag{3}$$

с початковими умовами

 ISSN 1562-9945

$$\theta_s(\rho,\phi,0)=0, \qquad \frac{\partial\theta_s(\rho,\phi,0)}{\partial\ t}=0 \tag{4}$$

граничними умовами

$$\int_0^t \frac{\partial\theta_1}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0} e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}d\zeta=W(\phi), \quad \int_0^t \frac{\partial\theta_2}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_2} e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}d\zeta=V(\phi) \tag{5}$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_1(\rho_1,\phi,t)=\theta_2(\rho_1,\phi,t) \tag{6}$$

$$\lambda_1\frac{\partial\theta_1(\rho_1,\phi,t)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial\theta_2(\rho_1,\phi,t)}{\partial\rho} \tag{7}$$

де $\rho_1=\frac{R_1}{R}$; $\rho_0=\frac{R_0}{R}$; $\rho_2=1$; R_0 - внутрішній радіус циліндра; R_1 - радіус межі шарів; λ_s - коефіцієнт теплопровідності, γ_s – щільність, c_s - питома теплоємність, $a_s=\frac{\lambda_s}{c_s\gamma_s}$ - коефіцієнт температуропровідності s –го шара циліндра; $\alpha_s^2=\frac{a_s}{R^2}$; s=1,2; $W(\phi)=\frac{G_1(\phi)\ \tau_r}{\lambda_1(T_{\max}-G_0)}$; $V(\phi)=\frac{G(\phi)\ \tau_r}{\lambda_2(T_{\max}-G_0)}$; $G_1(\phi)$, $G(\phi)\in\ C(0,2\pi)$.

Тоді рішення крайової задачі (3) - (7) $\theta_s(\rho,\phi,t)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ, ϕ, t в області D і неперервним на $\bar{D}$[5], тобто $\theta_s(\rho,\phi,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\bar{D})$, а функції $W(\phi)$, $V(\phi)$, $\theta_s(\rho,\phi,t)$, можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [5]:

$$\begin{Bmatrix}\theta_s(\rho,\phi,t)\\ W(\phi)\\ V(\phi)\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\theta_{s,n}(\rho,t)\\ W_n\\ V_n\end{Bmatrix}\cdot\exp(in\phi), \tag{8}$$

де

$$\begin{Bmatrix}\theta_{s,n}(\rho,t)\\ V_n\\ V_n\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\theta_s(\rho,\phi,t)\\ W(\phi)\\ V(\phi)\end{Bmatrix}\cdot\exp(-in\phi)d\phi,$$

де $\theta_{s,n}(\rho,t)=\theta_{s,n}^{(1)}(\rho,t)+\mathrm{I}\ \theta_{s,n}^{(1)}(\rho,t)$; $\mathrm{V_n}=V_n^{(1)}+I\ \mathrm{V_n^{(2)}}$; $\mathrm{W_n}=W_n^{(1)}+I\ \mathrm{W_n^{(2)}}$; I – уявна одиниця.

З огляду на те, що $\theta_s(\rho,\phi,t)$ функції дійсні, обмежимося надалі розглядом $\theta_{s,n}(\rho,t)$ для n=0,1,2,...,тому що $\theta_{s,n}(\rho,t)$ і $\theta_{s,-n}(\rho,t)$ будуть комплексно спряженими [5]. Підставляючи значення функцій з (8) у (3) - (7) одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial\ t}+\vartheta_n^{(i)}\theta_{s,n}^{(m_i)}+\tau_r\frac{\partial^2\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial\ t^2}+\tau_r\vartheta_n^{(i)}\frac{\partial\theta_{s,n}^{(m_i)}}{\partial\ t}=\alpha_s^2\left[\frac{\partial^2\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\theta_{s,n}^{(i)}\right] \quad (9)$$

с початковими умовами

$$\theta_{s,n}^{(i)}(\rho,0)=0,\qquad \frac{\partial\theta_{s,n}^{(i)}(\rho,0)}{\partial t}=0 \quad (10)$$

граничними умовами

$$\int_0^t\left.\frac{\partial\theta_{1,n}^{(i)}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}d\zeta=W_n^{(i)},\qquad \int_0^t\left.\frac{\partial\theta_{2,n}^{(i)}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_2}e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}d\zeta=V_n^{(i)} \quad (11)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)=\theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t) \quad (12)$$

$$\lambda_1\frac{\partial\theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial\theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial\rho} \quad (13)$$

де $\vartheta_n^{(1)}=-\omega n$; $\vartheta_n^2=\omega n$; $m_1=2$, $m_2=1$; ; i,s=1,2.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (10) с граничними і початковими умовами (10) - (13) інтегральне перетворення Лапласа [6]:

$$\tilde{f}(s)=\int_0^\infty f(\tau)\ e^{-s\tau}\ d\tau .$$

В результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно $\tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}$:

$$s\tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}\left(\tilde{\theta}_{s,n}^{(m_i)}+\tau_r s\tilde{\theta}_n^{(m_i)}\right)+\tau_r s^2\tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}=\alpha_s^2\left[\frac{d^2\tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{d\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}\right] \quad (14)$$

граничними умовами

$$\left.\frac{\partial\tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}=\tilde{W}_n^{(i)},\qquad \left.\frac{\partial\tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=\tilde{V}_n^{(i)}, \quad (15)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\tilde{\theta}_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)=\tilde{\theta}_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t) \quad (16)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \tilde{\theta}^{(i)}_{1,n}(\rho_1,t)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial \tilde{\theta}^{(i)}_{2,n}(\rho_1,t)}{\partial \rho} \quad (17)$$

де $\tilde{W}^{(i)}_n = W^{(i)}_n \left(1+\frac{1}{s\tau_r}\right)$; $\tilde{V}^{(i)}_n = V^{(i)}_n \left(1+\frac{1}{s\tau_r}\right)$; (i=1,2).

Для розв'язання крайової задачі (14) - (17) побудуємо інтегральне перетворення:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \int_{\rho_0}^{\rho_2} \frac{Q_0(\mu_{n,k}\rho)}{\alpha(\rho)} \rho \;\; f(\rho)\, d\rho = \sum_{s=1}^{2} \int_{\rho_{s-1}}^{\rho_s} \frac{Q_s(\mu_{n,k}\rho)}{\alpha_s^2} \rho\; f(\rho)\, d\rho, \quad (18)$$

де

$$Q_0(\mu_{n,k}\rho), \quad \alpha(\rho) = \begin{cases} Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right), & \alpha_1^2 \quad \textit{якщо} \quad \rho \in (\rho_0,\rho_1) \\ Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right), & \alpha_2^2 \quad \textit{якщо} \quad \rho \in (\rho_1,\rho_2) \end{cases}.$$

Власні функції $Q_0(\mu_{n,k}\rho)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку задачі Штурма-Ліувілля:

$$\frac{d^2 Q_s}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dQ_s}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} + \frac{\mu^2_{n,k}}{\alpha_s^2} Q_s = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right)}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)}{\partial \rho} = 0, \quad (20)$$

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right) = Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right), \; \lambda_1 \frac{\partial Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\partial \rho}, \text{ (s=1,2)} \quad (21)$$

Розв'язавши задачу Штурма-Ліувілля (19) - (21) одержуємо:

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right) = \frac{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)}{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}, \; Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right) = \frac{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)} \quad (22)$$

де $\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right) = \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\left[Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right) J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right) - J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right) Y_m\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)\right]$;

$$\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)= \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\left[Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right) J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)-J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right) Y_m\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)\right]$$

$J_n(x), Y_n(x)$ – функції Бесселя $1^{го}$ і $2^{го}$ роду $n^{го}$ порядку відповідно [5].

Власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку трансцендентного рівняння:

$$\frac{\Omega\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}=\sigma\frac{H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}, \tag{23}$$

де $\Omega\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)= \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\left[Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right) J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)-J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right) Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)\right]$;

$H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)= \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\left[Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right) J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)-J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right) Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)\right]; \sigma=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Формула оберненого перетворення має вигляд:

$$\mathrm{f}(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_0(\mu_{n,k}\rho)}{\left\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\right\|^2}\ \bar{f}(\mu_{n,k}) \tag{24}$$

Квадрат норми власної функції $\left\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\right\|^2$ дорівнює:

$$\left\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\right\|^2 = \sum_{s=1}^{2}\frac{1}{\alpha_s^2}\int_{\rho_{s-1}}^{\rho_s}\left[Q_s(\mu_{n,k}\rho)\right]^2\rho\, d\rho =$$

$$=\frac{\rho_1^2}{2\alpha_1^2}\left\{\left(1-\frac{n^2\alpha_1^2}{\mu_{n,k}^2\rho_1^2}\right)+\left[\frac{\alpha_1\Omega\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\mu_{n,k}\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}\right]^2\right\}-\frac{\rho_0^2}{2\alpha_1^2}\cdot$$

$$\left(1-\frac{n^2\alpha_1^2}{\mu_{n,k}^2\rho_0^2}\right)\left[\frac{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right)}{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}\right]^2+\frac{\rho_2^2}{2\alpha_2^2}\left(1-\frac{n^2\alpha_2^2}{\mu_{n,k}^2\rho_2^2}\right)\left[\frac{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}\right]^2-$$

$$-\frac{\rho_1^2}{2\alpha_2^2}\left\{\left(1-\frac{n^2\alpha_2}{\mu_{n,k}^2\rho_1^2}\right)+\left[\frac{H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}\right]^2\right\}.$$

 ISSN 1562-9945

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (14) інтегральне перетворення (18), де власні функції $Q_s\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s}\rho\right)$ визначаються по формулам (22), а власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку трансцендентного рівняння (23) і враховуючи позначення (1), в результаті одержуємо систему звичайних алгебраїчних рівнянь відносно $\bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)}$:

$$s\bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)} + \vartheta_n^{(i)}\left(\bar{\tilde{\theta}}_n^{(m_i)} + \tau_r s\bar{\tilde{\theta}}_n^{(m_i)}\right) + \tau_r s^2\bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)} = q_{n,k}\left(\frac{\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}}{\mu^2{}_{n,k}} - \bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)}\right) \tag{25}$$

де $q_{n,k} = \mu^2{}_{n,k}$;. $\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})} = \rho_0 Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right)\tilde{W}_n^{(i)} + Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\right)\tilde{V}_n^{(i)}$; i=1,2.

Розв'язавши систему рівнянь (25) одержуємо:

$$\bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)} = \frac{\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}\left(\tau_r s^2 + s + \mathrm{q}_{\mathrm{n,k}}\right) + (-1)^{i+1}\omega n\tilde{V}_n^{(m_i)}\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(m_i)}\left(1 + s\tau_r\right)}{\left(\tau_r s^2 + s + \mathrm{q}_{\mathrm{n,k}}\right)^2 + \omega^2 n^2\left(1 + s\tau_r\right)^2}. \quad \text{(i=1,2)(26)}$$

Застосовуючи до зображення функцій (26) формули оберненого перетворення Лапласа одержуємо оригінали функцій:

$$\bar{\theta}_n^{(1)}\left(\mu_{n,k}, t\right) = \sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\cdot\left\{\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\cdot\left[\left(2\tau_r s_j + 1\right) + \tau_r\omega nI\right] + \Omega_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\cdot\left[\tau_r\omega n - \left(2\tau_r s_j + 1\right)I\right]\right\}\cdot$$
$$\left(e^{s_j t} - 1\right) + \sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\cdot\left\{\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\cdot\left[\left(2\tau_r s_j + 1\right) - \tau_r\omega nI\right] + \Omega_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\cdot\left[\tau_r\omega n + \left(2\tau_r s_j + 1\right)I\right]\right\}$$
$$\cdot\left(e^{s_j t} - 1\right),$$

(27)

$$\bar{\theta}_n^{(2)}\left(\mu_{n,k}, t\right) = \sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\cdot\left\{\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\cdot\left[\left(2\tau_r s_j + 1\right) + \tau_r\omega nI\right] - \Omega_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\cdot\left[\tau_r\omega n - \left(2\tau_r s_j + 1\right)I\right]\right\}\cdot$$
$$\left(e^{s_j t} - 1\right) + \sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\cdot\left\{\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\cdot\left[\left(2\tau_r s_j + 1\right) - \tau_r\omega nI\right] - \Omega_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\cdot\left[\tau_r\omega n + \left(2\tau_r s_j + 1\right)I\right]\right\}$$
$$\left(e^{s_j t} - 1\right),$$

(28)

де $\zeta_{n,k}\left(s_j\right) = \frac{0.5 s_j^{-1}}{\left(2\tau_r s_j + 1\right)^2 + \left(\tau_r\omega n\right)^2}$, а значення s_j для j=1,2,3,4 визначаються за формулами

$$s_{1,2} = \frac{\left(\tau_r\omega ni - 1\right) \pm \sqrt{\left(1 + \tau_r\omega ni\right)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}, \quad s_{,3,4} = \frac{\left(\tau_r\omega ni + 1\right) \pm \sqrt{\left(1 - \tau_r\omega ni\right)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином з урахуванням формул обернених перетворень (8) і (24) одержуємо температурне поле кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho,\phi,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ \overline{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)+I\cdot\overline{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)\ \right]\frac{Q_0(\mu_{n,k}\rho)}{\left\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\right\|^2}\right\}\cdot\exp(in\phi), \tag{29}$$

де значення $\overline{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)$ і $\overline{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)$ визначаються по формулам (27), (28).

Висновки. У статті за допомогою розробленого нового інтегрального перетворення знайдено температурне поле (29), порожнього кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ , з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є. Знайдений аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (в супутниках, прокатних валках, турбінах і т.і.).

ЛІТЕРАТУРА

1. Бердник М. Г. Математичне моделювання тривимірної узагальненої задачі теплообміну суцільного циліндра, який обертається / Бердник М. Г. // Питання прикладної математики і математичного моделювання.- 2014. – С. 26-35.
2. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. – Львів, 2011. – 48 с. – (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 01.11).
3. Голицына Е. В. Математическое моделирование температурного поля в полом вращающемся цилиндре при нелинейных граничных условиях / Е.В. Голицына // Теплофизика высоких температур. Ноябрь-Декабрь. – 2008. – том 46, № 6. – С. 905 – 910.
4. Громик А. П. Нестаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. - Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ. - 2009. – 120 с.
5. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики / Маркович Б. М. – Львів: Вид-во Львівської політехніки. - 2010. - 384 с.
6. Лопушанська Г.П. Перетворення Фур"є, Лапласа: узагальнення та застосування /Г.П. Лопушанська, А.О., Лопушанський, О.М. М"яус. – Львів.: ЛНУ ім. Івана Франка. - 2014. - 152 с.