УДК 622.647.2

Р.В. Кирия

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОНТРЯГИНА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СРЕДНЕГО ОБЪЕМА ГРУЗА В АККУМУЛИРУЮЩЕМ БУНКЕРЕ, РАБОТАЮЩЕМ В РЕЖИМЕ ПОДДЕРЖАНИЯ В НЕМ ОБЪЕМА ГРУЗА В ЗАДАННЫХ ПРЕДЕЛАХ

Аннотация. На основании метода Понтрягина для марковских процессов с непрерывным временем и дискретным состоянием получены системы уравнений относительно средних времен достижения заданных максимальных и минимальных объемов груза в аккумулирующем бункере, работающем в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах. Получена зависимость среднего объема груза в бункере от производительности питателя. Результаты аналитических исследований отличаются от результатов имитационного моделирования на 10–15 %.

Ключевые слова: марковский процесс, метод Понтрягина, аккумулирующий бункер, средний объем груза, режим функционирования, система конвейерного транспорта.

Для создания системы компьютерного управления работой аккумулирующих бункеров подземного конвейерного транспорта угольных шахт необходимо иметь математические модели их функционирования в режиме поддержания объема груза в аккумулирующем бункере в заданных пределах.

В этом случае в режиме поддержания в бункере объема груза в заданных пределах надбункерный конвейер работает постоянно. В случае достижения заданного минимального объема груза в бункер $V_{з1}$ питатель отключается и подбункерный конвейер останавливается. Работает только надбункерный конвейер. При достижении заданного максимального объема груза в бункере $V_{з2}$ питатель снова включается и происходит разгрузка бункера до объема $V_{з1}$. При этом надбункерный конвейер выключается только в случае аварийного переполнения бункера, то есть в случае достижения в бункере объема груза, равного $V_{\max}$ (рис. 1) [1].

Предположим, что поступающий в бункер и разгружаемый из него грузопотоки $Q_з(t)$ и $Q_p(t)$ представляют собой последовательности прямоугольных импульсов высотой, равной средней величине грузопотока, поступающего на надбункерный конвейер m_Q и производительности питателя Q_n соответственно, и интервалов времени работы t_1, t_2 и простоя τ_1, τ_2 надбункерного и подбункерного конвейеров соответственно, распределенных по экспоненциальному закону (рис. 2) [2].

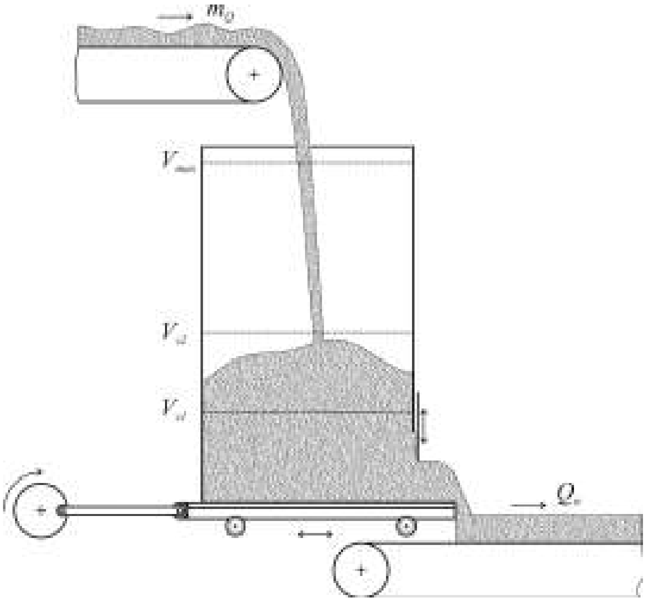

Рисунок 1 – Схема работы аккумулирующего бункера в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах

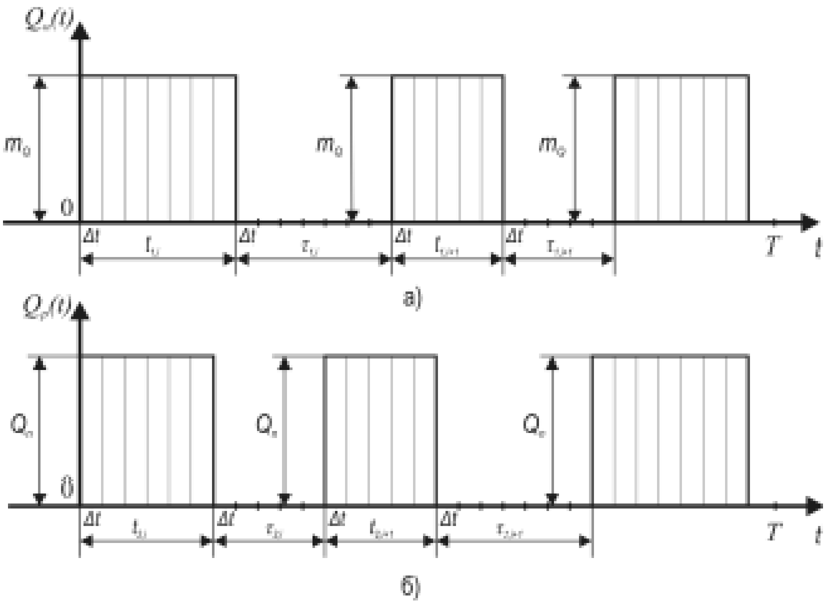

Рисунок 2 – Графики грузопотоков, поступающего в аккумулирующий бункер (а) и выходящего из него (б)

ISSN 1562-9945

В случае, если аккумулирующий бункер работает в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах, процесс функционирования бункера представляет собой кусочно-марковский процесс, состоящий из загрузки при неработающем питателе ($Q_n = 0$) и разгрузки бункера при работающем питателе ($Q_n > 0$) (рис. 3). При этом, если объем груза в бункере $V(t)$ является эргодическим случайным процессом [3], то средний объем груза в бункере можно определить из выражения

$$V_c = M[V(t)] = M\left[\frac{1}{\xi_c}\int_0^{\xi_з} V_з(t)dt + \frac{1}{\xi_c}\int_0^{\xi_p} V_p(t)dt\right], \qquad (1)$$

где $V(t) = V_з(t) + V_p(t)$; $V_з(t)$ – текущий объем груза в бункере в момент загрузки, м^3; $V_p(t)$ – текущий объем груза в бункере в момент разгрузки, м^3; ξ_c – время цикла загрузки и разгрузки бункера, с; $\xi_з$, ξ_p – время загрузки и разгрузки бункера соответственно, с.

При этом ξ_c, $\xi_з$, ξ_p являются случайными величинами, удовлетворяющими условию

$$\xi_c = \xi_з + \xi_p$$

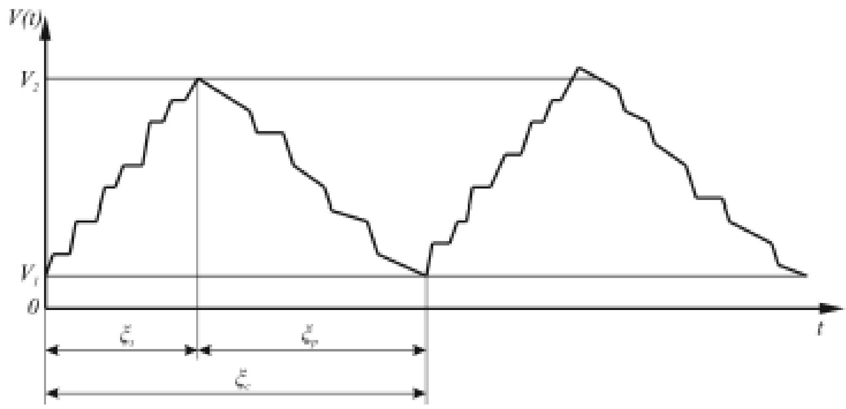

Рисунок 3 – Реализация текущего объема груза в бункере в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах

Из последнего равенства следует [3]

$$M[\xi_c] = M[\xi_з] + M[\xi_p]$$

или

$$t_c = t_з + t_p, \qquad (2)$$

где t_c – среднее время цикла загрузки и разгрузки бункера, с; $t_з$, t_p – среднее время загрузки и разгрузки бункера соответственно, с.

Из выражения (1) согласно работе [1] следует, что средний объем аккумулирующего бункера определяется по формуле

$$V_c = \frac{V_{з1}t_з + V_{з2}t_p}{t_c} + \frac{\overline{m}_Q\left(t_з^2 + \sigma_з^2\right) - (\overline{Q}_n - \overline{m}_Q)\left(t_p^2 + \sigma_p^2\right)}{2\rho t_c}, \qquad (3)$$

где $\sigma_з$, σ_p – среднеквадратические отклонения времени загрузки $\xi_з$ и времени разгрузки ξ_p аккумулирующего бункера, с.

В формуле (3) неизвестными параметрами являются среднее время загрузки $t_з$ и среднее время разгрузки t_p, а также дисперсии времени загрузки $\sigma_з$ и разгрузки σ_p аккумулирующего бункера, работающего в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах.

Как отмечалось ранее, в этом случае средний объем груза в бункере не является марковским случайным процессом. Его можно разбить на два марковских процесса загрузки и разгрузки, то есть средний объем груза в бункере описывается кусочно-марковским процессом. При этом времена загрузки $\xi_з$ и разгрузки ξ_p аккумулирующего бункера определяются как случайные величины времени пересечения границы марковского процесса с непрерывным временем и дискретным состоянием.

Такого типа задачи решены в работах для времени пересечения границ марковского непрерывного случайного процесса [4, 5]. Однако решение задачи времени пересечения границ марковского случайного процесса с непрерывным временем и дискретным состоянием не существует.

В данной работе на основании метода Понтрягина определены средние и среднеквадратические значения времени загрузки и разгрузки аккумулирующего бункера, работающего в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах.

Рассмотрим среднее время загрузки аккумулирующего бункера как среднее время достижения максимального заданного объема груза в бункере $V_{з2}$ и среднее время разгрузки бункера как среднее время достижения минимального заданного объема груза в бункере $V_{з1}$.

Для определения среднего времени загрузки $t_з$ и среднего времени разгрузки бункера t_p, следуя Понтрягину [4, 5], выведем уравнения относительно средних времен достижения заданного количества груза в бункере θ_i при различных начальных состояниях надбункерного и подбункерного конвейеров.

Обозначим через $P_{m1}(t,m)$ – вероятность первого достижения количества груза в бункере, равного m, за время t при условии, что в начальный момент времени надбункерный и подбункерный конвейеры работают; $P_{m2}(t,m)$ – вероятность первого достижения количества груза в бункере, равного m, за время t при условии, что в начальный момент времени надбункерный конвейер не работает, а подбункерный конвейер работает; $P_{m3}(t,m)$ – вероятность первого достижения количества груза в бункере, равного m, за время t при условии, что в начальный момент времени надбункерный конвейер работает, а подбункерный конвейер не работает; $P_{m4}(t,m)$ – вероятность первого достижения количества груза в бункере, равного m, за время t при условии, что в начальный момент времени надбункерный и подбункерный конвейеры не работают.

Тогда вероятность первого достижения количества груза в бункере, равного m, за время $t+\Delta t$, где Δt – малая величина, при условии, что в начальный момент времени надбункерный и подбункерный конвейеры работают, равна сумме вероятностей:

– вероятности первого достижения количества груза в бункере, равного m, за время Δt при условии, что надбункерный и подбункерный конвейер работают;

– вероятности того, что за время Δt надбункерный и подбункерный конвейеры продолжают работать, и в дальнейшем за время t количество груза в бункере достигнет впервые значения, равного $m-\Delta m_1$ (где Δm_1 – количество груза, накопившегося в бункере за время, равное Δt);

– вероятности того, что за время Δt надбункерный конвейер простаивает, а подбункерный конвейер продолжает работать, и в дальнейшем за время t количество груза в бункере впервые достигнет значения $m-\Delta m_2$ (где Δm_2 – количество груза, накопившегося в бункере за время, равное Δt);

– вероятности того, что за время Δt надбункерный конвейер работает, а подбункерный конвейера простаивает, и в дальнейшем за время t количество груза в бункере впервые достигнет значения

$m - \Delta m_3$ (где Δm_3 – количество груза, накопившегося в бункере за время, равное Δt).

В результате имеет место равенство

$$P_{m1}(t + \Delta t, m) = P_{m1}(\Delta t, m) + [1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\Delta t] \cdot P_{m1}(t, m - \Delta m_1) +$$
$$+\lambda_1 \Delta t \cdot P_{m2}(t, m - \Delta m_2) + \lambda_2 \Delta t \cdot P_{m3}(t, m - \Delta m_3)\,. \quad (4)$$

Вероятности $P_{mi}(t, m - \Delta m_i)$ разложим по малому параметру Δm_i и оставим в первой степени от Δm_i. В результате получим

$$P_{mi}(t, m - \Delta m_i) = P_{mi}(t, m) - \frac{\partial P_{mi}(t, m)}{\partial m} \cdot \Delta m_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, 4)\,. \quad (5)$$

Подставляя равенства (5) в (4) и отбрасывая малые члены выше первого порядка, после преобразования получим

$$P_{m1}(t + \Delta t, m) = P_{m1}(\Delta t, m) + P_{m1}(t, m) - \frac{\partial P_{m1}(t, m)}{\partial m} \cdot \Delta m_1 -$$
$$-(\lambda_1 + \lambda_2)\Delta t \cdot P_{m1}(t, m) + \lambda_1 \Delta t \cdot P_{m2}(t, m) + \lambda_2 \Delta t \cdot P_{m3}(t, m)\,. \quad (6)$$

Перенеся второй и третий члены правой части равенства (6) в левую часть и деля левую и правые части равенства на Δt, получим:

$$\frac{P_{m1}(t + \Delta t, m) - P_{m1}(t, m)}{\Delta t} + \frac{\partial P_{m1}(t, m)}{\partial t} \cdot \frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{P_{m1}(t, m)}{\Delta t} -$$
$$-(\lambda_1 + \lambda_2)P_{m1}(t, m) + \lambda_1 P_{m2}(t, m) + \lambda_2 P_{m3}(t, m)\,.$$

Устремляя в последнем равенстве Δt и Δm_1 к нулю ($\Delta t \to 0$, $\Delta m_1 \to 0$) с учетом того, что

$$\frac{P_{m1}(\Delta t, m)}{\Delta t} \to 0\,,$$

получим

$$\frac{\partial P_{m1}(t, m)}{\partial t} + \frac{\partial P_{m1}(t, m)}{\partial m} \cdot \frac{dm_1}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_{m1}(t, m) + \lambda_1 P_{m2}(t, m) + \lambda_2 P_{m3}(t, m), \quad (7)$$

Производная по времени $\frac{dm_1}{dt}$ в равенстве (7) является скоростью изменения количества груза в бункере при условии одновременной работы надбункерного и подбункерного конвейеров, которая определяется по формуле

$$\frac{dm_1}{dt} = q_1', \quad (8)$$

где $q_1' = m_Q - Q_n$.

 ISSN 1562-9945

Определяя вероятность первого достижения количества груза в бункере, равного m, в момент времени $t+\Delta t$ для различных начальных состояний надбункерного и подбункерного конвейеров $P_{m2}(t+\Delta t,m)$, $P_{m3}(t+\Delta t,m)$, $P_{m4}(t+\Delta t,m)$ так же, как и для $P_{m1}(t+\Delta t,m)$, и проведя такие же самые выкладки с учетом равенств

$$\frac{dm_i}{dt} = q_i',$$

в результате после преобразования получим систему уравнений относительно вероятностей достижения количества груза в бункере, равного m, в момент времени t при различных начальных состояниях надбункерного и подбункерного конвейеров в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{m1}(t,m)}{\partial t} + q_1' \dfrac{\partial P_{m1}(t,m)}{\partial m} = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_{m1}(t,m) + \lambda_1 P_{m2}(t,m) + \lambda_2 P_{m3}(t,m), \\ \dfrac{\partial P_{m2}(t,m)}{\partial t} + q_2' \dfrac{\partial P_{m2}(t,m)}{\partial m} = \mu_1 P_{m1}(t,m) - (\lambda_2 + \mu_1)P_{m2}(t,m) + \lambda_2 P_{m4}(t,m), \\ \dfrac{\partial P_{m3}(t,m)}{\partial t} + q_3' \dfrac{\partial P_{m3}(t,m)}{\partial m} = \mu_2 P_{m2}(t,m), -(\lambda_1 + \mu_2)P_{m3}(t,m), +\lambda_1 P_{m4}(t,m), \\ \dfrac{\partial P_{m4}(t,m)}{\partial t} + q_4' \dfrac{\partial P_{m4}(t,m)}{\partial m} = \mu_2 P_{m2}(t,m) + \mu_1 P_{m3}(t,m) - (\mu_1 + \mu_2)P_{m4}(t,m), \end{cases} \quad (9)$$

где $q_1' = m_Q - Q_n$; $q_2' = Q_n$; $q_3' = m_Q$; $q_4' = 0$.

Определим плотности вероятности первого достижения количества груза в бункере, равного m, за время t при различных состояниях надбункерного и подбункерного конвейеров по формуле

$$w_i(t,m) = \frac{\partial P_{mi}(t,m)}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \ldots, 4). \quad (10)$$

Продифференцируем каждое уравнение системы (9) по t с учетом (10). Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial t} + q_1' \dfrac{\partial w_1}{\partial m} = -(\lambda_1 + \lambda_2)w_1 + \lambda_1 w_2 + \lambda_2 w_3, \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t} + q_2' \dfrac{\partial w_2}{\partial m} = \mu_1 w_1 - (\lambda_2 + \mu_1)w_2 + \lambda_2 w_4, \\ \dfrac{\partial w_3}{\partial t} + q_3' \dfrac{\partial w_3}{\partial m} = \mu_2 w_2 - (\lambda_1 + \mu_2)w_3, +\lambda_1 w_4, \\ \dfrac{\partial w_4}{\partial t} + q_4' \dfrac{\partial w_4}{\partial m} = \mu_2 w_2 + \mu_1 w_3 - (\mu_1 + \mu_2)w_4. \end{cases} \quad (11)$$

Средние времена θ_i первого достижения количества груза в бункере, равного m, при различных начальных состояниях надбункерного и подбункерного конвейеров определяются по формулам

$$M[T_i] = \theta_i = \int_0^\infty t w_i dt \quad (i = 1, 2, \ldots, 4), \tag{12}$$

где T_i – времена первого достижения количества груза в бункере, равного m, при различных начальных состояниях надбункерного и подбункерного конвейеров, мин.

Левую и правую части каждого уравнения системы (11) умножим на t и проинтегрируем по t от 0 до ∞ с учетом (12). В результате получим:

$$\begin{cases} \int_0^\infty t \dfrac{\partial w_1}{\partial t} dt + q_1' \dfrac{d\theta_1}{\partial m} = -(\lambda_1 + \lambda_2)\theta_1 + \lambda_1\theta_2 + \lambda_2\theta_3, \\ \int_0^\infty t \dfrac{\partial w_2}{\partial t} dt + q_2' \dfrac{d\theta_2}{\partial m} = \mu_1\theta_1 - (\lambda_2 + \mu_1)\theta_2 + \lambda_2\theta_4, \\ \int_0^\infty t \dfrac{\partial w_3}{\partial t} dt + q_3' \dfrac{d\theta_3}{\partial m} = \mu_2\theta_2 - (\lambda_1 + \mu_2)\theta_3, +\lambda_1\theta_4, \\ \int_0^\infty t \dfrac{\partial w_4}{\partial t} dt + q_4' \dfrac{d\theta_4}{\partial m} = \mu_2\theta_2 + \mu_1\theta_3 - (\mu_1 + \mu_2)\theta_4. \end{cases} \tag{13}$$

Преобразуем интегралы левых частей системы (13), в результате получим

$$\int_0^\infty t \frac{\partial w_i}{\partial t} dt = [t w_i]_0^\infty - \int_0^\infty w_i dt = -\int_0^\infty w_i dt = -[P_{mi}(t, m)]_0^\infty = -1$$

$$(i = 1, 2, \ldots, 4). \tag{14}$$

Подставляя значения интегралов (14) в левую часть уравнений системы (13), получим систему уравнений относительно средних времен первого достижения количества груза в бункере, равного m, при различных состояниях надбункерного и подбункерного конвейеров в виде

 ISSN 1562-9945

$$
\begin{cases}
q_1' \dfrac{d\theta_1}{dm} = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\theta_1 + \lambda_1\theta_2 + \lambda_2\theta_3, \\
q_2' \dfrac{d\theta_2}{dm} = 1 + \mu_1\theta_1 - (\lambda_2 + \mu_1)\theta_2 + \lambda_2\theta_4, \\
q_3' \dfrac{d\theta_3}{dm} = 1 + \mu_2\theta_2 - (\lambda_1 + \mu_2)\theta_3 + \lambda_1\theta_4, \\
q_4' \dfrac{d\theta_4}{dm} = 1 + \mu_2\theta_2 + \mu_1\theta_3 - (\mu_1 + \mu_2)\theta_4,
\end{cases}
\tag{15}
$$

где θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 – средние времена заполнения заданного количества груза в бункер, соответствующие в начальный момент времени первому, второму, третьему и четвертому состояниям надбункерного и подбункерного конвейеров; m – текущее значение количества груза в бункере.

При этом начальные условия для системы уравнений (15) принимают вид: при $m = 0$ $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$.

Если одновременный простой надбункерного и подбункерного конвейеров является маловероятным событием, то система уравнений (15) примет вид:

$$
\begin{cases}
q_1' \dfrac{d\theta_1}{dm} = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\theta_1 + \lambda_1\theta_2 + \lambda_2\theta_3, \\
q_2' \dfrac{d\theta_2}{dm} = 1 + \mu_1\theta_1 - \mu_1\theta_2, \\
q_3' \dfrac{d\theta_3}{dm} = 1 + \mu_2\theta_1 - \mu_2\theta_3,
\end{cases}
\tag{16}
$$

где $q_1' = m_Q - Q_n$; $q_2' = -Q_n$; $q_3' = m_Q$.

При этом начальные условия имеют вид: при $m = 0$ $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$.

Для определения дисперсий и среднеквадратических отклонений времен первого достижения количества груза в бункере, равного m, при различных состояниях надбункерного и подбункерного конвейеров умножим левую и правую части равенств системы уравнений (11) на t^2 и проинтегрируем их по времени t от 0 до ∞. В результате получим:

$$\begin{cases} \int_0^\infty t^2 \frac{\partial w_1}{\partial t} dt + q_1' \frac{d\alpha_1}{dm} = -(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_1 + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_3, \\ \int_0^\infty t^2 \frac{\partial w_2}{\partial t} dt + q_2' \frac{d\alpha_2}{dm} = \mu_1\alpha_1 - (\lambda_2 + \mu_1)\alpha_2 + \lambda_2\alpha_4, \\ \int_0^\infty t^2 \frac{\partial w_3}{\partial t} dt + q_3' \frac{d\alpha_3}{dm} = \mu_2\alpha_2 - (\lambda_1 + \mu_2)\alpha_3, +\lambda_1\alpha_4, \\ \int_0^\infty t^2 \frac{\partial w_4}{\partial t} dt + q_4' \frac{d\alpha_4}{dm} = \mu_2\alpha_2 + \mu_1\alpha_3 - (\mu_1 + \mu_2)\alpha_4. \end{cases} \quad (17)$$

В уравнениях системы (17) α_i – вторые начальные моменты времени первого достижения количества груза в бункере, равного m, при различных состояниях надбункерного и подбункерного конвейеров, которые согласно [3] определяются по формулам:

$$\alpha_i[T_i] = \int_0^\infty t^2 w_i dt \quad (i = 1, 2, \ldots, 4). \quad (18)$$

Преобразуем интегралы в левых частях уравнений системы (17), получим

$$\int_0^\infty t^2 \frac{\partial w_i}{\partial t} dt = [t^2 w_i]_0^\infty - 2\int_0^\infty t w_i dt = -2\theta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 4). \quad (19)$$

Подставляя значения интегралов (19) в левые части уравнений системы (17), в результате получим систему уравнений относительно вторых начальных моментов времен первого достижения количества груза в бункере, равного m, при различных состояниях надбункерного и подбункерного конвейеров:

$$\begin{cases} q_1' \frac{d\alpha_1}{dm} = 2\theta_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_1 + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_3, \\ q_2' \frac{d\alpha_2}{dm} = 2\theta_2 + \mu_1\alpha_1 - (\lambda_2 + \mu_1)\alpha_2 + \lambda_2\alpha_4, \\ q_3' \frac{d\alpha_3}{dm} = 2\theta_3 + \mu_2\alpha_2 - (\lambda_1 + \mu_2)\alpha_3, +\lambda_1\alpha_4, \\ q_4' \frac{d\alpha_4}{dm} = 2\theta_4 + \mu_2\alpha_2 + \mu_1\alpha_3 - (\mu_1 + \mu_2)\alpha_4. \end{cases} \quad (20)$$

При этом для системы уравнений (20) начальные условия имеют вид: при m=0 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

 ISSN 1562-9945

Окончательно дисперсии и среднеквадратические отклонения времен первого достижения количества груза в бункере, равного m, согласно [3] определяются по формулам:

$$D[T_i] = \alpha_i - \theta_i^2; \quad \sigma_i = \sqrt{\alpha_i - \theta_i^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, 4). \tag{21}$$

Определим теперь среднее время загрузки бункера $t_з$.

Для этого сначала определим среднее время загрузки бункера $t_з$ при неработающем питателе из уравнения (16) при $\lambda_2 = 0$, которое примет вид:

$$\begin{cases} q_1' \dfrac{d\theta_1}{dm} = 1 - \lambda_1\theta_1 + \lambda_1\theta_2, \\ q_2' \dfrac{d\theta_2}{dm} = 1 + \mu_1\theta_1 - \mu_1\theta_2, \end{cases} \tag{22}$$

где $q_1' = m_Q$; $q_2' = 0$; θ_1 – среднее время, за которое количество груза в бункере увеличится на m при условии, что в начальный момент времени надбункерный конвейер работает; θ_2 – среднее время, за которое количество груза в бункере увеличится на m при условии, что в начальный момент времени надбункерный конвейер не работает.

При этом начальные условия имеют вид: при $\theta_1 = 0$ $m = 0$.

Решая систему уравнений (22), получим:

$$\theta_1 = \frac{m}{\bar{m}_Q}; \quad \theta_2 = \frac{m}{\bar{m}_Q} + \frac{1}{\mu_1}. \tag{23}$$

Полагая в последнем равенстве $m = \rho\left(V_{з2} - V_{з1}\right)$, в результате имеем

$$\theta_1 = \frac{\rho\left(V_{з2} - V_{з1}\right)}{\bar{m}_Q}; \quad \theta_2 = \frac{\rho\left(V_{з2} - V_{з1}\right)}{\bar{m}_Q} + \frac{1}{\mu_1}. \tag{24}$$

Среднее время загрузки бункера $t_з$, т.е. среднее время, в течение которого объем груза в бункере уменьшится от $V_{з1}$ до $V_{з2}$ при произвольном начальном состоянии надбункерного конвейера, определим по формуле

$$t_з = P_1\theta_1 + \bar{P}_1\theta_2, \tag{25}$$

где $P_1, \bar{P}_1$ – вероятности работы и простоя надбункерного конвейера соответственно.

В случае стационарного процесса, т.е. при $t \to \infty$ P_1 и $\bar{P}_1$ определяются по формулам [6]:

$$P_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}; \quad \bar{P}_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}. \tag{26}$$

Подставляя (24) и (26) в (25), после преобразования получим среднее время загрузки бункера по формуле:

$$t_з = \frac{\rho\left(V_{з2} - V_{з1}\right)}{\bar{m}_Q} + \frac{\lambda_1}{\left(\lambda_1 + \mu_1\right)\mu_1}. \tag{27}$$

Теперь определим среднеквадратическое отклонение загрузки бункера $\sigma_з$. В нашем случае система уравнений относительно вторых начальных моментов времени загрузки α_1 и α_2 бункера соответственно в режиме при одновременной работе надбункерного и подбункерного конвейеров и в режиме при простое надбункерного конвейера и работе подбункерного конвейера примет вид:

$$\begin{cases} q_1' \dfrac{d\alpha_1}{dm} = 2\theta_1 - \lambda_1\alpha_1 + \lambda_1\alpha_2, \\ q_2' \dfrac{d\alpha_2}{dm} = 2\theta_2 + \mu_1\alpha_1 - \mu_1\alpha_2, \end{cases} \tag{28}$$

где $q_1' = m_Q$; $q_2' = 0$.

При этом начальные условия для системы (28) принимают вид: при m=0 $\alpha_1 = 0$.

Решение уравнений (28) при начальных условиях имеет вид:

$$\alpha_1 = \frac{m^2}{\bar{m}_Q^2} + \frac{2\lambda_1}{\left(\lambda_1 + \mu_1\right)\mu_1} \cdot \frac{m}{\bar{m}_Q};$$

$$\alpha_2 = \frac{m^2}{\bar{m}_Q^2} + \frac{2}{\mu_1}\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}\right) \cdot \frac{m}{\bar{m}_Q} + \frac{2}{\mu_1^2}. \tag{29}$$

Среднеквадратические отклонения времен загрузки при различных состояниях надбункерного и подбункерного конвейеров согласно (21) определяем по формулам:

$$\sigma_1 = \sqrt{\alpha_1 - \theta_1^2}; \quad \sigma_2 = \sqrt{\alpha_2 - \theta_2^2}. \tag{30}$$

Подставляя в (30) θ_1 и θ_2 из (23) и α_1 и α_2 из (29), после преобразования получим

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{\frac{2\lambda_1}{\left(\lambda_1 + \mu_1\right)\mu_1} \cdot \frac{m}{\bar{m}_Q}}. \tag{31}$$

 ISSN 1562-9945

В результате среднеквадратическое отклонение времени загрузки бункера, независимо от режима работы надбункерного и подбункерного конвейеров, определяется по формуле

$$\sigma_з = P_1\sigma_1 + \bar{P}_1\sigma_2 = \sigma_1. \qquad (32)$$

Анализ выражений (27) и (31) показал, что для аккумулирующих бункеров с достаточно большим объемом, то есть, при $m >> \bar{m}_Q$, выполняется соотношение

$$\sigma_з << t_з. \qquad (33)$$

Предположим, что объем груза в бункере намного больше одного кубического метра, т.е. $(V_{з2} - V_{з1}) \cdot \rho >> m_Q$. Тогда, пренебрегая $\sigma_з$ согласно последнему неравенству (33), равенство (3) примет вид:

$$V_c = \frac{V_{з1}t_з + V_{з2}\left(t_p + \sigma_p\right)}{t_c} + \frac{\bar{m}_Q t_з^2 - (\bar{Q}_n - \bar{m}_Q)\left(t_p^2 + \sigma_p^2\right)}{2\rho t_c}. \qquad (34)$$

Определим среднее время разгрузки бункера t_p и σ_p.

Для определения времени разгрузки бункера t_p, т.е. когда включен питатель, необходимо решить систему уравнений (15) или (16), а для определения среднего квадратичного отклонения σ_p необходимо решить систему уравнений (20), включая равенства (21).

Однако получение аналитического решения систем уравнений (15) или (16) и (20) связано с большими математическими трудностями. Поэтому сначала получим аналитические решения уравнений (15) для частной задачи при непрерывной работе подбункерного конвейера, т.е. при $\lambda_2 = 0$. А затем, используя это решение, получим приближенное решение системы уравнений (15) при $\lambda_2 \neq 0$.

Предположим, что в момент, когда объем груза в бункере достигает $V_{з2}$, включается питатель, а подбункерный конвейер непрерывно работает, т.е. $\lambda_2 = 0$. Тогда система уравнений (15) примет вид:

$$\begin{cases} q_1' \dfrac{d\theta_1'}{dm} = 1 - \lambda_1\theta_1' + \lambda_1\theta_2', \\ q_2' \dfrac{d\theta_2'}{dm} = 1 + \mu_1\theta_1' - \mu_1\theta_2', \end{cases} \qquad (35)$$

где $q_1' = m_Q - Q_n$; $q_2' = -Q_n$.

Здесь θ_1', θ_2' – среднее время, за которое количество груза в бункере впервые достигает значение m при условии, что в начальный момент надбункерный конвейер работает и не работает соответственно. Решая систему уравнений (35) при начальных условиях $m = 0$, $\theta'_1 = \theta'_2 = 0$ и полагая $m = \rho\left(V_{з2} - V_{з1}\right)$, в результате получим:

$$\theta'_1 = \frac{\rho\left(V_{з2} - V_{з1}\right)}{\left(Q_n - \bar{m}_Q\right)} + \frac{\lambda_1}{\left(\lambda_1 + \mu_1\right)^2} \cdot \frac{Q_n m_Q}{\left(Q_n - \bar{m}_Q\right)^2} \times \left[1 - e^{-\frac{\rho\left(V_{з2} - V_{з1}\right)\left(\lambda_1 + \mu_1\right)\left(Q_n - \bar{m}_Q\right)}{\left(Q_n - m_Q\right) Q_n}}\right]; \quad (36)$$

$$\theta'_2 = \frac{\rho\left(V_{з2} - V_{з1}\right)}{\left(Q_n - \bar{m}_Q\right)} - \frac{\mu_1}{\left(\lambda_1 + \mu_1\right)^2} \cdot \frac{m_Q\left(Q_n - m_Q\right)}{\left(Q_n - \bar{m}_Q\right)^2} \times \left[1 - e^{-\frac{\rho\left(V_{з2} - V_{з1}\right)\left(\lambda_1 + \mu_1\right)\left(Q_n - \bar{m}_Q\right)}{\left(Q_n - m_Q\right) Q_n}}\right]. \quad (37)$$

Если разгрузка из бункера осуществляется непрерывно ($\lambda_2 = 0$), т.е. без остановок подбункерного конвейера, то время разгрузки бункера будет меньше, чем в случае остановок подбункерного конвейера ($\lambda_2 \neq 0$). Если объем груза в бункере $V_{з2}$ увеличить на объем среднего количества груза, не пропущенного подбункерным конвейером за время его простоя t_n в течение времени t_p, то время разгрузки бункера объемом $V'_{з2}$ при непрерывно работающем подбункерном конвейере ($\lambda_2 = 0$) приблизительно совпадает со средним временем t_p разгрузки бункера объемом $V_{з2}$, но с остановками подбункерного конвейера ($\lambda_2 \neq 0$).

Следовательно, если в равенство (36) вместо θ'_1 подставить t_p, а вместо $V_{з2}$ подставить $V'_{з2}$, определенное из выражения

$$V'_{з2} = V_{з2} + t_n \frac{Q_n}{\rho}, \quad (38)$$

где $t_n = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} t_p$ – среднее время простоя подбункерного конвейера в течение времени t_p,

то получим уравнение относительно t_p

$$t_p = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \cdot \frac{Q_n}{\left(Q_n - \bar{m}_Q\right)} t_p + \frac{\rho\left(V_{з2} - V_{з1}\right)}{\left(Q_n - \bar{m}_Q\right)^2} + \frac{\lambda_1}{\left(\lambda_1 + \mu_1\right)^2} \cdot \frac{Q_n m_Q}{\left(Q_n - \bar{m}_Q\right)^2} \times$$
$$\times \left[1 - e^{-\frac{\rho\left(V'_{з2} - V_{з1}\right)\left(\lambda_1 + \mu_1\right)\left(Q_n - \bar{m}_Q\right)}{\left(Q_n - m_Q\right) Q_n}}\right], \quad (39)$$

где $V'_{з2} = V_{з2} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \dfrac{Q_n}{\rho} t_p$.

 ISSN 1562-9945

Последнее уравнение решается методом последовательных приближений. При этом за нулевое приближение принимается значение θ_1' из (36), т.е. $t_p = \theta_1'$.

Предположим, что разность $V_{з2}' - V_{з1}$ – большая величина, тогда из равенства (39), пренебрегая экспонентой в квадратных скобках и определяя среднее время загрузки t_p, после преобразования получим:

$$t_p = \frac{\rho(V_{з2} - V_{з1})}{\bar{Q}_n - \bar{m}_Q} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \mu_1)\mu_1} \cdot \frac{Q_n \bar{m}_Q}{\left(Q_n - \bar{m}_Q\right)\left(\bar{Q}_n - \bar{m}_Q\right)}. \quad (40)$$

Так как в нашем случае грузопоток, разгружаемый из бункера, постоянный и равен Q_n, то $\sigma_p = 0$. Подставляя в (34) $\sigma_p = 0$, $t_з$ и t_p, определенные соответственно по формулам (27) и (40), а вместо $V_{з2}$ значение $V_{з2}'$, определенное по формуле (38), получим средний объем груза в бункере V_c в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах:

$$V_c = \frac{V_{з1} t_з + V_{з2}' t_p}{t_з + t_p} + \frac{\bar{m}_Q t_з^2 - \left(Q_n - \bar{m}_Q\right) t_p^2}{2\rho\left(t_з + t_p\right)}, \quad (41)$$

где $V_{з2}' = V_{з2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \frac{Q_n}{\rho} t_p$.

Подставляя $V_{з2}'$ в (41) с учетом (2), после преобразования получим [1, 7].

$$V_c = \frac{V_{з1} t_з + V_{з2} t_p}{t_c} + \frac{\bar{m}_Q t_з^2 - \left(Q_n - \bar{m}_Q\right) t_p^2}{2\rho t_c} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \cdot \frac{Q_n}{\rho} \cdot \frac{t_p^2}{t_c}. \quad (42)$$

На основании полученного выражения (42) исследованы зависимости среднего объема груза V_c аккумулирующего бункера, работающего в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах, от производительности питателя Q_n и интенсивностей простоев надбункерного конвейера. В результате установлено, что с увеличением производительности питателя средний объем груза в бункере уменьшается и при больших значениях $Q_n \to \infty$ стремится к полусумме максимального и минимального заданных объемов груза в бункере.

Кроме того, средний объем груза в бункере V_c с увеличением интенсивности простоя надбункерного конвейера λ_1 увеличивается, а с увеличением интенсивности простоя подбункерного конвейера λ_2 – уменьшается.

Выводы. Следовательно, на основании метода Понтрягина для марковских процессов с непрерывным временем и дискретным состоянием получены системы уравнений относительно средних времен достижения заданных максимальных и минимальных объемов груза в аккумулирующем бункере, работающем в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах.

В результате установлено, что с увеличением производительности питателя средний объем груза в бункере уменьшается и асимптотически стремится к полусумме максимального и минимального заданных объемов груза в бункере.

Кроме того, средний объем груза в бункере с увеличением интенсивности простоя надбункерного конвейера увеличивается, а увеличением интенсивности простоя подбункерного конвейера – уменьшается.

Результаты аналитических исследований отличаются от результатов имитационного моделирования на $10–15\ \%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирия Р. В. Математическая модель функционирования аккумулирующего бункера в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах / Р. В. Кирия, Т. Ф. Мищенко, Ю. В. Бабенко // Наукові вісті «Сучасні проблеми металургії». – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – № 15. – С. 85–96.
2. Шахмейстер Л. Г. Вероятностные методы расчета транспортных машин / Л. Г. Шахмейстер, В. Г. Дмитриев. – М.: Машиностроение, 1983. –256 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.
4. Тихонов В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
5. Понтрягин Л. О статистическом рассмотрении динамических систем / Л. Понтрягин, А. Андронов, А. Витт // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1933. – Т. 3. – Вып. 3. – С. 165– 180.
6. Гнеденко, Б. В. Математические методы в теории надежности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
7. Кирия Р. В. Определение среднего объема груза в аккумулирующем бункере, работающем в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах / Р. В. Кирия, Т. Ф. Мищенко // Збірник наукових праць НГУ. – Дніпропетровськ: Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет», 2015. – №49. – С. 106–115.

 ISSN 1562-9945