

**УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВЕТВЯЩЕЙСЯ  
ТРАЕКТОРИИ НОСИТЕЛЯ ПРИ РАЗМЕЩЕНИИ  
ДЕСАНТИРУЕМОГО ГРУЗА В ЗОНЕ ЧРЕЗВЫЧАЙНОЙ  
СИТУАЦИИ**

*Аннотация. В работе предложена математическая постановка и решение задачи поиска условия оптимальности траектории движения носителя, а также оптимальных моментов времени и фазовых координат, в которые происходят отделение десантируемого груза*

*Ключевые слова: принцип минимума, оптимальное управление, математическая модель, оптимальные условия, сенсоры*

**Введение.** В настоящее время проблемы предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций (ЧС) природного и техногенного характера приобретают все более острый и актуальный характер.

Для этих целей в ряде случаев применяется пилотируемая авиация. Однако её использование не всегда эффективно из-за достаточно длительного времени реагирования, больших финансовых затрат, жёсткой зависимости от погодных условий и т.д.

Одним из направлений развития систем предназначенных для ликвидации последствий ЧС, а также для решения проблемы информационно-телекоммуникационного обеспечения поисково-спасательных работ есть применение технологии мобильной беспроводной мультисенсорной сети. (МБМСС), ситуационно разворачиваемой на оперативном ландшафте за минимальное время по так называемому ad-hoc запросу [3].

**Актуальность применения мобильной беспроводной мультисенсорной сети.** Наиболее перспективной для решения задач поиска и спасения разновидностью МБМСС можно считать беспроводную сенсорную сеть с мобильными сенсорами и аэроплатформами, которые выполняют функцию как носителя сенсоров, предназначенных для размещения в зоне бедствия, так и телекоммуникационного ретранслятора информации собранной от сенсоров (рис. 1).

МБМСС является многофункциональным информационным комплексом (МИК), который включает в себя:

- подсистему разведки, целеуказания и корректировки спасательных действий в зоне чрезвычайных ситуаций (ЧС), доставки грузов в заданные районы;
- подсистему ретрансляции, поиска пострадавших, потерпевших бедствие экипажей воздушных и морских судов, доставки грузов в заданные районы;
- подсистему радиотехнической радиолокационной, оптико-электронной воздушной разведки.

Предложенный МИК состоит из группы БПЛА, малогабаритных камер (сенсоров) и контейнеров для доставки этих камер в зону мониторинга. Группа БПЛА, используется, как летающая аэроплатформа на которой расположены, отстреливаемые контейнеры, внутри которых в свою очередь расположены несколько сенсоров для мониторинга местности в зоне ЧС (рис. 1.).

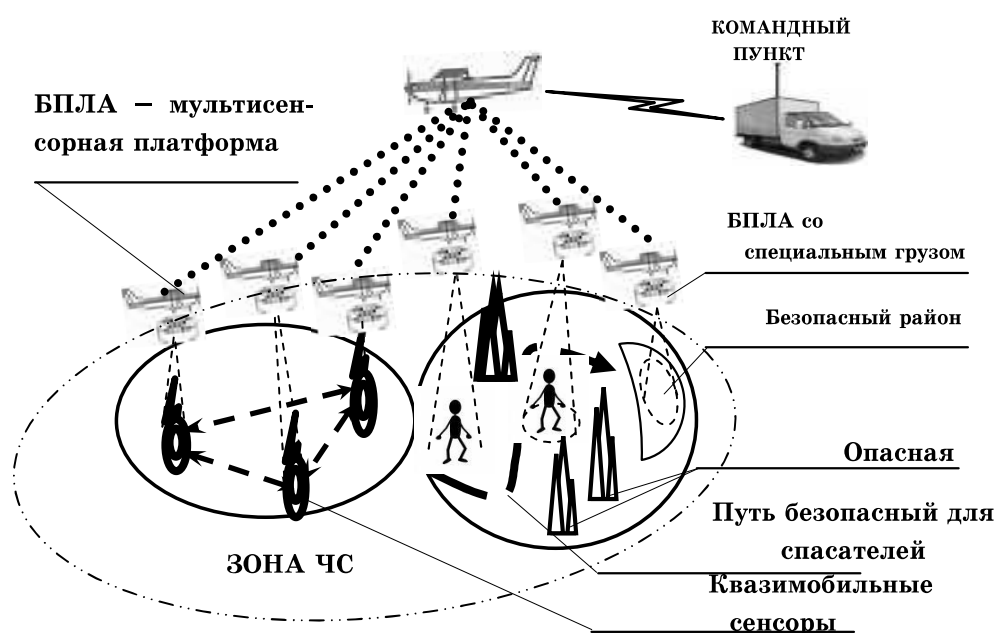


Рисунок 1 – Применение МИК на основе группового использования БПЛА для проведения поисково-спасательных работ в зоне чрезвычайной ситуации

Актуальность применения МИК, определяется в первую очередь тем, что они могут использоваться там, где жизнедеятельность человека либо затруднена, либо вообще невозможна, например, в зо-

нах радиоактивного или химического загрязнения, пожаров, наводнений, цунами, землетрясений.

Применение МИК на основе беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), позволит на малых (до 1 км) и средних (от 1 до 4 км) высотах при проведении спасательных работ в зоне чрезвычайной ситуации: осуществлять разведку и контроль местности и объектов; проводить видео-, фото- съемку; получать информацию об излучении радиоэлектронных средств; выполнять дозиметрический контроль; обеспечивать связь с мобильными абонентами для эффективного взаимодействия наземных поисково-спасательных служб; транспортировку и сброс по команде оператора малогабаритных грузов в заданную точку.

Исходя из выше сказанного, возможно сформулировать как минимум две содержательных задачи, требующих отыскания оптимальной траектории движения носителя с учетом того, что десантируемый груз тоже должен совершать оптимальное движение к своей цели:

1) задача размещения сенсоров (развертывания сенсорной сети) в заданном районе;

2) задача сброса груза спасателям и потерпевшим.

В первой задаче десантируемый груз (ДГ) – это мобильные или квазимобильные сенсоры, а во второй – это некоторая полезная нагрузка.

**Постановка задачи.** Движение носителя описывается дифференциальной системой вида [1-2]

$$\dot{x} = f(x, u, t), t \in [t_0, t_f], x \in E^n, u \in \Omega \subset E^m, \quad (1)$$

где  $x, u$  – векторы фазового состояния и управляющих воздействий, влияющих на движение носителя,  $t_0, t_f$  – моменты времени начала и конца движения носителя в заданном интервале.

Пусть на борту носителя находится  $k$  подгрупп ДГ (в общей сложности ДГ будет  $\sum_{i=1}^k r_i$ , т.е. в каждой подгруппе по  $r_i$  ДГ). От носителя в полете  $k$  раз произойдет отделение групп ДГ (рис. 2.). Носитель, начинает управляемое движение в пункте 0 и перемещается далее вдоль ветви 0-1 к пункту 1. Затем происходит отделение ДГ, которые, движутся от пункта 1 к пунктам 11 и 12.

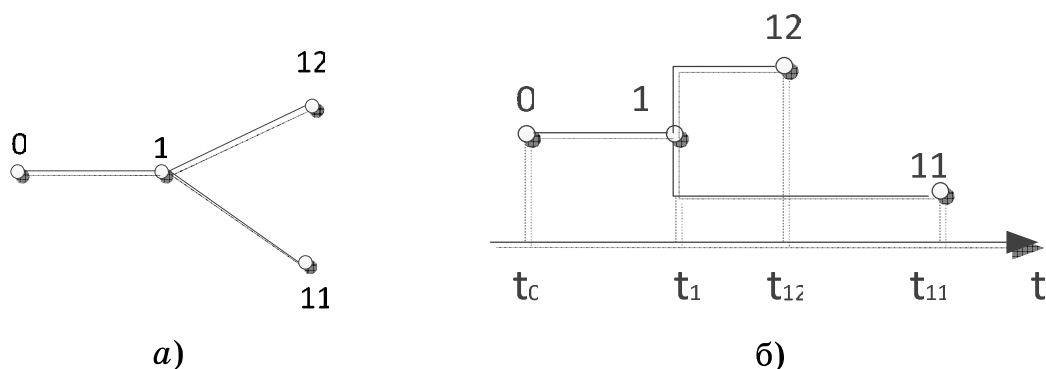


Рисунок 2 – Схема траектории движения носителя с отделяющимися группами ДГ

Движение носителя начинается с многообразия по схеме представленной на рис.2.

$$g_l^{(0)}(x_i(t_0), t_0) \begin{cases} = 0, l = \overline{1, k_g^{(0)}}; \\ \leq 0, l = \overline{k_g^{(0)} + 1, n_g^{(0)}}. \end{cases} \quad (2)$$

На многообразиях

$$g_l^{(i)}(x_i(t_i), t_i) \begin{cases} = 0, l = \overline{1, k_g^{(i)}}; \\ \leq 0, l = \overline{k_g^{(i)} + 1, n_g^{(i)}}, \end{cases} [t_{i-1} < t_i, i = \overline{1, k}] \quad (3)$$

происходит отделение по  $r_i (i = \overline{1, k})$  подгрупп ДГ, которые перемещаются к многообразиям

$$g_l^{(ij)}(x_{ij}(t_{ij}), t_{ij}) \begin{cases} = 0, l = \overline{1, k_g^{(ij)}}; \\ \leq 0, l = \overline{k_g^{(ij)} + 1, n_g^{(ij)}}; \end{cases} (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}), \quad (4)$$

на которых заканчивается их движение с целью доставки полезной нагрузки или получения информации с мультисенсоров.

Динамика движения подгрупп десантируемого груза описывается уравнениями вида [1-2]

$$\dot{x}_\beta = f_\beta(x_\beta, u_\beta, t), t \in [t_{\beta^*}, t_\beta], \quad (5)$$

где  $x_\beta \in E^n, u_\beta \in E^{m_\beta} \in \Omega_\beta (\beta = 1, 11, 12)$ ,

$(\beta = 1, \beta^* = 0; \beta = 11, 12, \beta^* = 1), t_0 < t_1 < t_{12} < t_{11}$ .

На которые накладываются ограничения

$$Q_l^{(1)}(x_1(t), u_1(t), t) \begin{cases} = 0, l = \overline{1, K_Q^{(1)}}; \\ \leq 0, l = \overline{K_Q^{(1)} + 1, N_Q^{(1)}}; \end{cases} \quad (6)$$

$$Q_l^{(11,12)}(x_{11,12}(t), u_{11,12}(t), t) \begin{cases} = 0, l = \overline{1, K_Q^{(11,12)}}; \\ \leq 0, l = \overline{K_Q^{(11,12)} + 1, N_Q^{(11,12)}}; \end{cases} \quad (7)$$

$$Q_l^{(11)}(x_{11}(t), u_{11}(t), t) \begin{cases} = 0, l = \overline{1, K_Q^{(11)}}; \\ \leq 0, l = \overline{K_Q^{(11)} + 1, N_Q^{(11)}}; \end{cases} \quad (8)$$

В моменты отделения подгрупп ДГ должны быть выполнены условия

$$x_i(t_i) - x_{ij}(t_i) = 0 \quad (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}), \quad x_i(t_i) - x_{i+1}(t_i) = 0 \quad (i = \overline{1, k-1}) \quad (9)$$

для всех фазовых координат, кроме координаты, описывающей изменение массы носителя, для которой (пусть это будет  $n$ -я координата) выполнено условие

$$x_{i_n}(t_i) = \xi(i)x_{i+1_n}(t_i) + \sum_{j=1}^{r_i} x_{ij_n}(t_i), \quad i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}, \quad \xi(i) = \begin{cases} 1, i = \overline{1, k-1}, \\ 0, i = k. \end{cases} \quad (10)$$

Управление  $u_\beta(t)$ , фазовые координаты  $x_1(t_0)$ ,  $x_\beta(t_\beta)$ , моменты времени  $t_0, t_\beta$  ( $\beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$ ) необходимо выбрать так, чтобы минимизировать критерий [2]

$$I = S(x_1(t_0), t_0; x_1(t_1), t_1; x_{11}(t_{12}), x_{12}(t_{12}), t_{12}; x_{11}(t_{11}), t_{11}) + I_1 + I_{11} + I_{12} \rightarrow \min \quad (11)$$

$$x_{11}(t_{11}), t_{11} \begin{cases} = 0, l = \overline{1, K_G}; \\ \leq 0, l = \overline{K_G + 1, N_G}; \end{cases}$$

$${}_{1}x_\tau(t_1) - {}_{11}x_\tau(t_1) = 0, \quad {}_{1}x_\tau(t_1) - {}_{12}x_\tau(t_1) = 0 \quad (\tau = \overline{1, n-1}),$$

$${}_{1}x_n(t_1) - {}_{11}x_n(t_1) - {}_{12}x_n(t_1) = 0.$$

Таким образом, задача (1)-(5) оптимизации траектории носителя состоит в поиске оптимальных управлений и траекторий движения носителя и отделяющихся подгрупп ДГ по участкам ветвящейся траектории, минимизирующих критерий (11), а также в отыскании оптимальных моментов времени и фазовых координат, в которых происходят отделение подгрупп ДГ.

Решение указанной задачи предполагается выполнить в три этапа:

1. Исходя из физических соображений функционирования МИК, вычерчиваться схема ветвящейся траектории, составляются уравнения движения носителя и подгрупп ДГ вдоль ветвей траекто-

рии, записываются ограничения, действующие непрерывно и в граничных точках, формулируется критерий.

2. Устанавливается хронологическая последовательность моментов времени отделения подгрупп ДГ.

3. На основании принципа минимума для составных динамических систем [2] вводятся расширенные векторы состояния и управления, состоящие соответственно из векторов состояния и управления подгрупп ДГ, перемещающихся по ветвям траектории в данном интервале времени и удовлетворяющие условиям оптимальности управления задачи (1-4), для построения оптимальной траектории движения носителя.

В результате применения указанной методики приходим к следующей постановке задачи оптимизации разрывной системы [1] с переменным размером векторов состояния и управления.

Составим расширенный критерий

$$\zeta = S^* + D + I_1^* + I_{11,12}^* + I_{12}^*, \quad (12)$$

где

$$S^* = \nu_0 S(\cdot) + \sum_{l=1}^{N_G} G_l(\cdot), \quad (13)$$

$$D = \sum_{i=1}^2 \sum_{\tau=1}^{n-1} \alpha^{(i)} [{}_1 x_\tau(t_1) - {}_{11} x_\tau(t_1)] + \alpha_n [{}_1 x_n(t_1) - {}_{11} x_n(t_1) - {}_{12} x_n(t_1)], \quad (14)$$

$$I_1^* = \int_{t_1}^{t_{12}} [H_{11,12}^*(x_{11,12}(t), u_{11,12}(t), \lambda_{11,12}(t), \mu_{11,12}(t)t) - \lambda_{11,12}^T(t) \dot{x}_{11,12}(t)] dt, \quad (15)$$

$$I_{11,12}^* = \int_{t_1}^{t_{12}} [H_{11,12}^*(x_{11,12}(t), u_{11,12}(t), \lambda_{11,12}(t), \mu_{11,12}(t)t) - \lambda_{11,12}^T(t) \dot{x}_{11,12}(t)] dt, \quad (16)$$

$$I_{11}^* = \int_{t_{12}}^{t_{11}} [H_{11}^*(x_{11}(t), u_{11}(t), \lambda_{11}(t), \mu_{11}(t)t) - \lambda_{11}^T(t) \dot{x}_{11}(t)] dt, \quad (17)$$

$$H_1^*(\cdot) = H_1(x_1(t), u_1(t), \lambda_1(t), t) + \mu^{(1)}(t)^T Q^{(1)}(x(t), u_1(t), t), \quad (18)$$

$$H_{11,12}^*(\cdot) = \sum_{i=1}^2 H_{1i}(x_{1i}(t), u_{1i}(t), \lambda_{1i}(t), t) + \mu^{(11,12)}(t)^T Q^{(11,12)}(x_{11,12}(t), u_{11,12}(t), t), \quad (19)$$

$$H_{11}^*(\cdot) = H_{11}(x_{11}(t), u_{11}(t), \lambda_{11}(t), t) + \mu^{(11)}(t)^T Q^{(11)}(x_{11}(t), u_{11}(t), t), \quad (20)$$

$$H_\beta^*(\cdot) = \nu_0 \Phi_\beta(x_\beta(t), u_\beta(t) + \lambda_\beta^T(t) f(x_\beta(t), u_\beta(t), t) \quad (\beta = 1, 11, 12), \quad (21)$$

$$\mu^{(\beta)}(t) = \text{col}[\mu_1^{(\beta)}(t), \dots, \mu^{(\beta)}(t)],$$

$$Q^{(\beta)}(\cdot) = \text{col}[Q_1^{(\beta)}(\cdot), \dots, Q^{(\beta)}(\cdot)] \quad (\beta = 1; 11, 12; 11),$$

$$\lambda_{11,12}(t) = \text{col}[\lambda_{11}(t), \lambda_{12}(t)].$$

Используя введенные в выражениях (12)-(21) обозначения, сформулируем следующие условия оптимальности управления и траекторий движения носителя и отделяющихся подгрупп ДГ по участкам ветвящейся траектории.

Пусть  $(x_1(t), x_{11}(t), x_{12}(t), u_1(t), u_{11}(t), u_{12}(t), t_0, t_1, t_{12}, t_{11})$  — допустимые состояния и управления, состоящие соответственно из векторов состояния и управления носителя и подгрупп ДГ, перемещающихся по ветвям траектории в данном интервале времени и удовлетворяющие условиям оптимальности управления задачи (6)-(9), (11).

Тогда для их оптимальности необходимо существование таких векторных множителей  $\nu = \text{col}(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{N_G})$ ,  $\mu^{(1)}(t), t \in [t_0, t_1], \mu^{(11,12)}(t), t \in [t_1, t_{12}], \mu^{(11)}(t), t \in [t_{12}, t_{11}]$  не равных одновременно нулю и непрерывных решений  $\lambda_1(t), t \in [t_0, t_1], \lambda_{11}(t), \lambda_{12}(t), t \in [t_1, t_{12}], \lambda_{11}(t), t \in [t_{12}, t_{11}]$  сопряженных векторных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 + \frac{\partial H_1^*}{\partial x_1} \Big|_{\wedge} &= 0, t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1], \\ \dot{\lambda}_{11} + \frac{\partial H_{11,12}^*}{\partial x_{11}} \Big|_{\wedge} &= 0, \quad \dot{\lambda}_{12} + \frac{\partial H_{11,12}^*}{\partial x_{12}} \Big|_{\wedge} = 0, t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_{12}], \\ \dot{\lambda}_{11} + \frac{\partial H_{11}^*}{\partial x_{11}} \Big|_{\wedge} &= 0, \quad t \in [\hat{t}_{12}, \hat{t}_{11}], \end{aligned}$$

которые удовлетворяют следующим условиям [2]:

(1<sup>0</sup>) неотрицательности и дополняющей нежесткости  $\nu_0 > 0$ ,

$$\nu_l = \begin{cases} \geq 0, G_l(x_1(t_0), t_0; \dots; x_{11}(t_{11}), t_{11}) \Big|_{\wedge} = 0, l = \overline{1, K_G}; \\ \geq 0, G_l(x_1(t_0), t_0; \dots; x_{11}(t_{11}), t_{11}) \Big|_{\wedge} = 0, l = \overline{K_G + 1, N_G}; \\ = 0, G_l(x_1(t_0), t_0; \dots; x_{11}(t_{11}), t_{11}) \Big|_{\wedge} < 0, l = \overline{K_G + 1, N_G}, \end{cases}$$

$$\mu_l^{(\beta)}(t) = \begin{cases} \geq 0, Q_l^{(\beta)}(x_\beta(t), u_\beta(t), t) \Big|_{\wedge} = 0, l = \overline{1, K_G}; \\ \geq 0, Q_l^{(\beta)}(x_\beta(t_0), t_0; \dots; x_{11}(t_{11}), t_{11}) \Big|_{\wedge} = 0, l = \overline{K_G + 1, N_G}; \\ = 0, Q_l^{(\beta)}(X_1(t), U_i(t), t) < 0, j = \overline{K_{Qi} + 1, N_{Qi}}, \end{cases}$$

$$\mu_l^{(\beta)}(t) \begin{cases} \geq 0, & Q_l^{(\beta)}(x_\beta(t), (u_\beta(t), t)|_\wedge = 0, l = 1, \overline{K_G^{(\beta)}}); \\ \geq 0, & Q_l^{(\beta)}(x_\beta(t), (u_\beta(t), t)|_\wedge = 0, l = \overline{K_G^{(\beta)}} + 1, \overline{N_G^{(\beta)}}); \\ = 0, & Q_l^{(\beta)}(x_\beta(t), (u_\beta(t), t)|_\wedge < 0, l = \overline{K_G^{(\beta)}} + 1, \overline{N_G^{(\beta)}}), \end{cases}$$

$$(\beta = 1; 11, 12; 11),$$

(2<sup>0</sup>) трансверсальности для сопряженных функций и гамильтонианов

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^*}{\partial x_1(t_0)} \Big|_\wedge - (-1)_1^\gamma \lambda(\hat{t}_0^l) = 0, \quad \frac{\partial S^*}{\partial t_0} \Big|_\wedge + (-1) H_1^* \Big|_\wedge = 0, \\ \frac{\partial S^*}{\partial x_{1i}(t_{1i})} \Big|_\wedge + (-1)_1 \lambda_i(\hat{t}_{1i}) = 0, \quad (i = 1, 2), \quad \frac{\partial S^*}{\partial t_{11}} \Big|_\wedge - (-1) H_{11}^* \Big|_\wedge = 0; \end{aligned}$$

(3<sup>0</sup>) скачка для сопряженных функций и гамильтонианов

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^*}{\partial x_1(t_1)} \Big|_\wedge + (-1)[\lambda_1(\hat{t}_1) - \lambda_{11}(\hat{t}_1) - \lambda_{12}(\hat{t}_1)] = 0, \\ \frac{\partial S^*}{\partial t_1} \Big|_\wedge - (-1)(H_1^* \Big|_\wedge - H_{11,12}^* \Big|_\wedge) = 0; \\ \frac{\partial S^*}{\partial x_{11}(t_{12})} \Big|_\wedge + (-1)[\lambda_{11}(\hat{t}_{12}) + (-1)\varepsilon] - \lambda_{11}(\hat{t}_{12} - (-1)^\lambda \varepsilon) = 0, \\ \frac{\partial S^*}{\partial t_{12}} \Big|_\wedge - (-1)(H_{11,12}^* \Big|_\wedge - H_{11}^* \Big|_\wedge) = 0; \end{aligned}$$

(4<sup>0</sup>) минимума расширенных гамильтонианов

$$H_\beta^{(*)}(\hat{x}_\beta(t), \hat{u}_\beta(t), \lambda_\beta(t), t) = \min_{\substack{u_\beta(t) \in \Omega_\beta, \\ t \in [t', t'']}} H_\beta^{(*)}(\hat{x}_\beta(t), \hat{u}_\beta(t), \lambda_\beta(t), t)$$

$$(\beta = 1, t' = t_0, t'' = t; \beta = 11, 12, t' = t_1, t'' = t_1; \quad \beta = 11, t' = t_{12}, t'' = t_{11})$$

**Выводы.** Таким образом, в данной статье предложена математическая постановка и решение задачи поиска условия оптимальности траектории движения носителя, а также оптимальных моментов времени и фазовых координат, в которые происходят отделение десантируемого груза. Изложены необходимые условия траектории движения носителя с учетом того, что десантируемый груз тоже должен совершать оптимальное движение к своей цели.

Предложенный подход к построению оптимальной траектории обладает той особенностью, что только приведение задачи оптимизации ветвящейся траектории носителя к оптимизации траектории раз-



рывной системы с переменным размером вектора состояния и управления позволяет выполнять оптимизацию траектории носителя с произвольной схемой ветвлений. В противном случае каждая новая схема ветвлений траектории носителя требует выполнения всей процедуры доказательств, учитывающих особенности траектории.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами / Л.Т. Ащепков. – Новосибирск: Наука, 1987. – 226 с.
2. Лисенко О. І. Постановка задачі застосування теорії розгалужених траєкторій для вирішення задач пошуку та рятування в зоні надзвичайних ситуацій / О. І. Лисенко, О.М. Тачиніна, С. М. Чумаченко // Технічна механіка: Міжвідомчий збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2015. – Випуск 1. – С.73-78.
3. Лисенко О. І. Функціональна модель системи управління безпроводовою сенсорною мережею із самоорганізацією для моніторингу параметрів навколишнього середовища / О. І. Лисенко, К.С. Козелкова, В.І. Новіков [та ін.] // Системи обробки інформації : збірник наукових праць. – Х.: Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, 2015. – Випуск 10 (135). – С. 222-226.