

В.А. Болтенков, В.И. Куваева, П.П. Червоненко

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ СОЦИАЛЬНОГО ВЫБОРА  
В ЗАДАЧАХ АГРЕГИРОВАНИЯ  
ОЦЕНОК В РАНГОВЫХ ШКАЛАХ**

*Аннотация. Исследованы возможности применения методов социального выбора для агрегирования коллективных оценок в ранговых шкалах. Рассмотрены и систематизированы 12 протоколов голосования: Борда, Кондорсе, Симпсона, Доджсона, Коупленда, Фишберна, Блэка, Шульце, Нансона, Кумбса, Болдуина, Хэара. Перечисленные правила голосования применены для построения консенсусной ранговой оценки при коллективной экспертизе для выбора программируемого логического контроллера для автоматизации работы воздухоподделительных установок. Показана перспективность применения методов голосования для построения коллективных оценок в ранговых шкалах.*

*Ключевые слова: социальный выбор, протоколы голосования, ранговая шкала, коллективное принятие решений.*

**Вступление и постановка задачи**

Теория социального выбора – область научных исследований, связанных с разработкой и анализом методов коллективного принятия решений. Вопросы социального выбора стимулировали научную мысль на протяжении веков [1]. В первую очередь это было связано с исследованием методов «справедливого» голосования. Классическими работами в этой области считаются труды Ж.Ш. Борда и маркиза Кондорсе [2,3]. Вычислительный социальный выбор (COMputer SOcial Choise – COMSOC) является молодой междисциплинарной областью знаний, которая образовалась только в начале 2000-х годов на стыке теории социального выбора и компьютерных наук [4,5]. Одно из его направлений связано с импортом понятий и методов из компьютерных наук для решения вопросов, связанных с вычислительной сложностью теории социального выбора. Сюда, в частности, относятся задачи исследования протоколов голосования, их реализации в Интернете, манипулируемости результатов коллективного выбора. Другое

направление связано с применением «классических» методов голосования в современных системах принятия решений, задачах метапоиска, работе с BigData. К этому направлению относится и тема настоящего исследования. Она связана с применением методов голосования в задачах агрегирования индивидуальных предпочтений, выраженных в ранговых шкалах. Применение методов голосования в задачах консенсусного агрегирования предпочтений, выраженных в ранговых шкалах, в частности при коллективных экспертизах, является перспективным, но исследовано недостаточно полно. Этой проблеме посвящено данное исследование.

### Формулировка целей исследования

Цели исследования – систематизация и анализ методов голосования как социального выбора и применимости их в задаче консенсусного агрегирования ранговых предпочтений, в частности, в задачах коллективного экспертного оценивания.

### Основная часть

Анализ протоколов голосования. Многочисленные правила (или протоколы голосования) изложены в литературе [6-10]. Однако их рассмотрение и классификация недостаточно формализованы. Сформулируем задачу голосования следующим образом. Имеется множество из  $m$  альтернатив  $\{A_1, \dots, A_m\}$ , которые предъявляются  $t$  агентам, которые в теории социального выбора называются участниками голосования. Каждый из участников голосования должен сформировать профиль индивидуальных предпочтений, располагая альтернативы по степени предпочтения. При этом каждая альтернатива должна получить ранговую оценку  $r_i, i = 1, \dots, m$ . В результате применения одного из протоколов голосования необходимо построить агрегированное консенсусное ранжирование альтернатив, т.е. такое ранжирование, которое наилучшим образом отражает индивидуальные предпочтения всех участников голосования. Агрегированное консенсусное ранжирование должно выявить наилучшую альтернативу  $A^*$  и упорядочить остальные альтернативы по степени их коллективной предпочтительности.

Анализ протоколов голосования согласно [6,7] позволил установить, что все они могут быть разделены на три класса:

- протоколы, основанные на подсчете баллов,
- протоколы, основанные на парных сравнениях альтернатив,

– рекуррентные протоколы или протоколы с последовательным удалением альтернатив.

Протоколы, основанные на подсчете баллов.

Протокол Борда. (Здесь и далее при необходимости нумеруем цифрами шаги протокола). 1) Каждый участник ранжирует все альтернативы  $A_1, \dots, A_m$  по предпочтительности. 2) В каждом  $s$ -м индивидуальном строге упорядочении первая альтернатива получает  $m-1$  баллов, вторая альтернатива –  $m-2$  баллов, последняя альтернатива – 0 баллов. Очевидно, что в  $s$ -м упорядочении балл Борда  $b^{<s>}(A_i)$  каждой альтернативы  $A_i$  равен числу  $\sum_{i \neq j} r^{<s>}(A_i, A_j)$  альтернатив  $A_j$ , уступающих альтернативе  $A_i$ .

Здесь величина  $r^{<s>}(A_i, A_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } A_i \succ A_j \\ 0, & \text{если } A_i \prec A_j \end{cases}$ . 3) Для каждой

альтернативы  $A_i$  вычисляется значение функции Борда

$f_{\text{БОРДА}}(A_i) = \sum_{s=1}^t b^{<s>}(A_i)$ , равное сумме баллов Борда  $b^{<s>}(A_i)$ , присвоенных

альтернативе  $A_i$  во всех индивидуальных упорядочениях. 4) Упорядочение альтернатив строится по убыванию значения функции Борда  $f_{\text{БОРДА}}(A_i)$ . Лучшая альтернатива  $A^*$  определяется максимальным значением функции Борда  $A^* \in \arg \max_{1 \leq i \leq m} f_{\text{БОРДА}}(A_i)$ .

Поскольку балл Борда  $b^{<s>}(A_i)$  связан с рангом  $r_i^{<s>}$  альтернативы  $A_i$  соотношением  $b^{<s>}(A_i) + r_i^{<s>} = m$ , убывающая последовательность баллов Борда  $m-1 > m-2 > \dots > 0$  эквивалентна возрастающей последовательности рангов альтернатив  $r_1 < r_2 < \dots < m$ .

**Протоколы, основанные на парных сравнениях альтернатив.**

Протокол Кондорсе основан на парных сравнениях альтернатив. 1) Каждый участник ранжирует все альтернативы  $A_1, \dots, A_m$  по предпочтительности. 2) Подсчитывается количество индивидуальных строгих упорядочений одного и того же вида. 3) Для каждой альтернативы  $A_i$  подсчитывается общее число  $g(A_i, A_j)$  участников, предпочитающих данную альтернативу  $A_i$  всем остальным альтернативам  $A_j$  при парных сравнениях во всех полученных упорядочениях. 4) Лучшая альтернатива при парном сравнении вариантов определяется по правилу простого большинства голосов.

Протокол Симпсона. Шаги 1-3 совпадают с шагами процедуры Кондорсе. 4) Для каждой альтернативы  $A_i$  определяется значение функции Симпсона  $f_{SIMPSON}(A_i) = \min_{1 \leq j \leq m} g(A_i, A_j)$ , равное минимальному числу участников, предпочитающих данную альтернативу  $A_i$  всем остальным альтернативам  $A_j$  ( $i \neq j$ ) при всех парных сравнениях. Упорядочение альтернатив строится по убыванию значения функции Симпсона  $f_{SIMPSON}(A_i)$ . Лучшая альтернатива определяется максимальным значением функции  $f_{SIMPSON}(A_i)$  или правилом максимина:

$$A^* \in \arg \max_{1 \leq i \leq m} f_{SIMPSON}(A_i) = \arg \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq m} g(A_i, A_j).$$

Протокол Доджсона. Шаги 1–3 совпадают с шагами 1 – 3 процедуры Кондорсе. 4) Строится вспомогательная матрица  $H = (h_{ij})_{m \times m}$  где  $h_{ij} = g(A_i, A_j) / g(A_j, A_i)$  – групповая матрица парных сравнений альтернатив по числу поданных голосов. Для каждой альтернативы  $A_i$  по строке матрицы  $H$  находятся альтернативы  $A_j$  для которых  $h_{ij} < 1$ . Это будут те альтернативы, в сравнении с которыми альтернатива  $A_i$  получила меньше половины общего числа голосов. Обозначим совокупность таких альтернатив через  $A_{1/2}$ . Для каждой альтернативы  $A_i$  вычисляется значение функции Доджсона  $f_{DODGSON} = \sum_{j \in A_{1/2}} [g_{1/2} - g(A_i, A_j)]$ , где  $g_{1/2} = t / 2$ , если число  $t$  избирателей четно, и  $g_{1/2} = (t + 1) / 2$  при нечетном  $t$ . Упорядочение альтернатив строится по возрастанию значения функции Доджсона  $f_{DODGSON}(A_i)$ . Лучшая альтернатива  $A^*$  определяется минимальным значением функции Доджсона  $A^* \in \arg \max_{1 \leq i \leq m} f_{DODGSON}(A_i)$ .

Протокол Коупленда. Каждый участник сравнивает все альтернативы  $A_1, \dots, A_m$  попарно друг с другом независимо от сравнений других пар вариантов. Для каждой альтернативы  $A_i$  подсчитывается число  $n(A_i, A_j)$  альтернатив  $A_j$ , уступающих альтернативе  $A_i$ , и число  $n(A_j, A_i)$  альтернатив  $A_j$ , превосходящих альтернативу  $A_i$  по простому большинству голосов. Для каждой альтернативы вычисляется

значение функции Коупленда  $f_{COPELAND}(A_i) = n(A_i, A_j) - n(A_j, A_i)$ , равное разности числа «побед» альтернативы  $A_i$  над  $A_j$  и числа «поражений»  $A_i$  от  $A_j$  по простому большинству голосов. Упорядочение альтернатив строится по убыванию значения функции Коупленда  $f_{COPELAND}(A_i)$ . Лучшая альтернатива  $A^*$  определяется максимальным значением функции Коупленда  $A^* \in \arg \max_{1 \leq i \leq m} f_{COPELAND}(A_i)$ .

Протокол Фишберна. Шаг1 совпадает с шагом 1 процедуры Коупленда. 2) Для каждой альтернативы  $A_i$  вычисляется значение функции Фишберна  $f_{FISHBERN}(A_i) = n(A_i, A_j)$ , равное числу альтернатив  $A_j$ , которые уступают альтернативе  $A_i$  по простому большинству голосов. Упорядочение альтернатив строится по убыванию значения функции Фишберна  $f_{FISHBERN}(A_i)$ . Лучшая альтернатива  $A^*$  определяется максимальным значением функции Фишберна.

Протокол Блэка описывается следующим образом: если существует победитель по Кондорсе, то это победитель по Блэку, иначе в качестве победителя по Блэку выбирается победитель по Борда.

Протокол Шульце – самый «молодой» протокол голосования, предложенный М. Шульце в 1997 г. [11,12]. Этот протокол позволяет определить альтернативу победителя, когда избиратели при голосовании упорядочивают кандидатуры по предпочтению. Основная идея метода Шульце – концепция непрямых побед: если альтернатива  $A_1$  предпочтительнее альтернативы  $A_2$ , а та в свою очередь предпочтительнее  $A_3$  и т.д. до  $A_n$ , говорят, что есть путь от альтернативы  $A_1$  до альтернативы  $A_n$  и имеет место косвенная победа  $A_1$  над  $A_n$ . Силой такого пути (непрямой победы) будет слабейшая прямая победа одного кандидата над другим на данном пути. Силой прочнейшего пути (по терминологии автора – англ. *beatpath* – «разъезженный» путь) от альтернативы  $A_i$  до альтернативы  $A_j$  будет максимальное значение из сил всех возможных путей от  $A_i$  до  $A_j$ , т.е. всех сил непрямых побед. Если пути из  $A_i$  в  $A_j$  нет, то сила прочнейшего пути считается равной 0. Если сила прочнейшего пути из  $A_i$  до  $A_j$

больше силы прочнейшего пути из  $A_j$  до  $A_i$ , считают что  $A_i$  побеждает  $A_j$ . Победитель по Шульце – альтернатива, побеждающая любую другую альтернативу. Отметим [12], что задача нахождения прочнейшего пути возникает и в других областях. В компьютерных сетях это то же самое, что нахождение пропускной способности между двумя компьютерами в сети, когда соединение между двумя любыми машинами или маршрутизаторами в сети имеет ограниченную пропускную способность. Задачу иногда называют задачей о широчайшем пути, так как «сила пути» здесь является синонимом ширины, и задачей о максимальной пропускной способности пути, потому что она упрощает нахождение максимальной пропускной способности пути на графе. Задача поиска прочнейшего пути обычно решается по алгоритму Флойда — Уоршелла.

#### **Протоколы с последовательным исключением альтернатив.**

Протокол Нансона. Шаги 1–3 совпадают с шагами 1–3 процедуры Борда. 4) Определяется альтернатива  $A_1^-$ , соответствующая минимальному значению функции Борда,  $A_1^- = \arg \min_{1 \leq i \leq m} f_{BORDA}(A_i)$ . Эта альтернатива  $A_1^-$  исключается из множества альтернатив. Повторяются шаги 1–4, и на суженном множестве альтернатив  $A \setminus \{A_1^-\}$  находится следующая альтернатива  $A_2^-$ , имеющая минимальное число голосов, которая исключается из рассмотрения. Шаги 1–4 повторяются, пока не останется одна или несколько альтернатив, которые дальше нельзя исключить. Оставшиеся наиболее предпочтительные альтернативы составляют множество  $A^*$ , определяемое функцией Нансона:

$$f_{NANSON}(A^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A_{k-1} \setminus \{A_k^-\}.$$

Протокол Кумбса аналогичен протоколу Нансона, но в нем последовательно исключаются из рассмотрения альтернативы, которые считаются худшими по большинству голосов.

Протокол Болдуина. На каждом этапе отбрасывается из рассмотрения альтернатива, имеющая наименьшую сумму рангов в упорядочениях избирателей.

Протокол Хэара: каждый участник указывает альтернативу, которой он выставляет наивысший рейтинг среди  $m$  альтернатив.

Удаляется из списка альтернатив та, которая получила наивысший рейтинг у наименьшего количества избирателей. Процедура повторяется для оставшихся  $(m-1)$  альтернатив. Процесс продолжается до тех пор, пока не останется одна альтернатива  $A^*$ . Она объявляется победителем.

Для применения протоколов голосования в системах агрегирования ранговых оценок реального времени важным параметром является вычислительная сложность алгоритма. Анализ показывает, что все протоколы, за исключением алгоритма Доджсона, для которого доказана его NP сложность, являются процедурами полиномиальной сложности, которая оценивается как  $O(m^2)$  для остальных протоколов и  $O(m^3)$  для протокола Шульце.

#### **Применение методов голосования для коллективной экспертизы.**

Перед приобретением крупной партии программируемых логических контроллеров (ПЛК) для промышленной автоматизации серии воздухоразделительных установок (ВРУ) были выбраны пять альтернативных вариантов ПЛК:

- Siemens SIMATIC S7-300/200 (альтернатива а);
- Moeller XC-100/200 (альтернатива b);
- Advantech ADAM-5000/ APAX-500 (альтернатива c);
- Schneider Modicon M340/Modicon Quantum (альтернатива d);
- ICPDAS XPAC-8000/ LinPAC-8000/ WinPAC-8000 (альтернатива e).

Для коллективной консенсусной оценки лучшего варианта была сформирована группа из девяти экспертов – ведущих специалистов предприятия ПКФ «Криопром» (г. Одесса) и ведущих преподавателей Института компьютерных систем Одесского национального политехнического университета. Экспертам было предложено составить профили индивидуальных предпочтений альтернатив, принимая во внимание специфику автоматизации ВРУ, а также такие характеристики ПЛК как цена, быстродействие, диапазон средств для программирования ПЛК, определяющий универсальность его применения. В результате экспертного оценивания был получен профиль, приведенный в таблице 1. Полученная коллективная ранговая оценка обрабатывалась всеми выше перечисленными методами. Для протоколов с исключением альтернатив экспертам были предложены многоэтапные процедуры оценивания, соответствующие протоколам. Кроме того, в

качестве «истинного» консенсусного коллективного ранжирования была рассчитана медиана Кемени (МК) для данного профиля. МК на сегодняшний день считается наилучшей консенсусной оценкой при поиске коллективного ранжирования, поскольку она является аксиоматически обоснованной [4-6], в отличие от приведенных выше методов голосования, которые представляют собой эвристики. Однако расчет МК является NP-задачей, и уже для мощности множества альтернатив  $m > 5$  задача требует больших затрат счетного времени. Поэтому для расчета МК предложен ряд методов, приводящих ее к задаче полиномиальной сложности, в частности, приведение к задаче целочисленного линейного программирования и решение методом ветвей и границ. Таким методом, реализованным в виде комплекса Matlab-функций [13], была рассчитана МК для профиля экспертизы.

Таблица 1

Профиль индивидуальных предпочтений экспертов

Эксперты	Индивидуальные предпочтения	Эксперты	Индивидуальные предпочтения	Эксперты	Индивидуальные предпочтения
Э1	$c \succ e \succ d \succ b \succ a$	Э4	$c \succ e \succ d \succ b \succ a$	Э7	$e \succ c \succ d \succ a \succ b$
Э2	$c \succ e \succ d \succ b \succ a$	Э5	$e \succ c \succ d \succ a \succ b$	Э8	$b \succ e \succ d \succ c \succ a$
Э3	$c \succ e \succ b \succ d \succ a$	Э6	$e \succ d \succ c \succ a \succ b$	Э9	$d \succ b \succ e \succ c \succ a$

Для расчетов по перечисленным протоколам голосования производились как с помощью on-line калькуляторов, достаточно полно представленных в Интернете, так и с помощью оригинального программного обеспечения, составленного в системе компьютерной алгебры Scilab для отдельных протоколов голосования. В частности, был использован калькулятор [14], в котором нестандартным образом рассчитываются протоколы Борда, Болдуина и Нансона. Указанные процедуры также были промоделированы в Scilab.

Результаты расчетов представлены в таблице 2.

Анализ таблицы 2 позволяет установить следующие факты. Однозначной консенсусной альтернативой-победителем является альтернатива е. Поэтому в результате коллективной экспертизы для закупки был рекомендован ПЛК ICPDAS XPAC-8000/ LinPAC-8000/ WinPAC-8000.



**Результаты расчета результатов коллективного экспертного  
оценивания различными протоколами голосования**

Протокол голосования	Индивидуальные предпочтения	Протокол голосования	Индивидуальные предпочтения
1 Борда	eγ cγ dγ bγ a	7 Блэк	eγ cγ dγ aγ b
2 Кондорсе	eγ cγ dγ bγ a	8 Шульце	eγ cγ dγ bγ a
3 Симпсон	cγ eγ bγ dγ a	9 Нансон	eγ cγ dγ bγ a
4 Доджсон	eγ dγ cγ aγ b	10 Кумбе	eγ cγ dγ bγ a
5 Коупленд	eγ cγ dγ bγ a	11 Болдуин	eγ cγ dγ bγ a
6 Фишберн	eγ dγ cγ aγ b	12 Хэар	eγ cγ dγ bγ a
Медиана Кемени: eγ cγ dγ bγ a			

Как показывают результаты моделирования практически все протоколы голосования приводят к одинаковым итоговым ранжированиям, совпадающим с ранжированием по МК. Исключение составляют отдельные протоколы (Доджсона, Фишберна, Блэка), которые дают отличные от остальных результаты в области «замыкающих» альтернатив, имеющих минимальную ранговую оценку. При указанном числе альтернатив и экспертов все протоколы голосования работают в реальном времени с временем счета на программно-аппаратной платформе – CPU: Intel Core i5 2450M 2.5 ГГц; RAM: 6 ГБ DDR3 1300 МГц; ОС: Win7 не более 45-90 мс.

### Выводы

Проанализированы и систематизированы протоколы голосования как процедуры социального выбора для решения задач консенсусного агрегирования ранговых предпочтений. Моделирование 12-ти различных протоколов голосования для получения коллективной экспертной оценки показало, что все они дают близкие результаты консенсусной ранговой оценки. Моделирование проведено в процессе реальной экспертизы по выбору программируемого контроллера для автоматизации воздуходелительных установок.

Одним из дальнейших направлений исследования является сравнительный анализ систем голосования при большом числе альтернатив и агентов, в частности в задачах сетевой экспертизы. Перспективность применения методов голосования для задач агрегирования ранговых оценок позволило сформулировать как задачу дальнейших исследований разработку системы поддержки принятия решений реального времени на основе теории социального выбора.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Procaccia A.D. Computational Social Choice: The First Four Centuries/ A.D. Procaccia//The ACM Magazine for Students.–2011–Vol.18, No.2.– Pp.31-34
2. Borda, J. C. M'emoire sur les 'elections au scrutin [Electronic resource] // Histoire de l'Acad'emie Royale des Sciences. – Paris, 1781. – Mode of access: [http://gerardgreco.free.fr/IMG/pdf/MA\\_c\\_moire-Borda-1781.pdf](http://gerardgreco.free.fr/IMG/pdf/MA_c_moire-Borda-1781.pdf)
3. Condorcet, M. J. A. N. Essai sur L'Application de L'Analyse a la Probabilite des Decisions Rendues a la Pluralite des Voix [Electronic resource] // A Paris : de l'Imprimerie royale, 1785. – Mode of access: <http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1175327/>
4. H. Aziz H. Computational social choice: The first ten years and beyond / H. Aziz H., F. Brandt, E. Elkind, and P. Skowron// In: B. Steffen and G. Woeginger(eds.) Computer Science Today, volume 10000 of Lecture Notes in Computer Science (LNCS). – Springer-Verlag, 2017. – Pp.1-19.
5. Endriss U. (ed.) Trends in Computational Social Choice. – ILLC, University of Amsterdam, 2017 – 402 p.
6. Петровский А. Б. Теория принятия решений. / А. Б. Петровский. – М.: Академия, 2009. – 400 с.
7. Cha S.-H. Taxonomy and Nomenclature of Preferential Voting Methods / S.-H. Cha, Y. J. An // In: Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science. Vol.I. WCECS 2012 – San Francisco, 2012.–Pp.173-178.
8. Smith D.W. Descriptions of Single-winner Voting Systems.
9. Heckelman J.C. Handbook of Social Choice and Voting / J.C. Heckelman, N. R. Miller. – Edward Elgar Publishing, 2016. – 420 p.
10. Brandt F. Handbook of Computational Social Choice/F. Brandt ,V.Conitzer, U. Endriss, A.D. Procaccia.– N.-Y.:Cambridge University Press,2016.–535 p.
11. Shulze M. A New Monotonic, Clone-Independent, Reversal Symmetric, and Condorcet-Consistent Single-Winner Election Method/ M. Shulze// Social-Choice and Welfare.– 2011. – Vol. 26. – Pp. 267–303.
12. Луридас П.. Алгоритмы для начинающих. Теория и практика для разработчика / П. Луридас.– М.: Эксмо, 2018. – 608 с.
13. Compute the median ranking according to the Kemeny axiomatic approach [Electronic resource]: – Mode of access: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/52235-compute-the-median-ranking-according-to-the-kemeny-axiomatic-approach?focused=3889946&tab=function&requestedDomain=true>
14. R. LeGrand.Descriptions of ranked-ballot voting methods [Electronic resource] Mode of access <http://www.cs.wustl.edu/~legrand/rbvote/desc.html>