УДК 004.94

Ю.В. Бабенко, С.С. Ланська

ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ІМІТАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННИМ ЗА СТАНОМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Анотація. В роботі проводиться дослідження впливу параметрів динамічної системи з нелінійним запізненням. Побудовано імітаційні моделі динамічних систем таотримано їх фазові портрети і графіки поведінки розв'язку.

Ключові слова: динамічна система, нелінійне запізнення за часом, імітаційна модель.

Вступ

Чимало процесів, які супроводжують людину у повсякденному житті характеризуються наявністю запізнень у часі. Запізнення може мати різну природу походження: інерційність деяких елементів системи, обмеження на протікання технологічного або хімічного процесу, тощо. Переважно дослідники ці процеси моделюють за допомогою систем диференціальних без запізнення в часі, оскільки вважаютьвплив запізнення нульовим або таким, яким можна знехтувати, а тому розглядають систему за ідеальних умов. Тим не менше, нехтування запізненням може мати суттєвий вплив на якісну поведінку моделі та в деяких випадках призводити до суттєвих відмінностей з результатами експериментів.

Вданій роботі досліджується вплив параметрів динамічної системи на її якісну поведінку.

Постановка задачі

Метою даного дослідження є вивчення залежності поведінки розв'язків динамічних систем з нелінійним запізненням в часі за умови варіювання параметрів запізнення. Дане дослідження проведено за рахунок моделювання розв'язків динамічних систем за допомогою імітаційної моделі, побудованої в пакеті побудови імітаційних моделей AnylogicFreeRelease.

Дослідження імітаційної моделі

Використовуючи методологію системної динаміки аналітик може зрозуміти ефекти, які можуть виникнути від зовнішнього впливу та змін параметрів системи. Це дозволяє порівнювати альтернативні рішення та обирати оптимальні, що і є головною задачею аналізу. Проведемо аналіз, розглянувши проблему визначення точок рівноваги на фазовій площині та характер руху в околі точки рівноваги.

Для дослідження фазового портрету динамічних систем необхідно проаналізувати поведінку розв'язків систем з різним наборам параметрів моделі, щоб переглянути, до яких атракторів збігаються отримані траєкторії.

Розглянемо більш детально декількасистем. Досліджувалися динамічні системи, що описуються диференціальними рівняннями з нелінійним запізненням.Були розглянуті наступні закони зміни запізнення: $\tau(t) = \gamma \cdot \sqrt{t + 0,01}$ та $\tau(t) = \gamma \cdot t$, з параметром γ, а також – $\tau(t) = e^{0,01 \cdot t}$.

Перша система описується наступним рівнянням

$$\begin{cases} x'(t) = b - K \cdot x(t - \tau(t)), & t > 0, \\ x(t) = \varphi(t), & t \le 0, \end{cases} \quad (1)$$

де b та K є задані числові параметри системи, а $\tau(t)$ є нелінійним запізненням. Загальний вид створеної імітаційної моделі зображено на рисунку 1.

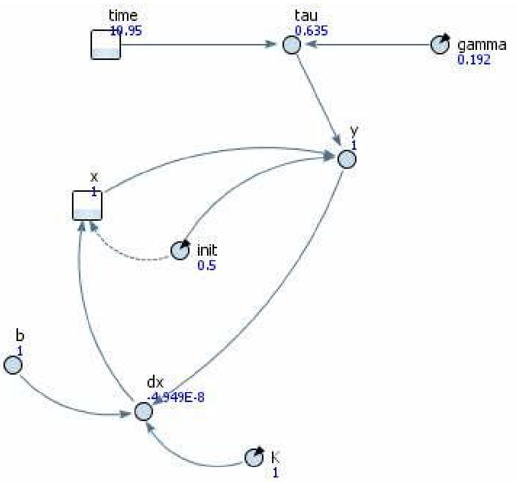


Рисунок 1 –Імітаційна модель динамічної системи (1)

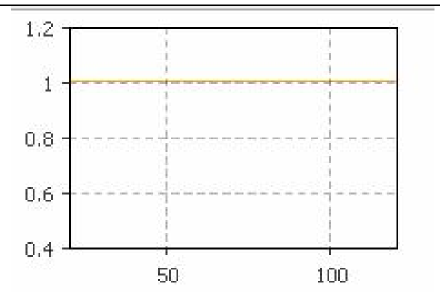
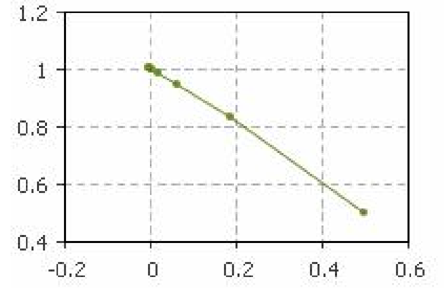
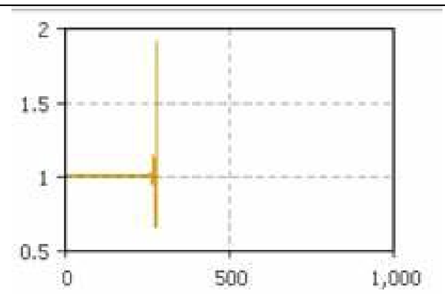
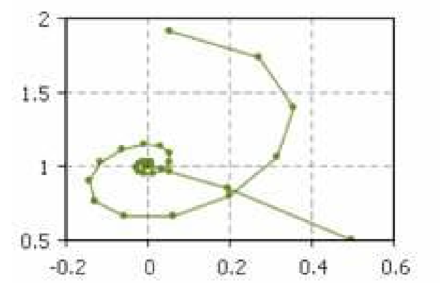
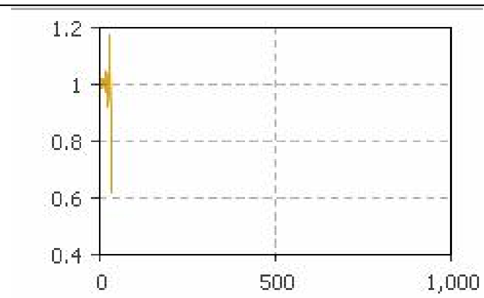
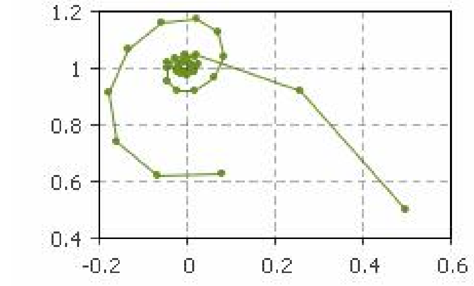
 ISSN 1562-9945

Нижче наведено таблиці, що демонструють поведінкурозв'язку динамічної системи (1) та його фазовий портрет при деяких значеннях параметрів γ та K. При цьому фіксованими були параметр $b = 1$ та початкова умова $x(t) = 0,5$ для $t \le 0$.

1. $\tau(t) = \gamma \cdot \sqrt{t + 0,01}$ та $K = 1$.

Таблиця 1

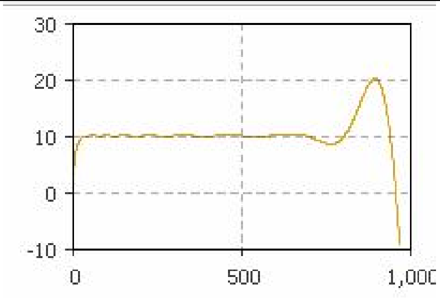
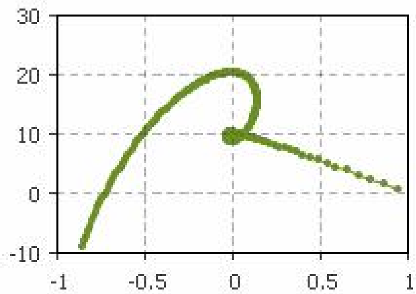
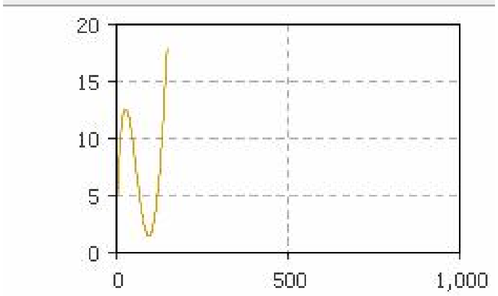
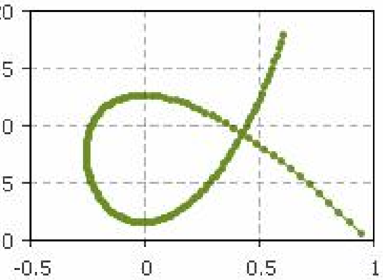
Результати тестування першої імітаційної моделі

Значення γ	Залежність $x(t)$	Фазовий портрет
$\gamma = 0,1$		
$\gamma = 0,2$		
$\gamma = 0,5$		

2. $\tau(t) = \gamma \cdot t$ та $K = 1$.

Таблиця 2

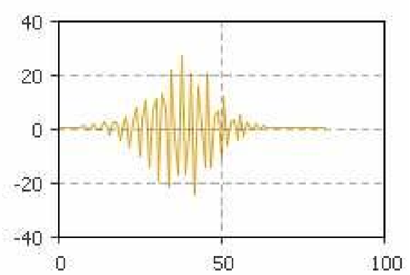
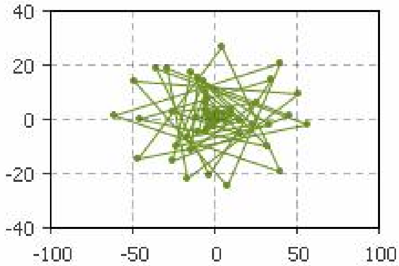
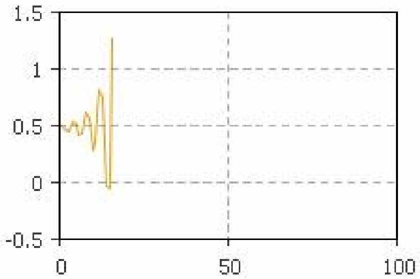
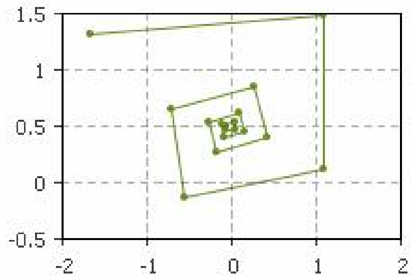
Результати тестування першої імітаційної моделі

Значення γ	Залежність $x(t)$	Фазовий портрет
$\gamma = 0,1$		
$\gamma = 0,5$		

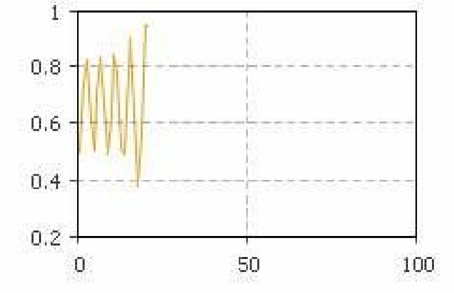
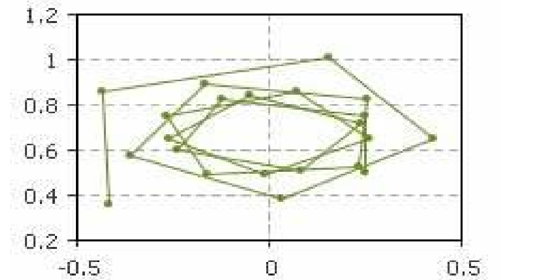
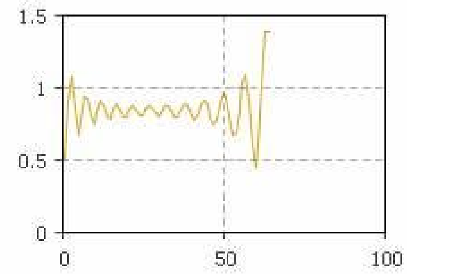
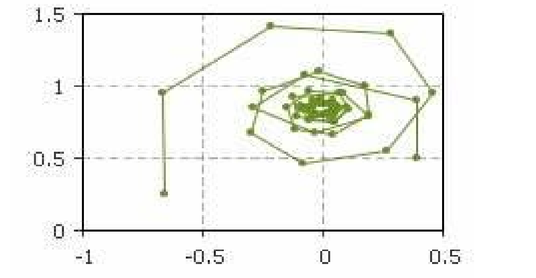
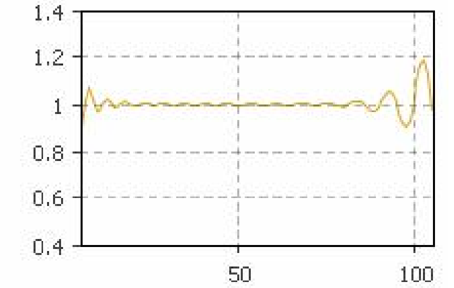
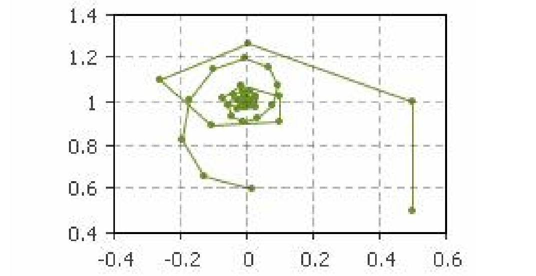
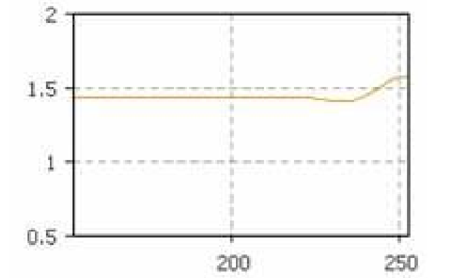
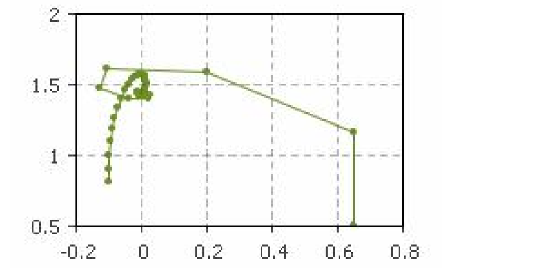
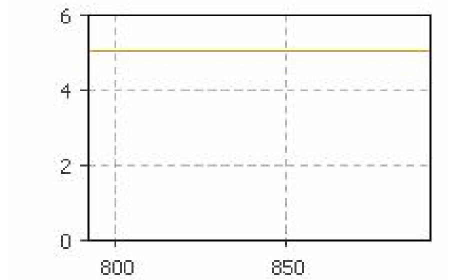
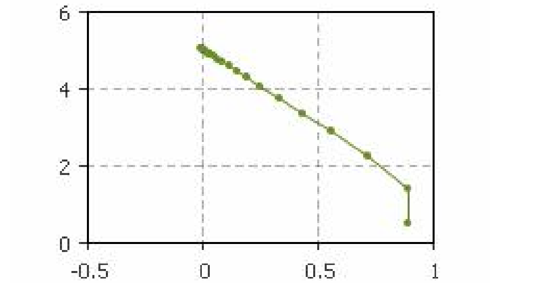
3. $\tau(t) = e^{0,01 \cdot t}$, $b = 1$ та $x(t) = 0,5$ для $t \leq 0$.

Таблиця 3

Результати тестування першої імітаційної моделі

Значення K	Залежність $x(t)$	Фазовий портрет
$K = 2,3$		
$K = 2,1$		

 ISSN 1562-9945

<table>
<tr><td>$K = 1,5$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$K = 1,2$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$K = 1$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$K = 0,7$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$K = 0,2$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

В якості другого прикладу розглянемо систему, яка описується диференційним рівнянням за запізненням

$$\dot{x}(t) = \beta u(t) - \alpha x(t - \tau), t > t_0,$$

$$x(\tau) = \phi_0(\tau) \quad при, \quad t_0 - \tau \le \tau \le t_0 \qquad (2)$$

де $u(t) = 2\cos(0.3t)$ – стан системи в момент часу *t*, β та α є задані числові параметри системи, а $\tau(t)$ є запізненням. Загальний вид створеної імітаційної моделі зображено на рисунку 2.

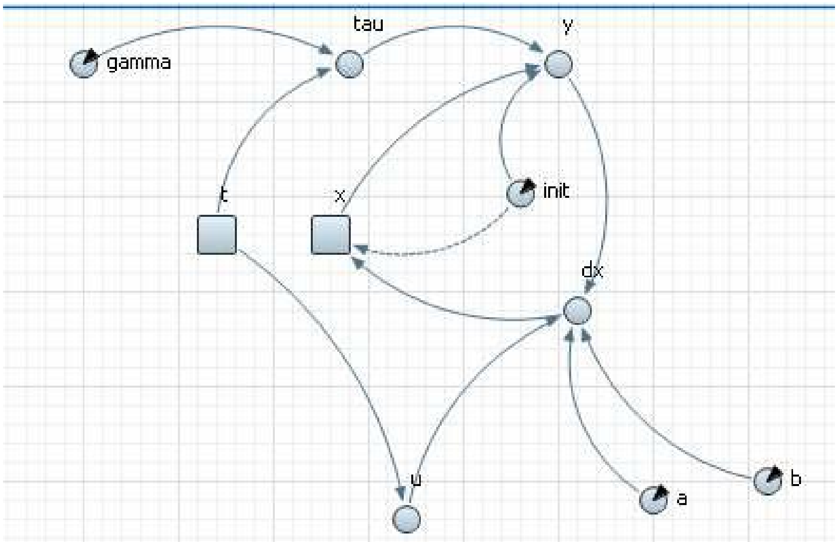


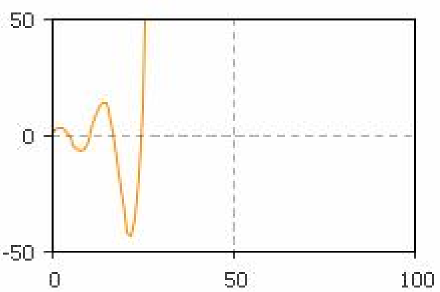
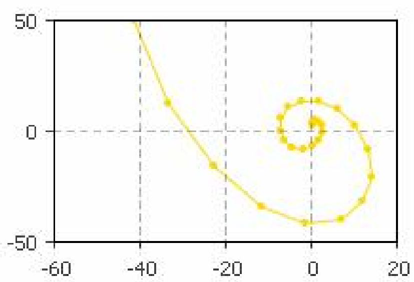
Рисунок 2 – Імітаційна модель динамічної системи (2)

Нижче наведено таблиці, що демонструють поведінку розв'язку динамічної системи (2) та його фазовий портрет при деяких значеннях параметрів γ та K. При цьому фіксованими були параметр $\beta = 1$ та початкова умова $x(t) = 0,5$ для $t \le 0$.

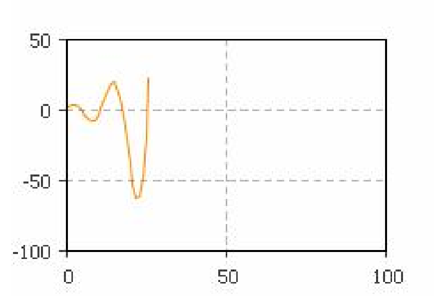
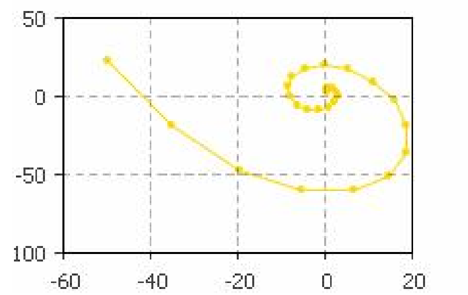
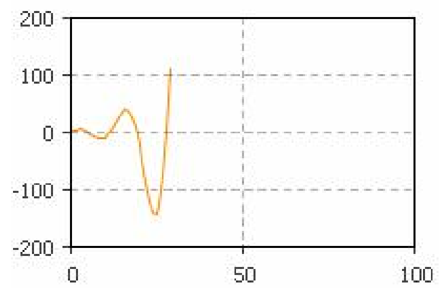
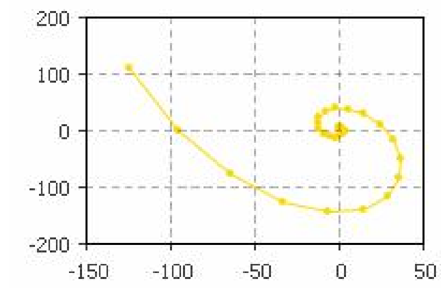
1. $\tau(t) = \gamma \cdot \sqrt{t + 0,01}$ та $\alpha = 1$.

Таблиця 4

Результати тестування другої імітаційної моделі

Значення γ	Залежність $x(t)$	Фазовий портрет
$\gamma = 0,1$		

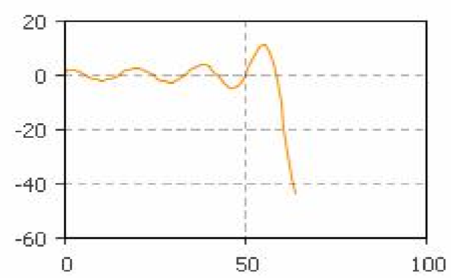
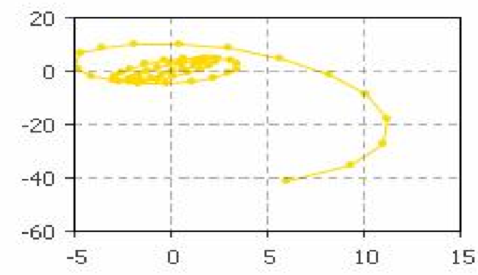
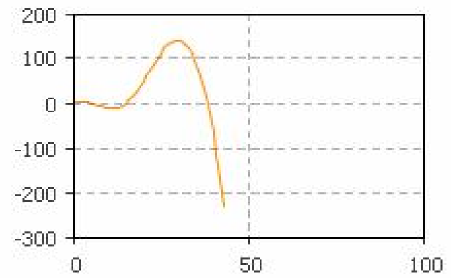
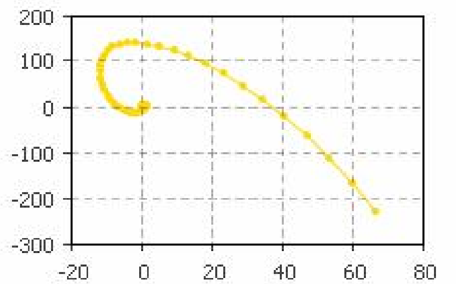
 ISSN 1562-9945

$\gamma = 0,2$		
$\gamma = 0,5$		

2. $\tau(t) = \gamma \cdot t$ та $\alpha = 1$.

Таблиця 5

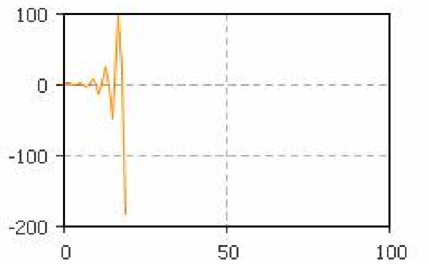
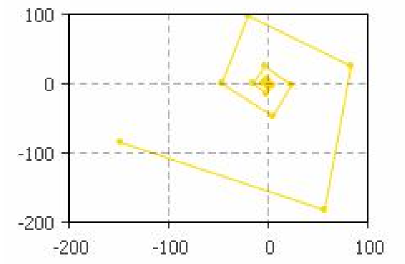
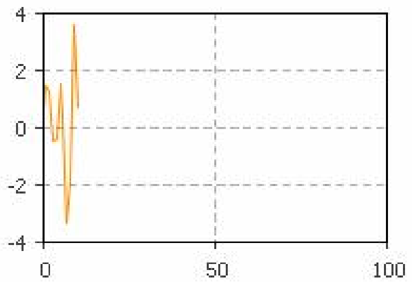
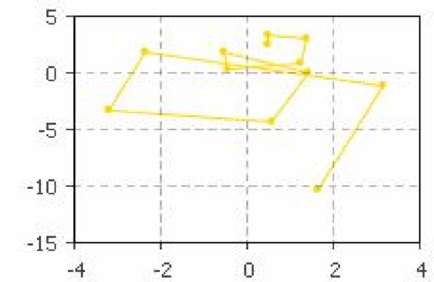
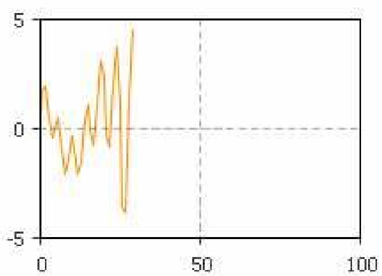
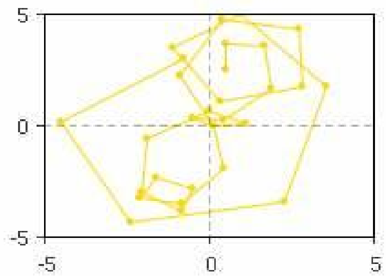
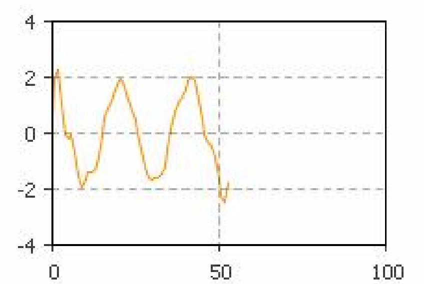
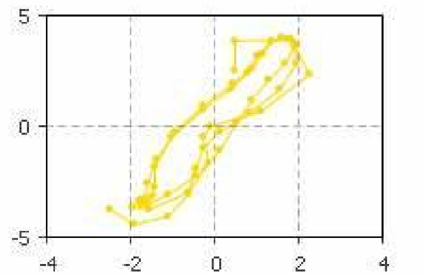
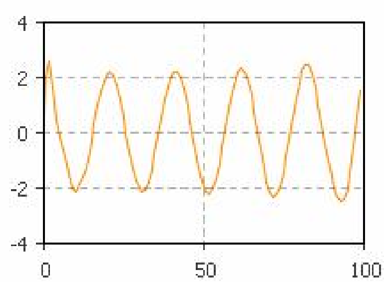
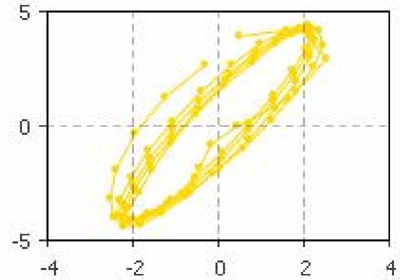
Результати тестування другої імітаційної моделі

Значення γ	Залежність $x(t)$	Фазовий портрет
$\gamma = 0,1$		
$\gamma = 0,5$		

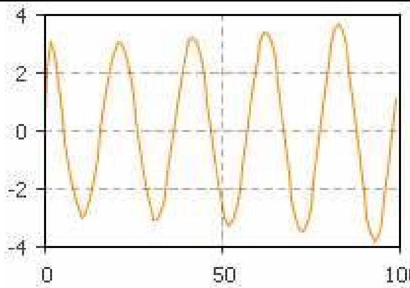
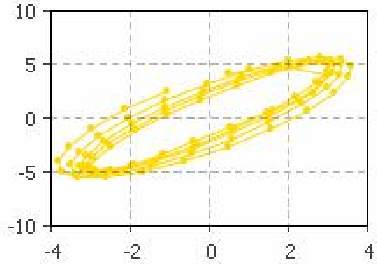
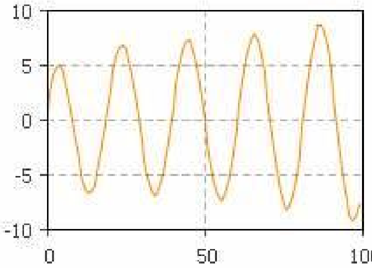
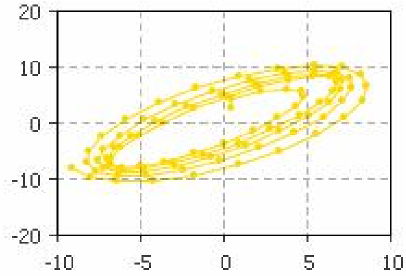
3. $\tau(t) = e^{0,01 \cdot t}$ для $t \le 0$.

Таблиця 6

Результати тестування другої імітаційної моделі

Значення K	Залежність $x(t)$	Фазовий портрет
α = 2.3		
α = 2.1		
α = 1.5		
α = 1.2		
α = 1		

 ISSN 1562-9945

$\alpha = 0.7$		
$\alpha = 0.2$		

Висновки

В роботі розглянута поведінка розв'язків динамічної системи при 3 типах запізнення: степеневе, лінійне та експоненційне. При степеневому запізненні розв'язок динамічної системи змінює свою якісну поведінку в залежності від коефіцієнту γ від збіжності до певного фіксованого значення до осциляції з нескінченно зростаючою амплітудою. При експоненційному запізненнірозв'язок динамічної системи виходить в сталий режим роботи починаючи з точки, в якій величина запізнення $\tau(t)$ зрівнюється з часом t. У випадку лінійного запізнення $\tau(t) = \gamma t$ розв'язок систем (1) та (2) розбігається.

ЛІТЕРАТУРА

1. Солодова Е.А.Новыемодели в системеобразования : синергетическийподход /Е.А. Солодова //Москва: ЛИБРОКОМ, 2013– 342 с.,ил.
2. Солодов А.В., Солодова Е.А. Системы с переменнымзапаздыванием. М. Наука, 1980 – 384 с.
3. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматическогорегулирования. М.: Наука, 1972 - 768 с.
4. Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи математических наук. – 1949. – Т. 4. – №. 5 (33) – С. 99-141.