

А.И. Михалев, М.А. Солдатова, А.С. Стенин

**МОДАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ
СТАБИЛИЗАЦИИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ С
ТРАНСПОРТНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Аннотация. Предложен модальный синтез оптимальных законов стабилизации объектов управления с транспортным запаздыванием в виде линейной комбинации переменных состояния, позволяющих обеспечить заданные динамические свойства замкнутой оптимальной системы.. Модальный синтез оптимальных законов стабилизации осуществляется на основе метода неопределенных коэффициентов и процедуры выбора и коррекции спектракорней(собственных чисел) замкнутой оптимальной системы. Для устранения возникновения из-за наличия запаздывания устойчивых автоколебаний в конечной точке процесса стабилизации вблизи программной траектории движения предлагается использовать метод компенсации запаздывания Бесса.

Ключевые слова: линейная стационарная система, режим стабилизации, транспортное запаздывание, модальный синтез, оптимальный закон

Актуальность проблемы

Динамика большинства технологических процессов в разных отраслях народного хозяйства, в том числе металлургии и машиностроения, в режиме стабилизации переменных состояния описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами]. Многие из них имеют запаздывание в контуре управления. Наличие запаздывания объясняется конечной скоростью распространения потоков информации в технологических процессах. Запаздывание может возникать также в связи с затратой времени на передачу сигнала или, как это бывает чаще, вызывается упрощающими явление предположениями, в силу которых считают, что действие промежуточных и усиливающих звеньев в управляемом технологическом процессе сводится к передаче сигнала с запаздыванием [1,2]. В этих случаях принято говорить о технологических процессах с транспортным запаздыванием.

Как правило, запаздывание имеет сравнительно малую величину, однако не учет запаздывания приводит к возникновению в процессе управления нежелательных эффектов, в частности возникновению устойчивых автоколебаний в установившемся режиме. Кроме того, ухудшается качество процесса стабилизации.

Отсюда задача синтеза оптимальных законов стабилизации объектов управления актуальна и имеет несомненную практическую ценность.

Обзор существующих решений

Одной из центральных задач как теории, так и практики автоматического управления является задача синтеза систем, в результате решения которой определяются, структура системы автоматического управления (САУ) и ее параметры из условия обеспечения устойчивости системы и качества переходных процессов (достижение необходимого быстродействия, недопустимость больших перерегулирований), повышения точности управления в установившихся режимах и др. Линейные регуляторы состояния являются эффективным средством обеспечения динамических показателей работы не только линейных объектов управления любого, сколь угодно высокого порядка, но и объектов, содержащих нелинейные и дискретные звенья, оказывающие существенное, но не определяющее влияние на динамические процессы. Существует два основных детерминированных подхода к созданию систем управления по вектору состояния объекта – АКОР (аналитическое конструирование оптимальных регуляторов) и модальное управление. В 1960 г. появилась работа профессора А.М. Летова [3,5], в которой было получено аналитическое решение задачи об оптимальной стабилизации линейных стационарных объектов при квадратичном функционале качества. Это направление получило название аналитического конструирования регуляторов. В зарубежных источниках оно называется линейно-квадратической оптимизацией, а первой зарубежной публикацией была вышедшая в том же 1960 г. работа американского математика Р. Калмана, в которой решалась задача оптимизации линейных нестационарных объектов [4]. АКОР имеет конечной целью получение закона управления чисто аналитическим путем, исходя из требований, предъявляемых к качеству управления [5,6]. Синтез желаемой замкнутой оптимальной системы управления с использованием АКОР зависит от выбора проектиров-

щиком подходящих значений коэффициентов матриц штрафов для получения минимума критерия качества, что не вполне удобно из-за отсутствия очевидной зависимости между выбранными коэффициентами и переходными процессами в замкнутой системе. Кроме того, применение метода АКОР приводит к необходимости решения нелинейного матричного уравнения Риккати, что является нетривиальной задачей и требует использования специальных численных процедур [7]. Кроме того, основным недостатком метода АКОР является отсутствие прямой зависимости между коэффициентами функционалов и показателями качества процессов стабилизации объектов управления. Этого недостатка лишен метод модального управления,

Суть модального синтеза оптимального управления состоит в определении численных значений коэффициентов передачи безынерционных обратных связей (ОС) по всем переменным состояния технического процесса с целью обеспечения заданного распределения корней характеристического уравнения (собственных чисел) замкнутой оптимальной системы управления [8]. При этом возникает трудность выбора требуемых собственных чисел, особенно при наличии эффекта транспортного запаздывания

В данном докладе, для преодоления указанных трудностей, предложен модальный синтез оптимальных законов стабилизации технологических процессов с транспортным запаздыванием в виде линейной комбинации переменных состояния, позволяющий обеспечить заданные динамические свойства. Процедура модального синтеза оптимального закона стабилизации осуществляется на основе оригинальных метода неопределенных коэффициентов и процедуры выбора и коррекции спектра корней замкнутой оптимальной системы. Для устранения возникновения из-за наличия запаздывания устойчивых автоколебаний в конечной точке процесса стабилизации вблизи заданной траектории движения предлагается использовать метод компенсации запаздывания Бесса [9].

Постановка задачи

Пусть модель динамики объекта управления описывается как

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}y, \quad (1)$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ полностью измеряемый вектор отклонений состояний системы от программной траектории движения ; A , B –

матрицы коэффициентов размерностью $n \times n$, $n \times l$; y – скаляр, характеризующий отклонение органа управления, динамическая модель которого имеет вид

$$\dot{y} = \lambda_y y + d_u u(t - \theta), \quad (2)$$

где λ_y, d_u, θ – константы, определяемые особенностями объектов управления; $u(t)$ – скалярное управляющее воздействие, которое будем искать в виде

$$u = \bar{p}^T \bar{x}, \quad (3)$$

Задача заключается в определении коэффициентов $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$, обеспечивающих заданные динамические свойства процесса стабилизации и обеспечении устойчивого программного движения системы (1).

Решение задачи стабилизации

Так как запаздывание θ , как правило, достаточно малая величина, запишем уравнение (2) как

$$\dot{y}(t) = \lambda_y y(t) + d_u u(t) - d_u \theta \dot{u}(t) \quad (4)$$

В том случае если каким-либо образом оценить или измерить состояние оператора $y(t)$, система (1), (4) является полностью наблюдаемой и задача решается следующим образом.

Вводим в рассмотрение расширенный фазовый вектор $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = y)^T$. Тогда уравнение замыкания имеет вид

$$u = \bar{p}^T \tilde{x}, \quad (5)$$

а характеристический полином замкнутой системы (1), (4) примет вид

$$\det(A^* - I\lambda) = \begin{vmatrix} A - I\lambda & B \\ \frac{-d_u(\bar{p}^T - \theta \bar{p}^T A)}{1 + d_u \theta p_{n+1}} & \frac{\lambda_y + d_u p_{n+1} - \theta \bar{p}^T B}{1 + d_u \theta p_{n+1}} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

где A^* – матрица $(n+1) \times (n+1)$, $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$

Известно, что умножение всех элементов какой-либо строки или столбца на множитель λ равносильно умножению определителя на λ [7]. Отсюда, определитель (6) можно записать

$$\det(A^* - I\lambda) = \frac{1}{1 + d_u \theta p_{n+1}} \begin{vmatrix} A - I\lambda & B \\ \bar{p}^T - \theta \bar{p}^T A & \lambda_y + d_u p_{n+1} - d_u \bar{p}^T \theta B - \lambda(1 + d_u \theta p_{n+1}) \end{vmatrix}$$

и, следовательно, считая, что $(1 + d_u \theta p_{n+1})^{-1} \neq 0$, запишем

$$\begin{vmatrix} A - I\lambda & B \\ \bar{p}^T - \theta \bar{p}^T A & \lambda_y + d_u p_{n+1} - d_u \bar{p}^T \theta B - \lambda(1 + d_u \theta p_{n+1}) \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Легко показать, что определитель (7) является полиномом степени $(n+1)$ от λ , и коэффициенты его линейно зависят от

$$\tilde{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1})^T,$$

то есть

$$\det(A^* - I\lambda) = H(\lambda, \tilde{p}) = \lambda^{n+1} + (\tilde{d}_n^T \tilde{p} + d_n^0) \lambda^n + \dots + (\tilde{d}_1^T \tilde{p} + d_1^0) = 0. \quad (8)$$

Действительно, раскрывая определитель (7) по последней строке, в которой каждый элемент является линейной комбинацией коэффициентов \tilde{p} , приходим к выражению (8). Определение неизвестных коэффициентов $\tilde{d}_i, d_i^0 (i = \overline{0, n})$ производится аналогично процедуре метода неопределенных коэффициентов [6].

Приравнивая между собой коэффициенты при степенях полинома (8) и полинома с выбранным для обеспечения заданных качественных показателей переходных процессов спектром $\{\lambda_i\} (i = \overline{1, n+1})$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_i) = \sum_{k=0}^{n+1} l_k \lambda^k, \quad (9)$$

где $l_{n+1}=1$,

получаем совместную систему линейных алгебраических уравнений

$$D_{n+1} \tilde{p} = \tilde{l}, \quad (10)$$

где D_{n+1} – матрица $(n+1) \times (n+1)$ коэффициентов, а \tilde{p}, \tilde{l} – векторы-столбцы размерностью $(n+1)$.

Решение системы (4.31) \tilde{p}^* доставляет замкнутой системе заданный спектр $\{\lambda_i\}, (i = \overline{1, n+1})$.

Зачастую, в реальных условиях измерить или оценить соответствие оператора $y(t)$ невозможно. Тогда необходимо в уравнении замыкания (5) положить $p_{n+1} \equiv 0$.

В результате характеристический определитель замкнутой системы имеет вид

$$\det(A^* - I\lambda) = \left| \frac{A - I\lambda}{d_u(p^{-T} - \theta p^{-T} A)} \right| \frac{B}{\lambda_y - d_u \theta p^{-T} B - \lambda}. \quad (11)$$

Желаемый характеристический полином определяется, как и в предыдущем случае, выражением (9). Приравнивая коэффициенты полиномов (11) и (9) при одинаковых степенях λ получим в отличие от (10) несовместную систему линейных алгебраических уравнений

$$D_n \bar{p} = \tilde{l}, \quad (12)$$

где D_n – матрица ($n \times n$) коэффициентов; \bar{p} – n -мерный вектор-столбец.

Для решения такой системы можно воспользоваться методом наименьших квадратов[8], согласно которого вектор неизвестных коэффициентов \bar{p} приближенно определяется как

$$\bar{p} = (D_n^T D_n)^{-1} D_n \tilde{l}. \quad (13)$$

Выбор и коррекция спектра корней

Как правило, в режиме стабилизации качество управления объектом определяется временем переходного процесса $t_{\text{пп.}}$ и степенью затухания этого процесса

$$\xi = \frac{x_j(t_{\text{пп.}})}{x_j(t_0)} < 1 \quad (j=1, n) \quad (14)$$

где \bar{x}_j – элементы вектора состояния \bar{x} .

Если $\lambda_0 = \varepsilon_0 + i\omega_0$ – доминирующий корень, то решение системы (1) можно приближенно записать в виде

$$x_j = x_j(t_0) e^{\varepsilon_0 t} \cos(\omega_0 t + j_i) \quad (j=1, n) \quad (15)$$

Из уравнения (15) с учетом выражения (14) получаем

$$\frac{x_j(t_{\text{пп.}})}{x_j(t_0)} \leq e^{\varepsilon_0 t_{\text{пп.}}} \leq \xi, \quad (16)$$

откуда $\varepsilon_0 \leq \frac{\ln \xi}{t_{\text{пп.}}} < 0$.

Величину мнимой части ω_0 выбираем равной $1/t_{\text{пп.}}$. При этом за время переходного процесса переменная $x_j(t)$ совершил одно колебание вокруг положения равновесия и будет стремиться к нему с противо-

положной относительно начального возмущения стороны, что весьма желательно по физическим соображениям.

Во избежание перерегулирования остальные корни характеристического полинома следует размещать возможно ближе к доминирующему с выполнением условий

$$\begin{aligned}\omega_0 &< \omega_1 < \omega_2 < \dots, \\ |\varepsilon_0| &< |\varepsilon_1| < |\varepsilon_2| < \dots,\end{aligned}\tag{17}$$

чтобы составляющие с большой колебательностью затухали быстрее

$$|\lambda_k| - |\lambda_{k-1}| > 0,1(|\lambda_k|),\tag{18}$$

и чтобы корни несливались в кратные [7].

Для уменьшения времени переходного процесса желательно располагать корни на комплексной плоскости как можно левее. Однако ограничения на переменные состояния накладывают определенные ограничения и на модули корней.

Учитывая запись (12) записываем

$$x_j = \frac{d}{dt} x_j = \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} x(t_0) e^{\varepsilon t} \cos(\omega t + j_{j1}) = \max_t \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} x_j(t_0).\tag{19}$$

Каждое j -е уравнение системы (1) порождает две верхние границы модулей корней характеристического полинома, вызванные одним и тем же ограничением на левую и правую части j -го уравнения системы (1).

С учетом выражения (16) определяем для левой части j -го уравнения системы (1), что

$$\max_t \max_\lambda x_j = \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} x_j(t_0) e^{\varepsilon t} \cos(\omega t + j_{j1}) = \max \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} x_j(t_0).\tag{20}$$

Для правой части

$$\max_t \max_\lambda \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq \sum_{i=1}^n |a_{ji} x_i(t_0)|.\tag{21}$$

Сравнивая выражения (17) и (18), ввиду отсутствия явной зависимости неравенства (21) от модуля корней можем записать следующее неравенство:

$$\max_\lambda \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n |a_{ji} x_i(t_0)|}{x_j(t_0)}.\tag{22}$$

Наиболее жесткое из ограничений вида (22) даст левую границу расположения корней характеристического полинома. При этом

стремление ϵ к увеличению для ускорения затухания процесса приводит к минимизации ω с учетом выражений (17) и (18).

Расположение корней может быть скорректировано после моделирования переходного процесса, исходя из наложенных на переменные состояния ограничений, путем изменения коэффициентов характеристического полинома.

Пусть на j -ю переменную состояния наложено ограничение $\max|x_j| \leq x_j^{\text{зад}}$. В этом случае умножением коэффициентов характеристического полинома при степени 1 на величину $\left[\frac{x_j^{\text{зад}}}{x_j}\right]$ гомотетично сдвигаем все корни относительно начала координат (согласно теореме Виета) с коэффициентом гомотетии $x_j^{\text{зад}}/x_j$ [7]. Также согласно выражению (21) изменится значение $\max|x_j|$.

Обеспечение отсутствия автоколебаний вблизи программной траектории движения системы

Синтезированный, предложенным в статье методом, оптимальный закон стабилизации (3) системы (1) обеспечивает заданные динамические свойства процесса стабилизации системы при возникновении отклонений от заданной (программной) траектории движения. Однако, этот закон не устраняет возникновения из-за наличия запаздывания устойчивых автоколебаний в конечной точке процесса стабилизации вблизи заданной траектории движения. Для устранения этого эффекта предлагается использовать метод компенсации запаздывания Бесса [9], согласно которому необходимо, интегрируя в обратном времени систему (1), найти поверхность, отстоящую на время запаздывания от точек нулевого рассогласования, лежащих на программной траектории движения системы (1). Фактически, эта поверхность представляет собой трубку, внутри которой находится программная траектория.

Заключение

Предложенным в статье модальным синтезом линейных замкнутых стационарных систем с транспортным запаздыванием, оптимальным законом управления (3) по приведенной процедуре можно обеспечить в них требуемые динамические свойства. Процедура модального синтеза оптимального закона управления осуществляется на основе метода неопределенных коэффициентов. Для устранения возникновения из-за

наличия запаздывания устойчивых автоколебаний в конечной точке процесса стабилизации вблизи заданной траектории движения предлагаются использовать метод компенсации запаздывания Бесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Системы автоматического управления с запаздыванием : учеб.пособие / Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, А.В. Лагутин, О.Г. Иванова, В.М. Тютюнник. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 76 с.
2. Янушевский, Р.Т. Управление объектами с запаздыванием / Р.Т. Янушевский. – М. : Наука, 1978. – 416 с.
3. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. № 4., сс.436-441.
4. Kalman R. Contribution to the theory of optimal control/ R.Kalman // Bul.Soc.Mech.Mat. – 1960. Vol.12, No.2. – P.102-119.
5. Летов А.М. Некоторые нерешенные задачи теории автоматического управления/ А.М.Летов – М.: Наука, 1966. – 256с.
6. А.А.Стенин, О.И.Лисовиченко, М.М.Ткач, В.П.Пасько Модальный синтез оптимальных законов стабилизации линейных стационарных систем BulgarianJournalforEngineeringDesign, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia.№ 30, 2016. pp.11-16
7. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформації. К.: Видавничагрупа BHV, 2006. – 480 с.
8. В.В. Григорьев, Н.В. Журавлёва, Г.В. Лукьянова, К.А. Сергеев Синтез систем автоматического управления методом модального управления. С-Пб: СПбГУ ИТМО, 2007. 108 с.
9. Bass R.W. Improved on-off Missile Stabilization // Jet Propulsion. – Vol.26. – 1956. – P.415-417.