

А.А. Шумейко, В. Смородский

## БЫСТРОЕ ДИСКРЕТНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СО СВОБОДНЫМ ФАЗОВЫМ СДВИГОМ

*Аннотация. В статье рассмотрено использование дискретного быстрого тригонометрического преобразования с свободным фазовым сдвигом к задаче обработки изображения. Показано, что при всех равных условиях, это преобразование дает лучшие результаты, чем дискретное косинус-преобразование, используемое в методе JPEG.*

### Введение

Информатизация общества привела к существенному изменению уклада жизни. Сбои в работе интернета вызывают чуть-ли не панику, и ответ на вопрос – есть ли жизнь без интернета, совершенно адекватен – нет. На данный момент (по результатам 2015 года) компания Cisco оценивает общий поток трафика 72,426 exabytes в месяц [1] и при этом оценивает рост интернет-трафика на 23% ежегодно. Эксперты предрекают, что спрос со стороны пользователей уже в ближайшее время превысит возможности предложения. Связано это с ростом популярности таких генерирующих большие объемы трафика сервисов, как YouTube и BBC iPlayer, а также с тем, что все большее число людей работает онлайн. Разного рода эксперты предрекают, что пользователям все чаще придется иметь дело со сбоями в работе сети, поскольку свободная емкость киберпространства подходит к концу. Насколько эти апокалипсические прогнозы оправданы, покажет будущее, но что очевидно – так это то, что чем дальше, тем более актуальной задачей является сжатие таких ресурсоемких данных, как изображений и видео. Объем графической информации настолько велик, что при ее сжатии борются буквально за каждый байт, так как его хранение и передача стоит денег. По некоторым оценкам дополнительное сжатие хотя бы на 5% дает выигрыш в миллионы долларов [2]. Примерно та же ситуация сохраняется и при передаче изображений по каналам связи. Существующей пропускной способности

---

© Шумейко А.А., Смородский В., 2017

не хватает, чтобы в полной мере удовлетворить потребности пользователей. Все выше сказанное и определяет актуальность задачи сжатия изображений.

Среди методов сжатия изображений узловыми являются технологии, используемые семейством JPEG – JPEG2000 (см., например, [3]). При этом, несмотря на большие усилия направленные на замену JPEG на JPEG2000. JPEG де факто является стандартом для представления изображений во всемирной сети. Данная работа посвящена модификации JPEG с целью увеличения степени сжатия изображений без ухудшения качества изображения.

Основой JPEG является дискретное двумерное косинус-преобразование. Прямое преобразование имеет вид

$$D_{v,\mu} = \frac{1}{4} C_v C_\mu \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} d_{i,j} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi v}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2j+1)\pi \mu}{2N}\right), v, \mu = 0, 1, \dots, N-1,$$

а обратное преобразование записывается следующим образом

$$d_{i,j} = \frac{1}{4} \sum_{v=0}^{N-1} \sum_{\mu=0}^{N-1} C_v C_\mu D_{v,\mu} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi v}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2j+1)\pi \mu}{2N}\right), i, j = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\text{где } C_i = \begin{cases} 1/\sqrt{N}, & i = 0, \\ \sqrt{2/N}, & i > 0. \end{cases}$$

#### Дискретное тригонометрическое преобразование со свободным фазовым сдвигом

Авторами получено следующее утверждение.

Теорема. Пусть  $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , тогда для любых  $\{h_m\}_{m=0}^{N-1}$  таких, что  $-\infty < h_m < \infty, m = 0, 1, \dots, N-1$  положим

$$H_k = \sum_{m=0}^{N-1} h_m \cos\left(\frac{2\pi m k}{N} - \phi\right); \quad (1)$$

имеет место равенство

$$h_n = \frac{2}{N \sin(2\phi)} \sum_{k=0}^{N-1} H_k \sin\left(\frac{2\pi n k}{N} + \phi\right). \quad (2)$$

Заметим, что варьируя фазовым сдвигом  $\phi$ , можно добиваться улучшения качества восстановления исходных данных в случае, если частотные коэффициенты подвергаются искажениям.

Приведем несколько примеров.

Пусть  $N = 4$ , тогда для исходных данных  $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$

$$H_0 = (h_0 + h_1 + h_2 + h_3) \cos \phi, H_1 = (h_0 - h_2) \cos \phi + (h_1 - h_3) \sin \phi,$$

$$H_2 = (h_0 - h_1 + h_2 - h_3) \cos \phi, H_3 = (h_0 - h_2) \cos \phi - (h_1 - h_3) \sin \phi.$$

Пусть, в этом случае,  $h_1 \neq h_3$  и  $h_0 \neq h_2$  положим  $H_3 = 0$ , тогда, выбирая

$$\phi = \operatorname{arctg} \left( \frac{h_0 - h_2}{h_1 - h_3} \right) \quad (3)$$

получим полное восстановление данных  $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$ .

Действительно, проводя обратное преобразование, с учетом  $H_3 = 0$ , получаем

$$h_0 = \frac{3h_0 \cos \phi + h_1 \sin \phi + h_2 \cos \phi - h_3 \sin \phi}{4 \cos \phi}, \quad (4)$$

$$h_1 = \frac{h_0 \cos \phi + 3h_1 \sin \phi - h_2 \cos \phi + h_3 \sin \phi}{4 \sin \phi}, \quad (5)$$

$$h_2 = \frac{h_0 \cos \phi - h_1 \sin \phi + 3h_2 \cos \phi + h_3 \sin \phi}{4 \cos \phi}, \quad (6)$$

$$h_3 = \frac{-h_0 \cos \phi + h_1 \sin \phi + h_2 \cos \phi + 3h_3 \sin \phi}{4 \sin \phi}. \quad (7)$$

Тогда, с учетом (3), из (4) получаем

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{3h_0 \cos \phi + h_1 \sin \phi + h_2 \cos \phi - h_3 \sin \phi}{4 \cos \phi} = \frac{1}{4} (3h_0 + h_1 \operatorname{tg} \phi + h_2 - h_3 \operatorname{tg} \phi) = \\ &= \frac{3h_0 + h_2 + (h_1 - h_3) \operatorname{tg} \phi}{4} = \frac{1}{4} \left( 3h_0 + h_2 + (h_1 - h_3) \frac{h_0 - h_2}{h_1 - h_3} \right) = h_0. \end{aligned}$$

Аналогично, раскрывая соотношения (6)-(7) с учетом (2), получаем точную реконструкцию данных  $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$ .

Проводя такие же преобразования для  $N = 8$  и при  $(h_1 - h_3 + h_5 - h_7)(h_0 - h_2 + h_4 - h_6) \neq 0$ , положим  $H_6 = 0$ , тогда выбирая

$$\phi = \operatorname{arctg} \left( \frac{h_0 - h_2 + h_4 - h_6}{h_1 - h_3 + h_5 - h_7} \right)$$

получим полное восстановление данных  $\{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$ .

Если же  $H_7 = 0$ , при условии

$$(h_1 + h_2\sqrt{2} + h_3 - h_5 - h_6\sqrt{2} - h_7)(h_0\sqrt{2} + h_1 - h_3 - h_4\sqrt{2} - h_5 + h_7) \neq 0$$

$$\text{выбирая } \phi = \arctg\left(\frac{h_0\sqrt{2} + h_1 - h_3 - h_4\sqrt{2} - h_5 + h_7}{h_1 + h_2\sqrt{2} + h_3 - h_5 - h_6\sqrt{2} - h_7}\right)$$

также получим полное восстановление данных  $\{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$ .

Использование возможности использования фазового сдвига для улучшения восстановления данных позволяет на основании полученного дискретного преобразования строить адаптивные фильтры, подстраивая фильтр не только для входных данных, но и, например, для используемого метода квантования или природы шума, вносящего искажения в сигнал.

Пусть для заданного  $N$  вместо  $H_k (k = 1, 2, \dots, N-1)$  имеем их приближенные значения  $\tilde{H}_k (k = 1, 2, \dots, N-1)$

Получим восстановление исходных данных

$$\tilde{h}_n = \frac{2}{N \sin(2\phi)} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}_k \sin\left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi\right)$$

и вычислим ошибку восстановления

$$\varepsilon(\phi) = \sum_{n=0}^{N-1} (h_n - \tilde{h}_n)^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left( h_n - \frac{2}{N \sin(2\phi)} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}_k \sin\left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi\right) \right)^2$$

и найдем производную

$$\frac{d}{d\phi} \varepsilon(\phi) = -\frac{4}{N \sin(2\phi)} \sum_{n=0}^{N-1} \left( h_n - \frac{2}{N \sin(2\phi)} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}_k \sin\left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi\right) \right) \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}_k \cos\left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi\right)$$

Решая уравнение

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left( N \sin(2\phi) h_n - 2 \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}_k \sin\left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi\right) \right) \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}_k \cos\left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi\right) = 0$$

найдем решение  $\phi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , если же такого решения нет, то решение

лежит на границе, то есть - дискретное косинус-преобразование или преобразование Хартли.

Одной из популярных сфер использования дискретного косинус-преобразования есть обработка двумерных сигналов, то есть изображений. Например, один из наиболее популярных методов сжатия

изображений – JPEG основан на использовании ДКТ на квадратах  $N \times N$  пикселей, где  $N=8$

$$c_{i,j}^k = \frac{2}{N} C_i C_j \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} p_{n,m} \cos\left(\frac{(2n+1)i\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)j\pi}{2N}\right),$$

$$\text{где } C_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & i = 0, \\ 1, & i > 0. \end{cases}$$

достаточно неплохо себя зарекомендовало двумерное дискретное преобразование Хартли

$$h_{i,j}^k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} p_{n,m} \text{cas}\left(\frac{2in\pi}{N}\right) \text{cas}\left(\frac{2jm\pi}{N}\right), \text{ здесь } \text{cas}\phi = \cos\phi + \sin\phi.$$

Дискретное тригонометрическое преобразование со свободным фазовым сдвигом выглядит следующим образом – прямой ход

$$h_{i,j} = \frac{2}{N \sin(2\phi)} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} p_{n,m} \cos\left(\frac{2\pi in}{N} - \phi\right) \cos\left(\frac{2\pi jm}{N} - \psi\right),$$

и обратный ход

$$p_{n,m} = \frac{2}{N \sin(2\psi)} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} h_{i,j} \sin\left(\frac{2\pi in}{N} + \psi\right) \sin\left(\frac{2\pi jm}{N} + \phi\right).$$

Заметим, что для данного тригонометрического преобразования существует быстрое преобразование. Приведем быстрый алгоритм для случая  $N=8$ .

Нетрудно видеть, что для  $N=8$

$$H_0 = (h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + h_7) \cos\phi,$$

$$H_1 = \left( h_0 - h_4 + (h_1 - h_3 - h_5 + h_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos\phi + \left( h_2 - h_6 + (h_1 + h_3 - h_5 - h_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin\phi,$$

$$H_2 = (h_0 - h_2 + h_4 - h_6) \cos\phi + (h_1 - h_3 + h_5 - h_7) \sin\phi,$$

$$H_3 = \left( h_0 - h_4 - (h_1 - h_3 - h_5 + h_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos\phi + \left( -h_2 + h_6 + (h_1 + h_3 - h_5 - h_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin\phi,$$

$$H_4 = (h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + h_4 - h_5 + h_6 - h_7) \cos\phi,$$

$$H_5 = \left( h_0 - h_4 - (h_1 - h_3 - h_5 + h_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos\phi + \left( h_2 - h_6 - (h_1 + h_3 - h_5 - h_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin\phi,$$

$$H_6 = (h_0 - h_2 + h_4 - h_6) \cos \phi - (h_1 - h_3 + h_5 - h_7) \sin \phi,$$

$$H_7 = \left( h_0 - h_4 + (h_1 - h_3 - h_5 + h_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos \phi + \left( -h_2 + h_6 - (h_1 + h_3 - h_5 - h_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin \phi.$$

Обратное преобразование можно записать в виде

$$h_0 = K \left( (H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + H_7) \sin \phi \right),$$

$$h_1 = K \left( \left( H_0 - H_4 + (H_1 - H_3 - H_5 + H_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin \phi + \left( H_2 - H_6 + (H_1 + H_3 - H_5 - H_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos \phi \right),$$

$$h_2 = K \left( (H_0 - H_2 + H_4 - H_6) \sin \phi + (H_1 - H_3 + H_5 - H_7) \cos \phi \right),$$

$$h_3 = K \left( \left( H_0 - H_4 - (H_1 - H_3 - H_5 + H_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin \phi + \left( -H_2 + H_6 + (H_1 + H_3 - H_5 - H_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos \phi \right),$$

$$h_4 = K \left( (H_0 - H_1 + H_2 - H_3 + H_4 - H_5 + H_6 - H_7) \sin \phi \right),$$

$$h_5 = K \left( \left( H_0 - H_4 - (H_1 - H_3 - H_5 + H_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin \phi + \left( H_2 - H_6 - (H_1 + H_3 - H_5 - H_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos \phi \right),$$

$$h_6 = K \left( (H_0 - H_2 + H_4 - H_6) \sin \phi - (H_1 - H_3 + H_5 - H_7) \cos \phi \right),$$

$$h_7 = K \left( \left( H_0 - H_4 + (H_1 - H_3 - H_5 + H_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin \phi + \left( -H_2 + H_6 - (H_1 + H_3 - H_5 - H_7) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos \phi \right),$$

где  $K = (8 \sin \phi \cos \phi)^{-1}$ .

Количество арифметических операций можно сократить, введя следующие построения.

Положим

$$a_0 = h_0 - h_4, a_1 = h_2 - h_6, a_2 = h_1 - h_3 - h_5 + h_7, a_3 = h_1 + h_3 - h_5 - h_7,$$

$$a_4 = h_0 - h_2 + h_4 - h_6, a_5 = h_1 - h_3 + h_5 - h_7, a_6 = h_0 + h_2 + h_4 + h_6,$$

$$a_7 = h_1 + h_3 + h_5 + h_7, b_2 = \frac{a_2}{\sqrt{2}}, b_3 = \frac{a_3}{\sqrt{2}},$$

$$c_0 = a_0 + b_2, c_1 = a_0 - b_2, c_2 = a_1 + b_3, c_3 = a_1 - b_3.$$

Тогда быстрый алгоритм дискретного тригонометрического преобразования можно записать в виде

$$H_0 = (a_6 + a_7) \cos \phi, H_1 = c_0 \cos \phi + c_2 \sin \phi, H_2 = a_4 \cos \phi + a_5 \sin \phi,$$

$$H_3 = c_1 \cos \phi - c_3 \sin \phi, H_4 = (a_6 - a_7) \cos \phi, H_5 = c_1 \cos \phi + c_3 \sin \phi,$$

$$H_6 = a_4 \cos \phi - a_5 \sin \phi, H_7 = c_0 \cos \phi - c_2 \sin \phi.$$

Без оптимизации дискретное тригонометрическое преобразование использует 56 суммирований, 64 вычитания, 256 умножений, 64 деления и 64 вычисления тригонометрических функций. Быстрый

алгоритм использует 16 суммирований, 16 вычитаний, 14 умножений, два деления, одно вычисление квадратного корня и два вычисления тригонометрических функций (при этом следует заметить, что вместо вычисления квадратного корня из двух, можно использовать константу, равную этому значению).

Выпишем быстрое обратное преобразование.

$$A_0 = H_0 - H_4, A_1 = H_2 - H_6, A_2 = H_1 - H_3 - H_5 + H_7,$$

$$A_3 = H_1 + H_3 - H_5 - H_7,$$

$$A_4 = H_0 - H_2 + H_4 - H_6, A_5 = H_1 - H_3 + H_5 - H_7,$$

$$A_6 = H_0 + H_2 + H_4 + H_6, A_7 = H_1 + H_3 + H_5 + H_7,$$

$$B_2 = \frac{A_2}{\sqrt{2}}, B_3 = \frac{A_3}{\sqrt{2}},$$

$$C_0 = A_0 + B_2, C_1 = A_0 - B_2, C_2 = A_1 + B_3, C_3 = A_1 - B_3.$$

Тогда

$$h_0 = K(A_6 + A_7) \sin \phi, h_1 = K(C_0 \sin \phi + C_2 \cos \phi),$$

$$h_2 = K(A_4 \sin \phi + A_5 \cos \phi),$$

$$h_3 = K(C_1 \sin \phi - C_3 \cos \phi), h_4 = K(A_6 - A_7) \sin \phi,$$

$$h_5 = K(C_1 \sin \phi + C_3 \cos \phi),$$

$$h_6 = K(A_4 \sin \phi - A_5 \cos \phi), h_7 = K(C_0 \sin \phi - C_2 \cos \phi),$$

где  $K = (8 \sin \phi \cos \phi)^{-1}$ .

Без оптимизации обратное дискретное тригонометрическое преобразование использует 56 суммирований, 64 вычитания, 265 умножений, 65 делений и 65 вычислений тригонометрических функций. Быстрый алгоритм использует 16 суммирований, 16 вычитаний, 24 умножения, три деления, одно вычисление квадратного корня и два вычисления тригонометрических функций.

Результаты численных экспериментов.

По результатам исследований, были проведены численные эксперименты.

В качестве критерия оценки восстановления оригинального изображения  $I(i, j)$  изображением  $K(i, j)$ ,  $(i = 0, 1, \dots, m - 1, j = 0, 1, \dots, n - 1)$ , обработанным с использованием дис-

кретного тригонометрического преобразования с квантованием частотных коэффициентов, использовалось отношение сигнал/шум

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{MAX_I^2}{MSE} \right) = 20 \log_{10} \frac{MAX_I}{\sqrt{MSE}},$$

где

$$MSE = \frac{1}{nm} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} |I(i, j) - K(i, j)|^2$$

Для тестирования были взяты изображения тестовой базы TID2008 фирмы Kodak [7].

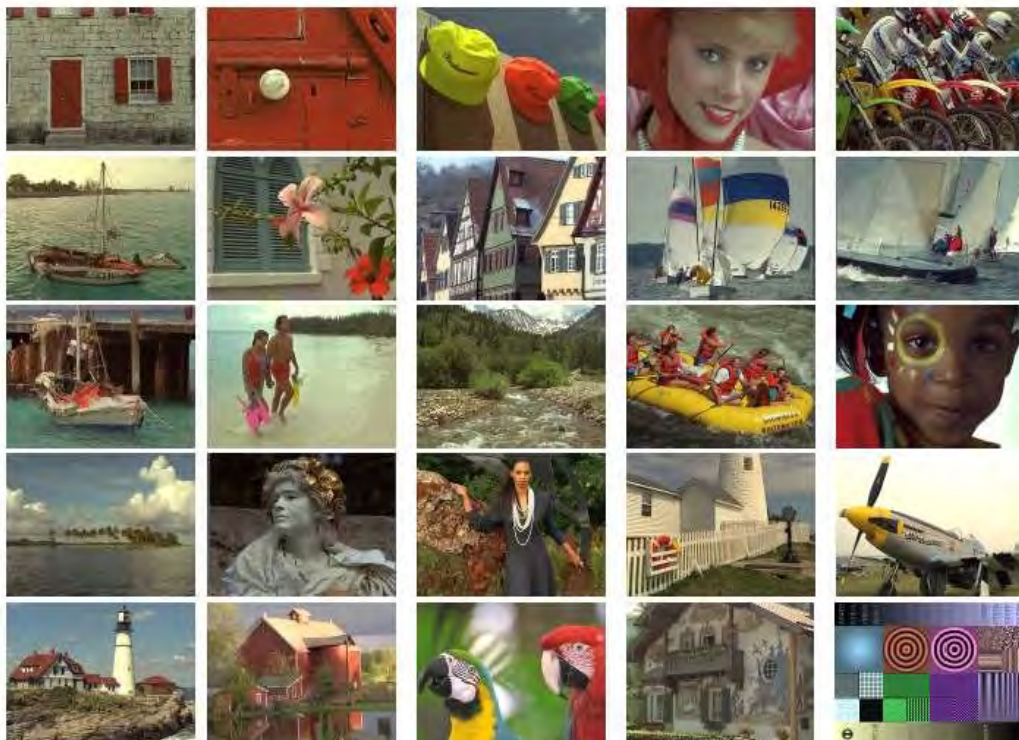


Рисунок 1 - Тестовые изображения (тестовой базы TID2008)

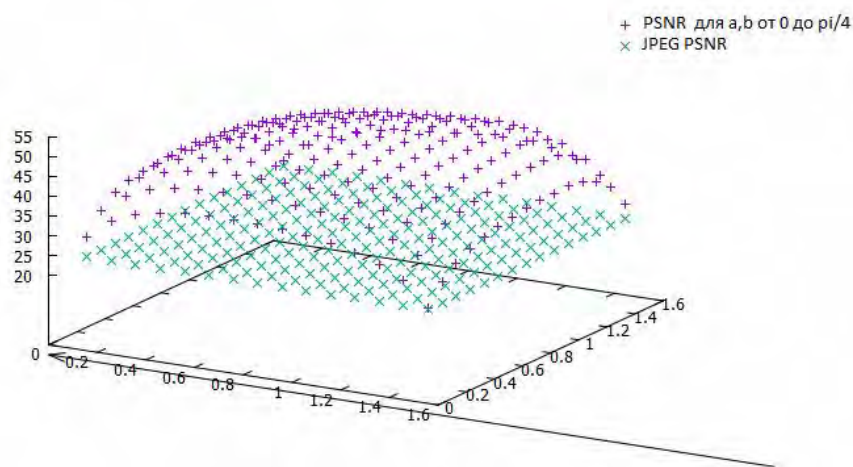


Рисунок 2 - Результат тестирования для портретного снимка



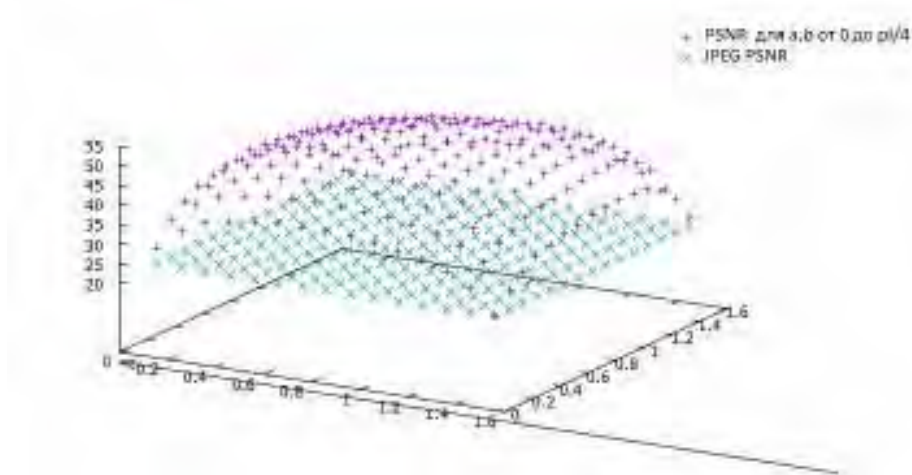


Рисунок 3 - Результат тестирования для пейзажного снимка

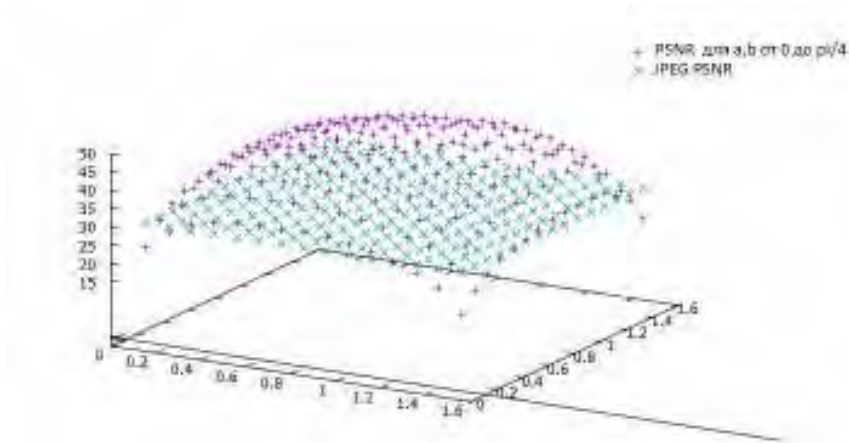


Рисунок 4 - Результат тестирования для синтетического изображения

Результаты экспериментов показывают, что оптимальные значения фазовых сдвигов лежат в области  $(0, \pi/4) \times (0, \pi/4)$ , то есть лучше, чем преобразование Хартли (точка  $\pi/4, \pi/4$ ) или дискретное косинус-преобразование (фазовые сдвиги равны нулю).

#### Выводы

На основании изложенных результатов следует, что использование дискретного тригонометрического преобразования позволяет получить метод сжатия изображений превышающий JPEG как по степени сжатия, так и по качеству восстановленных изображений.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. [http://www.cisco.com/en/US/solutions/collateral/ns341/ns525/ns537/ns705/ns827/white\\_paper\\_c11-481360\\_ns827\\_Networking\\_Solutions\\_White\\_Paper.html](http://www.cisco.com/en/US/solutions/collateral/ns341/ns525/ns537/ns705/ns827/white_paper_c11-481360_ns827_Networking_Solutions_White_Paper.html)
2. <http://sernam.ru/>
3. Лигун А.О. Комп'ютерна графіка (обробка та стиск зображень):навч.посіб./ А.О.Лигун, О.О.Шумейко.-Д.:Біла К.О., 2010.- 114 с.
4. R.V.L. Hartley, "A more symmetrical Fourier analysis applied to transmission problems," Proc. IRE 30, 144–150 (1942).
5. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли.М.:Мир, 1990.- 175 с.
6. Сергеев В.В., Усачев А.В. Преобразование Хартли в задачах цифровой обработки двумерных сигналов // Компьютерная оптика. - М.: МЦНТИ, 1992. - Вып.10-11. - С.168-177.
7. <http://www.computervisiononline.com/dataset/tid2008-tampere-image-database-2008>