

## ПАРАЛЕЛЬНІ СИНХРОННІ АЛГОРИТМИ АНАЛІЗУ ТА ПЛАНУВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ПОТОКІВ У ТРАНСПОРТНИХ МЕРЕЖАХ

*Анотація.* У статті досліджено питання розвитку алгоритмів аналізу та планування неоднорідних потоків у транспортних мережах. Запропоновано новий паралельний синхронізований алгоритм для розрахунку максимальних одно- та багатопродуктових потоків. Приведено приклади застосування алгоритму.

*Ключові слова:* транспортні мережі, максимальний потік, паралельні алгоритми, неоднорідні потоки, компромісні моделі планування потоків.

**Вступ.** Завдання аналізу, планування та керування потоками являються надзвичайно широко поширеними у різних сучасних сферах діяльності. Розвиток мережевих технологій також потребує удосконалення методів управління потоками. У більшості транспортні та інші потоки неоднорідні, вони містять складові з різними властивостями за функціональним призначенням, вимогами до процесу транспортування щодо часу, сервісів ін. При плануванні і раціональній організації транспортних потоків, перевезень тощо враховують і формують однорідні або багатопродуктові в певному сенсі процеси, виходячи із потреб до головних характеристик і вимог [1 - 4]. Розроблені різноманітні математичні моделі транспортних та інших потоків у мережах, в тому числі як задач оптимального або раціонального планування [1, 3, 4, 7]. Безперервний розвиток методів і засобів аналізу властивостей елементів потоків, а також створення сучасних інформаційно-комунікаційних технологій і систем, дають можливість для все більш повного врахування вимог і ознак окремих категорій об'єктів транспортних потоків, а також їх взаємодії. Одним з глобальних рішень проблем організації та управління транспортними потоками є створення інтелектуальних транспортних систем (ІТС) [3]. Урахування та облік специфічних категорій вимог або властивостей об'єктів транспортних потоків істотно впливає на зміст і складність відповідних моделей і методів їх аналізу і планування [5, 8]. В [3] та

інших дослідженнях зокрема розглянуто один з підходів до моделювання та дослідження транспортних потоків, заснований на теорії конкурентної безкоаліційної рівноваги. У дослідженнях [2, 3] представлено широке коло алгоритмів аналізу та планування потоків у транспортних та інших мережах, серед них зазначені також алгоритми розрахунку максимальних потоків. Указані дослідження все ж у більшості розглядають однорідні потоки. Разом з тим питання удосконалення та розвитку методів аналізу та планування неоднорідних потоків в мережах стають все більше актуальними.

Завдання із визначення максимальних потоків являється одним із головних при формуванні та аналізі транспортних мереж, його результати широко застосовуються на практиці [1, 5, 6]. У зв'язку із сучасним всебічним розвитком мережевих технологій, створенням та функціонуванням ІТС [4], формуванням при цьому нових завдань оптимального планування неоднорідних транспортних потоків (багатопродуктові, багатокритеріальні, з урахуванням індивідуальних потреб елементів-носіїв потоків ін.) [4, 7, 8], що все повніше ураховують вимоги окремих учасників таких потоків, вирішення яких базується на кількісних та якісних оцінках властивостей мереж. Реалізація багатопродуктових, а також багатокритеріальних моделей планування потоків у мережах [1, 7] використовує розрахунки максимальних потоків, параметрів мінімального розрізу, а також розподіляючих множин ребер транспортних мереж [2].

**Метою цієї роботи** є розробка та дослідження можливостей нового паралельного синхронного алгоритму розрахунку максимальних неоднорідних потоків у транспортних мережах. При цьому створюваний алгоритм має бути придатним для розрахунку однопродуктових, багатопродуктових, а також компромісних потоків, в яких застосовуються методи раціонального вибору при формуванні неоднорідних потоків, які протікають по дугах мережі.

**Матеріали та методики дослідження.** Базовими для визначення максимальних потоків (МП) у транспортних мережах являються відповідна теорема та метод Форда-Фалкерсона, що призначені для аналізу однопродуктових цілочисельних потоків [1, 2]. На теперішній період існує більше двадцяти алгоритмів для розрахунку максимальних потоків у мережах, серед яких одними із перших та найбільш поширеними є алгоритми Форда-Фалкерсона, Едмондса-Карпа [6], Дініца [5]. Про-

ведений аналіз особливостей, переваг і недоліків алгоритмів, відомі оцінки складності таких алгоритмів, наведені у роботах [2, 5, 6] та ін. Розроблена значна кількість програмних реалізацій цих алгоритмів, у тому числі їх паралельних версій. Необхідно зазначити, що завдання розрахунку максимального потоку є досить ресурсовитратним, при цьому існують структури мереж, для яких алгоритми мають слабку збіжність [2, 3]. При аналізі багатопродуктових (неоднорідних) потоків у транспортних та інших мережах складності побудови та реалізації алгоритмів оцінки параметрів максимальних потоків суттєво зростають [1, 2].

Формально транспортна мережа це орієнтований граф  $G=(V,E)$ , в якому кожне ребро  $(u,v) \in E$  має позитивну пропускну здатність  $c(u,v)>0$  і потік  $f(u,v)$  [2]. Виділяють дві вершини: виток  $s$  та стік  $t$  такі, що люба інша вершина мережі лежить на шляху із вершини  $s$  до вершини  $t$ . Позначимо через

$$G=\{(V,E),c,s,t\} \quad (1)$$

транспортну мережу (далі також мережу), в якій  $c(u,v)$  – пропускну здатність, а  $f(u,v)$  – потік через ребро  $(u,v)$ ,  $V$  – множина вузлів,  $E$  – множина ребер.

Для порівняльного аналізу алгоритмів визначення МП коротко наведемо схему алгоритма Едмондса-Карпа (А-ЕК). Визначимо поняття залишкової мережі (ЗМ), що формується за ітераціями, як мережі, пропускні здатності ребер якої модифікуються на основі величин визначених та збільшуваних потоків. А-ЕК складають такі етапи.

1. Вважають що всі потоки дорівнюють нулю. При цьому ЗМ співпадає із заданою транспортною мережею.

2. В ЗМ на підставі дерева маршрутів знаходять найкоротший шлях (НКШ) з виток до стоку. Якщо такого шляху не існує – МП знайдено, зупинитися.

3. Пускають через НКШ (збільшувачий шлях) максимально можливий потік:

3.1. На НКШ у мережі ЗМ знаходять ребро з мінімальною пропускну здатністю  $C_{\min}$

3.2. Для кожного ребра на НКШ збільшують потік на  $C_{\min}$ , а на протилежному йому ребрі зменшують на  $C_{\min}$ .

3.3. Модифікують ЗМ: для всіх ребер НКШ, а також для них протилежних, розраховують нову пропускну здатність, змінюючи на  $C_{\min}$ .

Якщо така пропускна здатність дорівнює нулю, ребро вилючається із графу мережі, якщо ж здатність стала позитивною – додають ребро до ЗМ.

4. Перехід до п2.

Складність алгоритму Едмондса-Карпа дорівнює  $O(VE^2)$  [2, 6].

Для оцінки властивостей алгоритму А-ЕК, виходячи з наших потреб відзначимо наступне. Задача розрахунку максимальних потоків у мережах (1), а також багато інших поточкових задач [1 - 3], представляються за допомогою певних математичних моделей (в більшості лінійного програмування), система обмежень яких містить рівняння неперервності потоків у вузлах, а також інші змістовні обмеження, що відповідають вимогам постановок задач. З наведеної схеми А-ЕК зрозуміло, що обмеження неперервності потоків у вузлах (1) виконуються автоматично за рахунок процедури пропуску однакового потоку по усіх ребрах НКШ п3. Наступне, у дереві кожний вузол зустрічається у відповідності до числа можливих шляхів, які проходять через нього, рис. 1, а кожну появу вузла у дереві можна вважати викликом відповідної процедури. Зміст вузлових процедур полягає у підрахунку довжини маршрутів, а також у організації (паралельного) звернення до всіх процедур, що відповідають вихідним вузлам, нащадкам поточного вузла мережі ЗМ для (1). Зрозуміло, що всі вузли з однаковими номерами мають однакові піддерева. При викликах процедур вузла-стоку визначається довжина певного маршруту, рис. 1. Тотожність піддерев для одноіменних вузлів графу шляхів дозволяє організувати синхронну, узгоджену щодо етапу алгоритму, обробку окремих потоків, які проходять через вузли мережі.

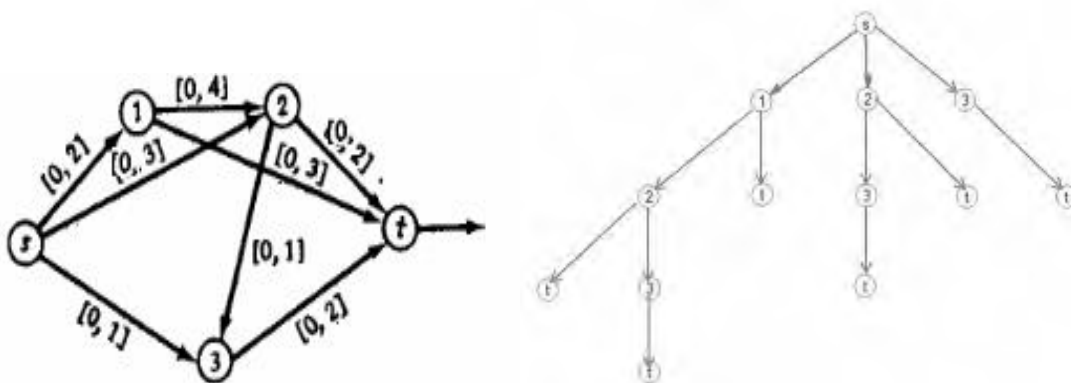


Рисунок 1 - Схема транспортної мережі для визначення максимального потоку та дерево можливих маршрутів (формування пошуком у ширину)

При розрахунку МП на основі математичних моделей, як правило, число змінних у оптимізаційних задачах дорівнює кількості

ребер у мережі (1), а для урахування рівнянь неперервності потоків застосовуються спеціальні методи [1, 2, 4]. У алгоритмах розрахунку максимального багатоподуктового потоку (МБП) припускається, що у потоків різних продуктів можуть бути неоднакові витoki і стоки [1], а також ураховують додаткові обмеження на величини загального потоку всіх продуктів по ребрах мережі. При цьому також у рішеннях МБП структури потоків окремих продуктів можуть залежати від нумерації та послідовності урахування потоків продуктів, але із постійними значеннями загального потоку. При певних умовах такі рішення щодо МБП не можуть бути застосовані на практиці, наприклад, за умов конкуренції окремих потоків продуктів, моделі яких наведено у [4, 7, 8] тощо.

**Результати досліджень та їх огляд.** Розроблений і представлений у статті паралельний синхронний алгоритм аналізу параметрів максимальних потоків у мережах (ПСАП), подібно до алгоритму Едмондса-Карпа (А-ЕК) [2, 6], використовує стратегію пошуку у ширину при одночасному визначенні можливих шляхів потоків через мережу з відомими на певному кроці ЗМ пропускними спроможностями дуг (ребер). В А-ЕК, як реалізації методу Форда-Фалкерсона, на кожній ітерації у побудованому дереві можливих шляхів обирається найкоротший за числом ребер шлях, по якому пропускається додатковий збільшувачий потік. На рис. 1 представлено дерево можливих шляхів через мережу, сформоване методом пошуку у ширину, яке містить три шляхи довжини три. За А-ЕК на ітерації обирається один із них для подальшого аналізу. Це викликано тим, що при первинному формуванні дерева визначаються лише довжини шляхів.

На відмінність від А-ЕД та подібних інших алгоритмів у пропонуваному ПАСП за рахунок синхронізації процесів формування вузлів дерева в цих вузлових процедурах також одночасно виконується аналіз можливих значень додаткових, збільшувачих, потоків, що можуть розповсюджуватися (за рахунок паралельного виклику відповідних вузлових процедур) по наступних визначених ребрах мережі ЗМ. При цьому виникає можливість паралельно (на одній ітерації) виконувати аналіз декількох збільшувачих потоків через мережу ЗМ. Наприклад, на рис. 1 – одночасно трьох. Інша суттєва перевага алгоритму ПАСП полягає у придатності оцінювати максимальні багатоподуктові потоки, при незначних «технічних»

змінах структури алгоритму, необхідних для забезпечення типового оброблення декількох складових багатоподуктового потоку через мережу ЗМ (1).

У роботі прийнято, що вузлові процедури можуть виконуватися, якщо до них за схемою мережі (1) надійшли всі вхідні потоки. Для керування процесами синхронізації вузлових процедур вводиться кроковий параметр послідовності виконання процедур і надходження потоків ( $t$ ). Значення параметру указує «довжину» шляху від витоків до відповідного вузла у мережі ЗМ. Якщо на кроці ( $t$ ) до вузла-процедури надійшов вхідний потік, процедура переходить у стан активності, а при надходженні всіх вхідних параметрів – стає готовою і паралельно виконує виклик всіх вихідних вузлів-процедур, передаючи їм розраховані нею параметри можливих потоків за цими шляхами. При цьому сама переходить до стану «виконано», а число активних вузлів  $N_a(t)$  зменшується на одиницю. Система синхронізації контролює число активних процедур на кроках ( $t$ ). За параметром  $N_a(t) > 0$  також виконується контроль можливого блокування процесів формування маршрутів через ЗМ, а саме – коли немає жодного вузла, до якого на кроках ( $t$ ) надійшли усі вхідні потоки. У такому випадку передбачено передачу синхронізуючого «нульового» потоку. Вибір вузла-процедури для розблокування обирається за такими ознаками: мінімальна кількість відсутніх вхідних потоків, при рівності – мінімальність номеру кроку активізації процедури ( $t$ ), при рівності цих параметрів – менша кількість вихідних вузлів. Виникнення відзначених процесів блокування може бути можливе при аналізі багатопродуктових потоків. У подальших процедурах синхронізуючий потік ураховується у алгоритмі як і всі інші.

**Базовий паралельний синхронний алгоритм розрахунку максимального потоку.** Приведемо якісне, змістовне, описання ПСАП, достатнє для однозначного відображення його сутності та створення програмної реалізації. Головним елементом побудови алгоритму (як і в А-ЕК) являється вузлова процедура  $Pr_k(t)$ , де  $k$  – номер вузла із множини  $E$  (1),  $t$  – крок виконання ПСАП. Процедури  $Pr_k(t)$  мають множини вхідних  $Ein_k(t)$  та вихідних  $Eout_k(t)$  ребер, пропускні здатності яких для ЗМ відомі (1). Всі  $Pr_k(t)$  працюють у двох режи-

мах: прямий, спуск ( $up(0)$ ), – формування можливих маршрутів потоків через ЗМ (паралельний пошук у ширину); зворотний, підйом ( $up(1)$ ), – паралельне формування збільшуючих потоків через мережу ЗМ. Функції процедур  $Pr_k(t)$  крім вузлів витоку  $Pr_s(t)$  та стоку  $Pr_t(t)$  визначаються наступним:

- очікування надходження всіх потоків від  $Ein_k(t)$  (режим  $up(0)$ ) або від  $Eout_k(t)$  (режим  $up(1)$ ), фіксація величин та послідовності  $(t)$  надходження потоків  $\{V_{ik}(t) : i \in Ein_k(t)\}; \{V_{kj} : j \in Eout_k(t)\}$ , розрахунок діючих вхідних потоків  $\{\hat{V}_{ik}(t) = \min(c_t(i, k), V_{ik}(t))\}$ , де  $c_t(i, k)$  - пропускна здатність на етапі  $(t)$ ;

- при  $up(0)$  і надходженні всіх потоків від  $Ein_k(t)$  процедура  $Pr_k(t)$  виконує паралельний виклик всіх процедур, які відповідають вузлам  $Eout_k(t)$ , пересилаючи до всіх із них  $V_{kj}(t) = \max(\hat{V}_{ik}(t), i \in Ein_k(t))$ , номер вузла що відповідає  $\max(\hat{V}_{ik}(t))$  запам'ятовується  $-i_k \max(t)$ ;

- при підйомі,  $up(1)$ , та надходженні всіх потоків від  $Eout_k(t)$  процедура  $Pr_k(t)$  виконує розрахунок та пересилку величини  $V_{ik}(t) = \min(V_{kj}(t) > 0, j \in Eout_k(t))$  до вхідного вузла  $i_k \max(t)$ , також запам'ятовується номер вузла  $i_k \min(t)$  із збільшуючим потоком  $V_{ik}(t)$ , а до всіх інших  $i \in Ein_k(t)$  передається  $V_{ik}(t) = 0$ .

Функція вузла витоку  $Pr_s(t)$  полягає у наступному:

- при умові  $up(1)$  вузлам  $Eout_s(t)$  паралельно пересилається  $V_{sj}(t) = c_t(s, j)$  що дорівнює поточним пропускним здатностям ребер;

- при умові  $up(1)$  позитивні надходження всіх потоків від вузлів  $Eout_s(t)$  представляють величини збільшуючих потоків, і використовуються для коригування максимального потоку МП і мережі ЗМ, як і в алгоритмі А-ЕК. Якщо відсутні позитивні потоки від  $Eout_s(t)$ , тоді максимальний потік розраховано.

Функція вузла стоку  $Pr_t(t)$  полягає у наступному:

- при  $up(0)$  і надходженні всіх потоків від  $Ein_k(t)$  процедура  $Pr_t(t)$  відбувається зміна режиму аналізу мережі  $-up(1)$ ;

- виконує паралельний виклик всіх процедур, які відповідають вхідним вузлам  $Ein_k(t)$ , пересилаючи до них ті ж величини відповідних діючих вхідних потоків  $\{\hat{V}_{it}(t) = \min(c_t(i, t), V_{it}(t))\}$ , де  $c_t(i, t)$  - пропускна здатність на етапі  $(t)$ .

Наведемо окремі функції процедур  $Pr_t(t)$  детальніше, урахувавши можливості неоднозначності даних розрахунків. А саме, умови щодо рівності величин декількох максимальних вхідних або мінімальних збільшуючих потоків за маршрутами. Якщо величину  $V_{kj}(t) = \max(\hat{V}_{ik}(t), i \in Ein_k(t))$  мають кілька вхідних вузлів, у якості  $i_k \max(t)$  виступає вхідний вузол з меншим  $(t)$  (відповідає найкоротшому шляху до вузла за числом кроків), при рівності параметрів  $(t)$  береться вузол із меншим числом вихідних ребер. При рівності кількох мінімальних збільшуючих потоків, режим  $up(1)$ , у якості  $i_k \min(t)$  також вибирається вузол із меншим  $(t)$ , при рівності  $(t)$  – вузол із меншим числом вихідних ребер.

З урахуванням встановлених процедур  $Pr_k(t)$  схематично базовий ПСАП складається із наступного:

1. Вважати всі потоки транспортної мережі (1) рівними нулю. Мережа ЗМ співпадає із заданою.

2. Встановити режим спуску  $up(0)$ , лічильник етапів  $(t = 0)$ . Виконати процедуру витоку  $Pr_s$ .

3. На основі паралельної реалізації методу пошуку у ширину сформувати вузли дерева маршрутів для мережі ЗМ, використовуючи  $Pr_k(t)$ .

4. Якщо відсутні позитивні збільшуючі потоки від  $Eout_s(t)$ , тоді максимальний потік розраховано. Інакше, паралельно коригуються потоки та ЗМ:

4.1. На кожному із маршрутів для позитивних потоків від  $Eout_s(t)$  збільшують потоки на ребрах на визначену із  $Eout_s(t)$  величину.

4.2. Модифікувати мережу ЗМ: для всіх ребер збільшуючих потоків розрахувати нову пропускну здатність, змінюючи на величини із  $Eout_s(t)$ . Якщо нова пропускна здатність дорівнює нулю, ребро вилучається із графу мережі ЗМ.

5. Перехід до п2.

**Приклади розрахунків максимальних потоків.** Наведемо приклади застосування алгоритму ПСАП для аналізу одно- та багатопро-



дуктових, а також компромісних потоків у транспортних мережах. На рис.1 представлена схема транспортної мережі, для якої необхідно визначити максимальний потік одного продукту з [2]. Також на рисунку показане первинне дерево маршрутів, побудоване пошуком у ширину, за алгоритмом А-ЕК. На рис. 2 указані схеми збільшуючих потік маршрутів на 2 та 3 ітераціях алгоритму ПСАП. У табл. 1 відображене представлення покрокового по  $(t)$  виконання паралельного алгоритму, ураховуючи режими  $up(0/1)$  прямого та зворотного процесів. Кроки відповідають параметру  $(t)$ , у стовпцях указані номери вузлів, останній стовпець містить величини потоків за маршрутами (М-Потік) та результуючі розрахункові (Р-Потік). Покроково указані вузли, які отримали вхідні значення (величина/номер вузла), а також умова готовності (N/Y) до синхронної передачі потоку (виклику процедур-нащадків). Таблиця показує, що на першій ітерації отримано три збільшуючих потоки, представлені пунктирними лініями.

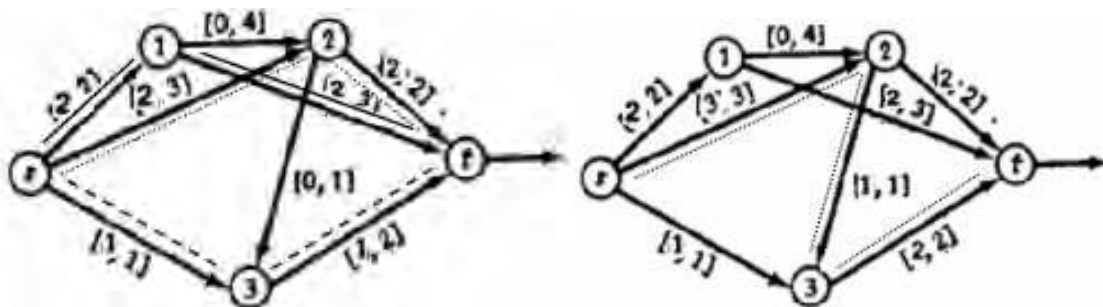


Рисунок 2 - Схеми збільшуючих потік шляхів на послідовних ітераціях алгоритму

Максимальний потік дорівнює 6, отриманий за дві ітерації, рис. 2.

Наступний приклад аналізу однопродуктового потоку, рис. 3 – рис.4, демонструє що алгоритм ПСАП не завжди дозволяє отримати кілька збільшуючих потоків на одній ітерації, що представлено у табл. 2. Хоча на першій ітерації сформовано два можливих потоки через вузли (q) та (r), через конкуренцію цих потоків (крок 4, виклик вузла «r» із «q») виявилось можливим отримати лише один збільшуючий потік. Відповідно ПСАП у зворотному проході у вузлі q вибирається вихідна дуга з мінімальним потоком, у даному випадку це дуга «q». По одному збільшуючому потоку також було визначено на на-

ступних ітераціях, табл. 2. Максимальний потік для мережі рис. 3, рис. 4 дорівнює 5, отриманий за три ітерації.

Таблиця 1

Покрокове представлення виконання паралельного синхронного алгоритму розрахунку максимального однопродуктового потоку у мережі

Ур(0) Формування маршрутів (перша ітерація)						
Крок	s	1	2	3	t	М-Потік
1		2(s) Y	3(s) N	1(s) N		
2			2(1) Y	1(s) N		
3				1(2) Y		
4					2(1)	2
5					2(2)	2
6					1(3)	1
Ур(1) Визначення величин множини збільшуючих потоків						
Крок	s	1	2	3	t	Р-Потік
1		2(t) N	2(t) N	1(t) Y		
2	1(3)	2(t) N	0(3) Y			1
3	2(2)	0(2) Y				2
4	2(1)					2
Ур(0) Формування маршрутів (друга ітерація)						
Крок	s	1	2	3	t	М-Потік
1			1(s) Y			
2				1(2) Y		
3					1(3)	1
Ур(1) Визначення величин множини збільшуючих потоків						
Крок	s	1	2	3	t	Р-Потік
1				1(t) Y		
2	1(2)		1(3) Y			1

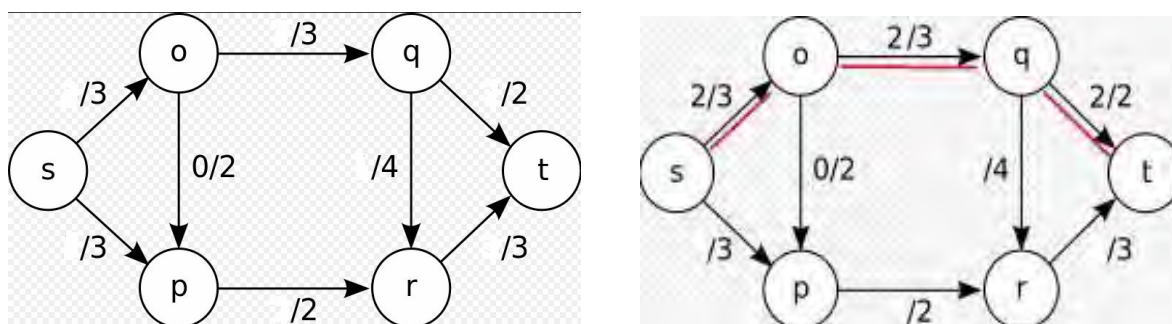


Рисунок 3 - Схема транспортної мережі для визначення однопродуктового максимального потоку та збільшуючий потік першої ітерації

Представлення виконання паралельного синхронного алгоритму розрахунку максимального однопродуктового потоку у мережі рис. 3

Up(0) Формування маршрутів (перша ітерація)							
Крок	s	o	p	q	r	t	М-Потік
1		3(s) Y	3(s) N				
2			2(o) Y	3(o) Y			
3					2(p) N		
4					3(q) Y		
5						2(q)	2
6						3(r)	3
Up(1) Визначення величин множини збільшуючих потоків							
Крок	s	o	p	q	r	t	Р-Потік
1					3(t) Y		
2			0(r) Y				
3				3(r) N			
4				2(t) Y			
5		2(q) N					
6		0(p) Y					
7	2(o)						2
8	0(p)						
Up(0) Формування маршрутів (друга ітерація)							
Крок	s	o	p	q	r	t	М-Потік
1		1(s) Y	3(s) N				
2			1(o) Y	1(o) Y			
3					2(p) N		
4					1(q) Y		
5						2(r)	
Up(1) Визначення величин множини збільшуючих потоків							
Крок	s	o	p	q	r	t	Р-Потік
1					2(t) Y		
2			2(r) Y	0(r) Y			
3		0(q) N					
4		0(p) Y					
5	0(o)						
6	2(p)						2
Up(0) Формування маршрутів (третья ітерація)							
Крок	s	o	p	q	r	t	М-Потік
1		1(s) Y	1(s) N				
2			1(o) Y	1(o) Y			
3					1(q) Y		
4						1(r)	
Up(1) Визначення величин множини збільшуючих потоків							
Крок	s	o	p	q	r	t	Р-Потік
1					1(t) Y		
2				1(r) Y			
3		1(q) Y					
4	1(o)						1

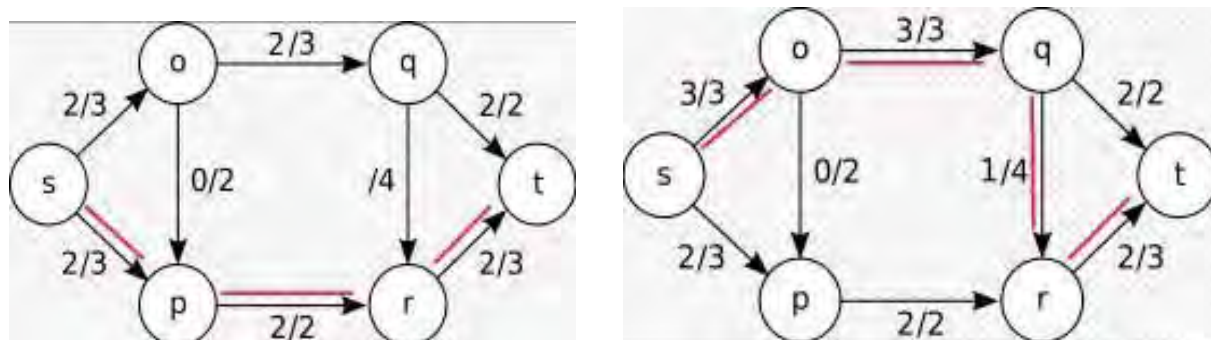


Рисунок 4 - Схема збільшуючих потоків мережі для другої і третьої ітерацій

**Паралельний синхронний алгоритм аналізу багатопродуктових потоків.** Як зазначалося раніше, алгоритм ПСАП з невеликими доповненнями придатний для аналізу багатопродуктових (р) потоків (БПСАП). Зміст додаткових функцій полягає у наступному. Через можливість існування окремої мережі для передачі кожного потоку  $ЗМ(p)$ , на ітераціях всі продукти (р) незалежно і паралельно аналізують базовим алгоритмом ПСАП. При цьому використовують однакові обмеження на пропускні здатності дуг. Після попереднього визначення збільшуючих потоків кожного продукту (р) аналізують розділяючу множину ребер (РМ) всіх продуктів. На приналежних множині РМ дугах контролюють граничні умови щодо величини загального потоку. У разі невиконання обмежень, зменшують величини потоків кожного продукту (р), з подальшим незалежним коректуванням параметрів потоків продуктів на усіх дугах маршрутів. Причому для коректування параметрів потоків продуктів на дугах множини РМ можуть застосовуватися певні моделі вирішення компромісів у багатокритеріальних задачах [4, 8]. Після коректування параметрів названих дуг та відповідних потоків, виконується остаточний розрахунок збільшуючих потоків кожного продукту (р), а також формування нових  $ЗМ(p)$  продуктів. Подальший цикл відповідає схемі алгоритму ПСАП.

Приклад щодо реалізації БПСАП завдання із розрахунку трьох продуктового потоку через транспортну мережу [1] наведено на рис. 5, де пропускні здатності всіх дуг дорівнюють 1. На рисунку через  $Sp$  та  $tp$  позначені витoki та стоки потоків продуктів (р). Якщо по дугах мережі може протікати цілочисельний потік, тоді максимальний багатопродуктовий потік дорівнює 1. У разі можливості дробових

потоків маємо наступне рішення. Відповідно ПСАП по кожному із ребер множини КМ, яка складається із дуг (1, 2), (2, 3), (2, 4), при незалежному застосуванні алгоритму можуть протікати по два потоки величиною 1. У разі визнання продуктів (р) рівнозначними встановлюється, що по цих дугах протікають дробові потоки величини (1/2), а максимальний потік у мережі дорівнює 3/2. Рисунок 5 демонструє максимальний потік для трьох продуктів.

За допомогою БПСАП можуть вирішуватися завдання формування компромісних багатопродуктових потоків через транспортну мережу. Зупинимось на особливості таких завдань планування неоднорідних потоків. Компромісними будемо називати потоки, в яких конкурують окремі складові. Зокрема, такими можна вважати потоки кількох продуктів, якщо при визначенні величин потоків кожного продукту явно розглядати моделі розв'язання компромісів щодо пропускних здатностей дуг. У класичних завданнях окремі продукти вважають рівноцінними (неявне застосування моделі компромісі у формі абсолютної поступки [7, 8]). Алгоритми розрахунку багатопродуктових потоків часто дають рішення шляхом по чергового формування загального потоку через мережу [1], при цьому окремі продукти отримують суттєво непорівнянні величини у складі загального максимального потоку через мережу, рис. 6 – рис. 8.

Приклад компромісного потоку двох продуктів рис. 6 – рис. 8 показує додаткові можливості застосування БПСАП, які на відміну від інших алгоритмів аналізу багатопродуктових потоків виконують одночасний аналіз потоків всіх продуктів. За рахунок цього можна застосовувати різні моделі компромісного аналізу та вибору величин кожного продукту на ребрах РМ транспортної мережі. На рис. 6 наведено вихідну схему мережі для пропуску двох продуктів, з указаними величинами пропускних здатностей дуг.

На рис. 7 та рис. 8 наведено результати планування максимальних потоків продуктів у залежності від черговості розподілу за алгоритмами [1, 2].

Рис. 7 подає максимальний потік продуктів при початку аналізу від вузла S1, рис. 8 – при початку від S2. У обох варіантах максимальний потік через мережу має значення 35.

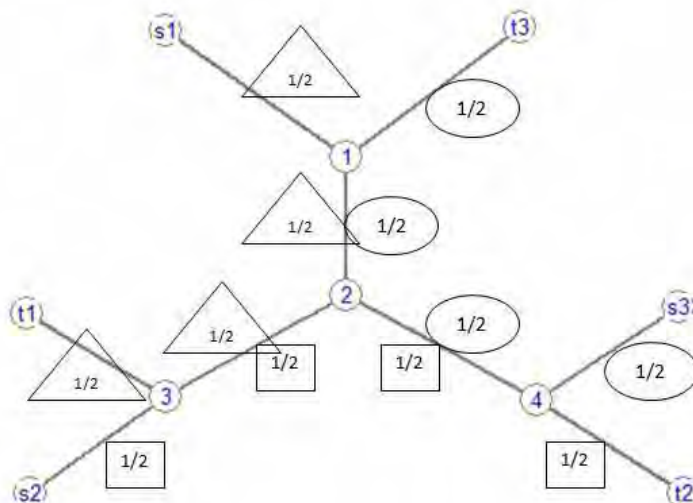


Рисунок 5 - Схема мережі та величини максимальних потоків трьох продуктів (трикутники – продукт 1, квадрат – продукт 2, коло – потік продукту 3)

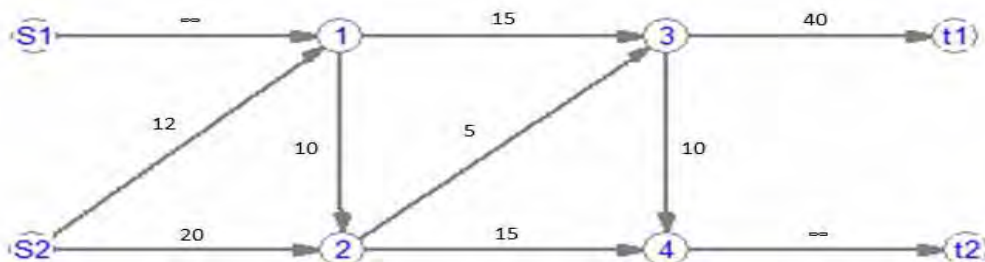


Рисунок 6 - Схема мережі для розрахунку максимального потоку двох продуктів

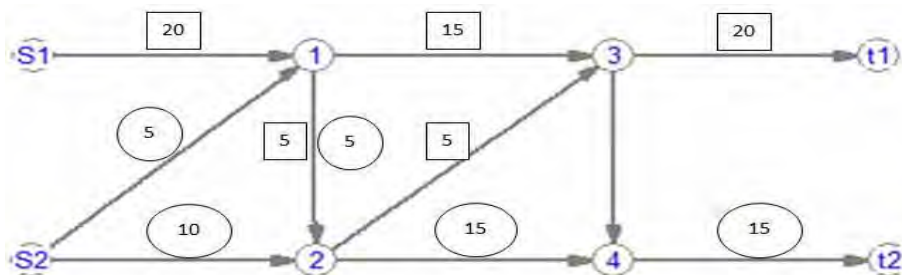


Рисунок 7 - Максимальний потік двох продуктів при розрахунку від S1

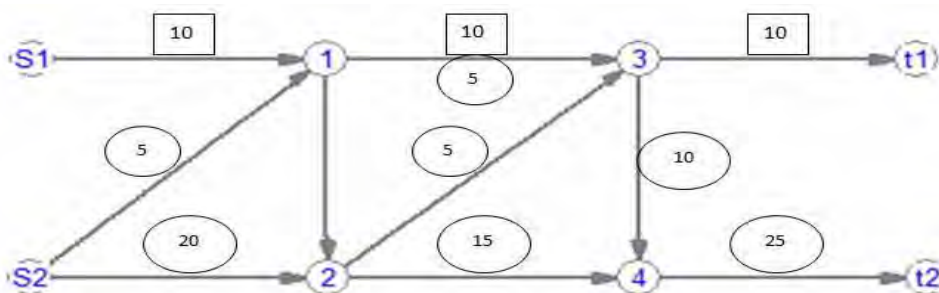


Рисунок 8 - Максимальний потік двох продуктів при розрахунку від S2

Як показують рішення рис. 7 та рис. 8, навіть для двох продуктів застосування відомих алгоритмів за умов моделі компромісу як рівноцінності дає суттєво різні, багатозначні, рішення. Такі варіанти можуть бути не прийнятними за умов конкуренції потоків продуктів. Пропоновані алгоритми БПСАП дозволяють одночасно формувати рішення для всіх продуктів окремо, а при аналізі компромісної множини ребер застосовувати необхідні моделі вибору рішень.

**Висновки.** У статті розроблено та досліджено можливості паралельного синхронного алгоритму розрахунку максимальних неоднорідних потоків у транспортних мережах, який являється придатним для розрахунку однопродуктових, багатодуктових та формування компромісних потоків за рахунок застосування моделей раціонального вибору. Наведені приклади демонструють придатність, ефективність і широкі можливості застосування паралельного алгоритму для вирішення завдань аналізу та оптимального планування неоднорідних потоків у транспортних мережах.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Филлипс Д.И., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей/–М.:Мир,1984. – С. 496.
2. Кормен, Томас Х., Лейзерсон, Чарльз И., Ривест, Рональд Л., Штайн Клиффорд. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2010. – 1296 с.: ил. – Парал. тит. англ. – ISBN 978-5-8459-0857-5
3. Гасников В.А. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие/А.В. Гасников и др.М.:МЦНМО,2013.–428 с.
4. Скалозуб В.В. Интеллектуальные информационные технологии и системы железнодорожного транспорта / Скалозуб В.В., Цейтлин С.Ю., Чередищенко М.С. / Монография «Системные технологии моделирования сложных процессов». – Днепр, НМетАУ – ИВК «Системные технологии». 2016. – С. 560 – 589.
5. Yefim Dinitz. Dinitz' Algorithm: The Original Version and Even's Version // Theoretical Computer Science: Essays in Memory of Shimon Even / Oded Goldreich, Arnold L. Rosenberg, and Alan L. Selman. – Springer, 2006. – P. 218–240. – ISBN 978-3540328803.
6. В.Н. Korte, Jens Vygen. 8.4 Blocking Flows and Fujishige's Algorithm // Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms (Algorithms and Combinatorics, 21). – Springer Berlin Heidelberg, 2008. – P. 174–176.
7. Скалозуб В.В. Развитие многопродуктовых и многокритериальных моделей потоковых задач с учетом специализации носителей потоков / В.В. Скалозуб, Л.А. Паник, Є.С. Блохін. // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2011, – №4. – С.7–11.
8. Скалозуб В.В. О построении обобщенных моделей планирования неоднородных транспортных потоков /В.В. Скалозуб, Л.А. Паник // Системные технологии, 5(106), 2016. – С. 94–101.