УДК 519.242

С.В. Антоненко, М.А. Бегарь, Л.В. Мащенко

ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ИСПЫТАНИЙ НА ОСНОВЕ СПЛАЙН-РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Аннотация. Предлагается технология планирования испытаний технических систем на основе последовательного анализа для сплайн-распределения Вейбулла с двумя узлами. Приведен пример реализации разработанного метода на изделии авиационной техники.

Постановка проблемы в общем виде. Важной частью жизненного цикла технических систем является их мониторинг. При этом методы и средства, применяемые при планировании проведения мониторинга, не обеспечивают его эффективность как с точки зрения экономических затрат, так и качества получаемых выводов. В силу этого востребованной является алгоритмизация и разработка современной информационной технологии планирования испытаний и принятия решений при мониторинге.

Наиболее важна задача повышения эффективности мониторинга авиационно-космической техники. Для анализа показателей надежности и эффективности функционирования изделий авиационно-космической техники используются различные методы обработки массивов данных об особых случаях, возникающих в процессе эксплуатации, например, отказы бортовых систем наблюдаемой техники. В процессе обработки массивов отказов используют различные вычислительные схемы, позволяющие восстанавливать параметры функций распределения времени непрерывной наработки до отказа. При этом их достоверность часто имеет только качественную оценку. Авторами предлагается применить аппарат теории планирования испытаний для выбора наиболее достоверного результата по оценке параметров.

Анализ последних достижений. Существенный вклад в теорию планирования испытаний внес А.Вальд [1], предложивший метод последовательного анализа, который получил развитие в работах Б.Шора, О.Ширяева, Ю.Беляева. Вычислительные схемы рассмотрены на основе экспоненциального закона распределения времени наработки до отказа.

Исследования, проведенные Р.Судаковым и О.Тескиным, позволили сформулировать вычислительную технологию испытаний, основанную на биноминальном распределении. Разработано множество стандартов и регламентов испытаний. Однако существующие ГОСТы, регламентирующие планы испытаний для нормального, биномиального, экспоненциального и Вейбулла распределений (18242-72, 27.410-83, 24660-81, 20736-75, СТ СЭВ 1192-78, 27.410-87, 27.402-95), приводят к заниженным оценкам показателей надежности.

В настоящее время при решении многообразных задач обработки статистических данных нашли широкое применение сплайн-распределения [2]. Им присуще адекватное и достоверное описание реальных процессов. Поэтому актуальным является использование сплайн-распределений при разработке вычислительных схем планирования испытаний.

Возможность сокращения количества наблюдений наиболее важна при испытаниях дорогостоящих изделий. Этого можно достичь, применив методы на основе последовательного анализа. Еще одно преимущество методов планирования испытаний с использованием последовательного анализа состоит в том, что они позволяют повысить достоверность получаемых выводов о показателях мониторинга для заданного количества испытаний. В известных на сегодняшний день работах специалистов в области планирования испытаний такая область применения метода последовательного анализа не рассматривалась, также не рассматривались распределения, отличные от классических. Программные комплексы (НАДІС, СПК, ДИАНА, АТСТАТ-ПРП, QSTAT, PLANK, STATISTICA и др.) с реализацией известных вычислительных схем планирования испытаний, не отвечают современным требованиям, предъявляемым к программному продукту.

Следовательно, в данное время не существует информационной технологии оптимизации процесса мониторинга технических систем (особенно изделий авиационно-космической техники), которая соответствует современному уровню методов планирования испытаний, принятия решений и программного обеспечения компьютерной техники.

Цель работы. Необходимо разработать вычислительную технологию планирования испытаний на основе сплайн-распределения Вейбулла с двумя узлами

 ISSN 1562-9945

$$f(x,\overline{\theta}) = \begin{cases} \lambda\beta_1 x^{\beta_1-1}\exp\left(-x^{\beta_1}\lambda\right), \quad 0 \le \mathrm{x} \le x_0; \\ \lambda\beta_2 \mathrm{X}_0^{\beta_1-\beta_2} x^{\beta_2-1}\exp\left(-x_0^{\beta_1}\lambda\left(\dfrac{x}{X_0}\right)^{\beta_2}\right), \quad \mathrm{x}_0 \le x \le x_1; \\ \lambda\beta_3 X_0^{\beta_1-\beta_2} x_1^{\beta_2-\beta_3} x^{\beta_3-1}\exp\left(-x_0^{\beta_1}\lambda\left(\dfrac{x_1}{x_0}\right)^{\beta_2}\left(\dfrac{x}{x_1}\right)^{\beta_3}\right), \ \mathrm{x} \ge x_1, \end{cases} \qquad (1)$$

на основе последовательного анализа для данных, полученных при оценке показателей надежности авиационно-космической техники. Следует отметить, что впервые указанные вычислительные схемы для сплайн-распределения Вейбулла с одним узлом были рассмотрены А.Ф.Приставкой.

Основная часть. Авторами предложена информационная технология для проведения сравнительного анализа показателей надежности изделий авиационно-космической техники. Суть технологии состоит в том, что в качестве основной и альтернативной гипотезы выбираются показатели, полученные методом I и методом II. Если в результате последовательного анализа принимается гипотеза H_0, отдается предпочтение методу I, в противном случае – методу II. Для принятия окончательного решения может понадобиться усеченная процедура последовательного анализа. Рассмотрим процедуру последовательного анализа. Пусть по результатам наблюдений случайной величины проведено восстановление распределения. Имеется выборка $t = \left\{t_i,\ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}}\right\}$ из распределения $f\left(t,\overline{\theta}\right)$ и две оценки вектора параметров распределения (вектор $\overline{\theta_1}$ и $\overline{\theta_2}$). Сформулируем гипотезы о параметрах распределений

$$H_0\text{: } f(t,\ \overline{\theta}) = f(t,\ \overline{\theta_1}),\ H_1\text{: } f(t,\ \overline{\theta}) = f(t,\ \overline{\theta_2}). \qquad (2)$$

В методе последовательной проверки отказываются от постоянного объема выборки, и ограничивают эту величину в процессе эксперимента в зависимости от результатов уже выполненных наблюдений. Устанавливается некоторое правило, которым руководствуются при принятии на каждой стадии эксперимента одного из трех решений: принять гипотезу H_0; отвергнуть гипотезу H_0; продолжить эксперимент и провести дополнительное наблюдение.

Проверка проводится последовательно. На каждом m-м этапе m-мерное пространство выборок разбивается не на две, а на три попарно непересекающиеся области: критическую G_1, допустимую G_0 и промежуточную $G_{пр}$. Если выборочное значение попадает в критическую область G_1, то гипотеза H_0 отвергается; если – в допустимую область G_0, то она принимается, и если выборочное значение попадает в промежуточную область $G_{пр}$, то испытания продолжаются.

Число способов разбиения пространства выборок не ограничено, поэтому существуют самые разнообразные правила выбора решения, сравнить которые можно с помощью критериев качества. Критерием качества часто выбирают минимальную среднюю стоимость эксперимента. Если считать, что стоимость эксперимента пропорциональна размеру выборки n, то критерием качества последовательного правила выбора решения служит минимум среднего значения размера выборки, необходимый для принятия окончательного решения при условии, что уровень значимости не превышает α, а мощность не меньше $1-\beta$.

Как показал А. Вальд [1], среди всех правил выбора решений (последовательных и непоследовательных), для которых условные вероятности ошибок не превосходят величин α и β, последовательное правило выбора решения, состоящее в сравнении отношения правдоподобия $L(t_1,\ldots,t_n)$ с двумя порогами C_0 и C_1, приводит к наименьшим значениям $E\{n(H_0\}$ и $E\{n(H_1\}$.

$$C_0 \geq \frac{\beta}{1-\alpha},\ C_1 \leq \frac{1-\beta}{\alpha}. \tag{3}$$

В данной статье рассматриваются вычислительные схемы метода последовательного анализа с использованием сплайн-распределения Вейбулла с двумя узлами.

Для принятия решения о совпадении параметров распределений необходимо разработать планы испытаний и определить среднее число наблюдений для принятия окончательного решения. Для последовательного анализа, согласно общей теории, разработанной А. Вальдом, запишем отношение правдоподобия:

 ISSN 1562-9945

$$\ln L(x) = n\ln\frac{\lambda''}{\lambda'} + s''\ln\beta_1'' + (k''-s'')\ln\beta_2'' + (n-k'')\ln\beta_3'' - s'\ln\beta_1' - (k'-s')\ln\beta_3' -$$
$$-(n-k')\ln\beta_3' + (n-s'')\ln x_0'' - (n-s')\ln x_0' + (n-k'')(\beta_2'' - \beta_3'')\ln x_1'' -$$
$$-(n-k')(\beta_2' - \beta_3')\ln x_1' + (\beta_1''-1)\sum_{i=1}^{s''}\ln x_i + (\beta_2''-1)\sum_{i=s''+1}^{k''}\ln x_i + (\beta_3''-1)\sum_{i=k''+1}^{n}\ln x_i -$$
$$-(\beta_1'-1)\sum_{i=1}^{s'}\ln x_i - (\beta_2'-1)\sum_{i=s'+1}^{k'}\ln x_i - (\beta_3'-1)\sum_{i=k'+1}^{n}\ln x_i - \lambda''\sum_{i=1}^{s''} x_i^{\beta_1''} + \lambda'\sum_{i=1}^{s'} x_i^{\beta_1'} -$$
$$-\lambda'' x_0''^{\beta_1''}\sum_{i=s''+1}^{k''}\left(\frac{x_i}{x_0''}\right)^{\beta_2''} + \lambda' x_0'^{\beta_1'}\sum_{i=s'+1}^{k'}\left(\frac{x_i}{x_0'}\right)^{\beta_2'} - \lambda'' x_0''^{\beta_1''}\left(\frac{x_1''}{x_0''}\right)^{\beta_2''}\sum_{i=k''+1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_1''}\right)^{\beta_3''} + \lambda' x_0'^{\beta_1'}\left(\frac{x_1'}{x_0'}\right)^{\beta_2'}\sum_{i=k'+1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_1'}\right)^{\beta_3'}$$
$$. \qquad (4)$$

Область продолжения испытаний задается неравенством

$$\ln\frac{\delta}{1-\gamma} < \ln L(x) < \ln\frac{1-\delta}{\gamma}, \qquad (5)$$

где γ-ошибка 1 рода, δ – ошибка 2 рода, или

$$B_n < D_n < A_n,$$

$$D_n = (\beta_1''-1)\sum_{i=1}^{s''}\ln x_i + (\beta_2''-1)\sum_{i=s''+1}^{k''}\ln x_i + (\beta_3''-1)\sum_{i=k''+1}^{n}\ln x_i - (\beta_1'-1)\sum_{i=1}^{s'}\ln x_i - (\beta_2'-1)\sum_{i=s'+1}^{k'}\ln x_i - (\beta_3'-1)\sum_{i=k'+1}^{n}\ln x_i -$$
$$-\lambda''\sum_{i=1}^{s''} x_i^{\beta_1''} + \lambda'\sum_{i=1}^{s'} x_i^{\beta_1'} - \lambda'' x_0''^{\beta_1''}\sum_{i=s''+1}^{k''}\left(\frac{x_i}{x_0''}\right)^{\beta_2''} + \lambda' x_0'^{\beta_1'}\sum_{i=s'+1}^{k'}\left(\frac{x_i}{x_0'}\right)^{\beta_2'} -$$
$$-\lambda'' x_0''^{\beta_1''}\left(\frac{x_1''}{x_0''}\right)^{\beta_2''}\sum_{i=k''+1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_1''}\right)^{\beta_3''} + \lambda' x_0'^{\beta_1'}\left(\frac{x_1'}{x_0'}\right)^{\beta_2'}\sum_{i=k'+1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_1'}\right)^{\beta_3'}$$

$$B_n = \ln\frac{\delta}{1-\gamma} - n\ln\frac{\lambda''}{\lambda'} - s''\ln\beta_1'' - (k''-s'')\ln\beta_2'' - (n-k'')\ln\beta_3'' + s'\ln\beta_1' +$$
$$+(k'-s')\ln\beta_2' + (n-k')\ln\beta_3' - (n-s'')\ln x_0'' + (n-s')\ln x_0' -$$
$$-(n-k'')(\beta_2''-\beta_3'')\times\ln x_1'' + (n-k')(\beta_2'-\beta_3')\ln x_1'$$

$$A_n = \ln\frac{1-\delta}{\gamma} - n\ln\frac{\lambda''}{\lambda'} - s''\ln\beta_1'' - (k''-s'')\ln\beta_2'' - (n-k'')\ln\beta_3'' + s'\ln\beta_1' +$$
$$+(k'-s')\ln\beta_2' + (n-k')\ln\beta_3' - (n-s'')\ln x_0'' + (n-s')\ln x_0' - \qquad (6)$$
$$-(n-k'')(\beta_2''-\beta_3'')\times\ln x_1'' + (n-k')(\beta_2'-\beta_3')\ln x_1'$$

Если $D_n \ge A_n$, то гипотеза H_0 отклоняется, если $D_n \le B_n$, то гипотеза H_0 принимается.

При $n = n_0$ происходит усечение последовательной процедуры:

если $B_{n_0} + \ln\dfrac{1-\delta}{\gamma} \le D_{n_0} < A_{n_0}$, то гипотеза H_0 принимается;

если $B_{n_0} < D_{n_0} < A_{n_0} + \ln\frac{\delta}{1-\gamma}$, то принимается гипотеза H_1.

Проведено исследование для определения среднего числа наблюдений для проверки гипотез H_0 и H_1 при шести переменных параметрах. Математическое ожидание числа наблюдений для принятия окончательного решения вычисляется по формуле

$$E\{n\} = \frac{z(\overline{\theta})\ln B - [1 - z(\overline{\theta})]\ln A}{E\{z\}} = \frac{(1-\gamma)\ln\frac{\delta}{1-\gamma} + \gamma\ln\frac{1-\delta}{\gamma}}{E\{\ln L(x)\}}, \qquad (7)$$

где $A = \frac{1-\delta}{\gamma}$, $B = \frac{\delta}{1-\gamma}$, $z(\overline{\theta})-$ оперативная характеристика для истинных значений параметров $\overline{\theta}$, $E\{z\}-$ математическое ожидание величины z,

где $z = \ln\frac{f(x,\theta_2)}{f(x,\theta_1)} = \ln\frac{f(x,\lambda'',\beta_1^{''},\beta_2^{''},\beta_3^{''},x_0^{''},x_1^{''})}{f(x,\lambda',\beta_1^{'},\beta_2^{'},\beta_3^{'},x_0^{'},x_1^{'})}$.

Введем обозначения:

$$f_1(x,\overline{\theta}) = \lambda\beta_1 x^{\beta_1-1}\exp(-x^{\beta_1}\lambda);$$

$$f_2(x,\overline{\theta}) = \lambda\beta_2 x_0^{\beta_1-\beta_2} x^{\beta_2-1}\exp(-x_0^{\beta_1}\lambda(\frac{x}{x_0})^{\beta_2});$$

$$f_3(x,\overline{\theta}) = \lambda\beta_3 x_0^{\beta_1-\beta_2} x_1^{\beta_2-\beta_3} x^{\beta_3-1}\exp\left(-x_0^{\beta_1}\lambda\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{\beta_2}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\beta_3}\right). \qquad (8)$$

Рассмотрим возможное расположение узлов $x_0^{'}, x_0^{''}, x_1^{'}, x_1^{''}$ относительно друг друга. При этом возможны варианты

$x_0^{'} < x_0^{''} < x_1^{'} < x_1^{''}$; ; $x_0^{'} < x_1^{'} < x_0^{''} < x_1^{''}$; $x_0^{''} < x_0^{'} < x_1^{'} < x_1^{''}$;

$x_0^{''} < x_0^{'} < x_1^{''} < x_1^{'}$; $x_0^{''} < x_1^{''} < x_0^{'} < x_1^{'}$; $x_0^{'} = x_0^{''}, x_1^{'} = x_1^{''}, x_0^{'} < x_1^{'}$ (9)

При совпадении узлов, т.е. $x_0^{'} = x_0^{''}$, $x_1^{'} = x_1^{''}$, для $E\{z\}$ получим

$$E\{z\} = \int_0^{\infty} zf(x,\overline{\theta})dx =$$

$$\int_0^{x_0}\ln\frac{f_1(x,\overline{\theta}_2)}{f_1(x,\overline{\theta}_1)}f_1(x,\overline{\theta})dx + \int_{x_0}^{x_1}\ln\frac{f_2(x,\overline{\theta}_2)}{f_2(x,\overline{\theta}_1)}f_2(x,\overline{\theta})dx + \int_{x_1}^{\infty}\ln\frac{f_3(x,\overline{\theta}_2)}{f_3(x,\overline{\theta}_1)}f_3(x,\overline{\theta})dx$$

Когда узлы не совпадают, например, $x_0^{'} < x_0^{''} < x_1^{'} < x_1^{''}$, имеем

 ISSN 1562-9945

$$E\{z\}=\int_0^{\infty} zf(x,\bar{\theta})dx=\int_{x_0''}^{x_1'}\ln\frac{f_2(x,\bar{\theta}_2)}{f_2(x,\bar{\theta}_1)}f_2(x,\bar{\theta})dx+\int_{x_1'}^{x_1''}\ln\frac{f_3(x,\bar{\theta}_2)}{f_2(x,\bar{\theta}_1)}f_2(x,\bar{\theta})dx+$$

$$+\int_{x_0''}^{x_1'}\ln\frac{f_2(x,\bar{\theta}_2)}{f_2(x,\bar{\theta}_1)}f_2(x,\bar{\theta})dx+\int_{x_1'}^{x_1''}\ln\frac{f_3(x,\bar{\theta}_2)}{f_2(x,\bar{\theta}_1)}f_2(x,\bar{\theta})dx+\int_{x_1''}^{\infty}\ln\frac{f_3(x,\bar{\theta}_2)}{f_3(x,\bar{\theta}_1)}f_3(x,\bar{\theta})dx. \quad (10)$$

Вычислительные схемы принятия решения о параметрах сплайн-экспоненциального распределения были реализованы при оценке показателей надежности функционирования КА «Океан-О» на этапах проектирования и экспериментальной отработки, а также для принятия решения о параметрах сплайн-распределения Вейбулла по данным об отказах системы ЦГВ-10 самолета ИЛ-62. На основе оценок параметров сплайн-распределения Вейбулла с двумя узлами, полученных методом максимального правдоподобия и методом наименьших квадратов, принималось решение о том, какому методу оценки параметров отдать предпочтение в условиях ограниченного объема данных:

$H_0 : \bar{\theta}\ \{\lambda', \beta_1', \beta_2', \beta_3', x_0', x_1'\} = \bar{\theta}\{0.0002,\ 0.778,\ 2.072,\ 4.936,\ 1009,\ 4122\}$;

$H_1 : \bar{\theta} = \{\lambda'', \beta_1'', \beta_2'', \beta_3'', x_0'', x_1''\} = \bar{\theta}\{0.0002,\ 0.826,\ 2.159,\ 3.642,\ 1753,\ 3078\}$.

Применим метод последовательного анализа для обработки результатов восстановления сплайн-распределения. Зададимся ошибками первого и второго рода: $\alpha = 0.025$; $\beta = 0.025$. Для указанного вектора параметров распределения результаты анализа приведены на рис.1.

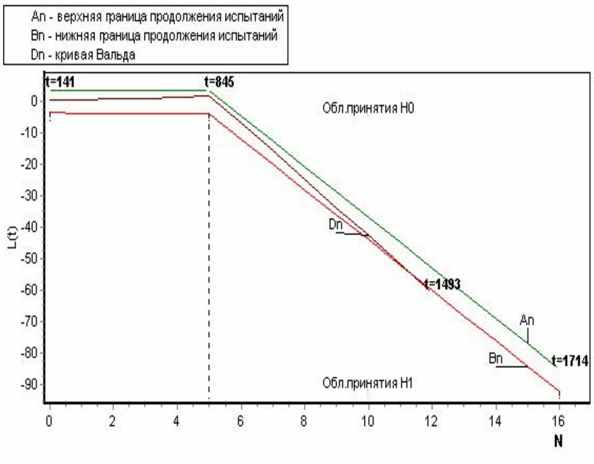

Рисунок 1 – Результаты последовательного анализа сравнения параметров сплайн-распределения Вейбулла для аппаратуры ЦГВ-10

Из анализа графического представления метода последовательного анализа следует, что на каждом шаге значения D_n принадлежат промежутку $[A_n, B_n]$. Это свидетельствует о том, что результаты восстановления сплайн-распределения Вейбулла при обработке данных об отказах бортовой системы самолета ИЛ-62 двумя методами являются адекватными. Однако, наблюдается тенденция к приближению значений D_n к значениям A_n. Исходя из вышесказанного, формулируется следующий вывод: при данном объеме наблюдений разница между результатами восстановления сплайн-распределения Вейбулла с двумя узлами по данным об отказах авиатехники методом максимального правдоподобия и методом наименьших квадратов не является существенной. При увеличении объема данных об отказах точность восстановления и точность принятия решения методом последовательного анализа будет расти.

Выводы и перспективы дальнейшего развития. Авторами предложена технология проведения сравнительного анализа показателей надежности изделий авиационно-космической техники с использованием метода последовательного анализа. В дальнейшем представляется целесообразным привлечение и других методов теории планирования испытаний, а также разработка их модификаций применительно к данной задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вальд А. Последовательный анализ. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1960. – 328 с.
2. Приставка А.Ф. Сплайн-распределения в статистическом анализе. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1995. – 152 с.

 ISSN 1562-9945