

В.В. Гнатушенко, О.В. Лукашевич

**ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДІВ РЕДУКЦІЇ  
ПРИ УПРАВЛІННІ СИСТЕМОЮ ПО ВИХОДУ**

*Анотація. Розглянуто питання ефективності використання методів редукції при управлінні системою по виходу. Виявлено, що методи синтезу управління по виходу із застосуванням процедур редукції дозволяють істотно скоротити витрати на процес синтезу, при цьому зберігаючи високу точність. Для скорочення порядку регулятора по виходу можна використовувати  $H_2$  і  $H_\infty$ -оптимізацію із застосуванням до вихідної системи скороченого регулятора, причому, невеликі порядки редукції при побудові регулятора показали більш високу точність.*

*Ключові слова: математична модель, система управління, редукція, оптимізація, управління по виходу.*

**Постановка проблеми**

Одним з найбільш потужних інструментів сучасної теорії управління при вирішенні завдань аналізу і синтезу систем управління об'єктами є методи теорії лінійних динамічних систем [1-4]. В останні десятиліття бурхливий розвиток цієї теорії, який супроводжувався загальною комп'ютеризацією, дозволив вирішити практично значущі завдання управління складними багатовимірними динамічними об'єктами. Методи вдосконалення якості та надійності функціонування керованих систем, в значній мірі, визначаються математичними методами і моделями які використовуються. Це особливо проявляється в промислових об'єктах, динамічна поведінка контрольованих параметрів яких, незважаючи на управління, носить нелінійний характер. Побудова моделей, адекватних динамічній поведінці, визначає проектування якісних і надійних систем автоматичного управління.

Злиття різних напрямків і методів аналізу систем управління дозволило досягти якісно нових результатів в цій області, визначити загальні межі допустимості, ефективності та доцільності їх застосування [5,6]. Однак можливості використання законів управління в

сучасній теорії лінійних систем обмежені тим, що систематичні методи аналізу і синтезу законів управління направлені в основному на чисельні алгоритми. Якісно новий рівень розвитку теорії лінійного управління динамічними системами може бути досягнутий на основі вирішення проблеми аналітичного матричного синтезу довільних законів управління з забезпеченням заданої сукупності властивостей.

### **Аналіз останніх досліджень**

Розвиток науки і техніки призводить до необхідності управління все більш ускладненими системами, в зв'язку з чим зростає роль надійного прогнозу їх подальшого руху. Необхідною умовою такого прогнозу є отримання математичної моделі, параметри якої відображають реальні фізичні, конструктивні, технологічні та інші фактори, що впливають на динаміку системи. Як правило, такі моделі мають досить високий порядок. До того ж сучасні технічні об'єкти функціонують в умовах мінливих впливів зовнішнього середовища, що призводить до погіршення характеристик систем автоматичного управління.

Серед існуючих підходів до вирішення завдання синтезу з урахуванням зовнішніх збурень найбільш значущими результатами є: динамічна компенсація збурень з імовірно відомою моделлю (Ш. Бхаттачарія, В. Волович, Е. Девісон, М. Уонем); лінійно-квадратична гаусівська (LQG) оптимізація при випадкових збуреннях з заданими характеристиками (Р. Бьюси, Р. Калман, Х. Квакуернаак, В.Б. Ларін, М. Уонем, Ю.П. Петров);  $L_1$ -оптимізація при найгірших збуреннях (А.Є. Барабанов, Е.Д. Якубович, Дж. Пірсон);  $H_2$ - та  $H_\infty$ -оптимізація для збурень з обмеженою  $L_2$ -нормою (енергією) (Дж. Зеймс, Б. Френсіс, Дж. Дойл, К. Гловер).

Завдання управління по виходу вирішуються з використанням методів  $H_2$ ,  $H_\infty$ -оптимізації. Однак застосування цих методів в просторі станів має подвоєний порядок по відношенню до порядку об'єкта. Аналіз таких систем вимагає великих витрат часу і процесорної пам'яті, що знижує ефективність дослідження системи. У зв'язку з цим зниження розмірності або порядку регулятора, при збереженні необхідної точності є важливим завданням для моделювання таких систем. Для реалізації цієї умови необхідно виявлення характеристик моделі, які надають певний вплив на поведінку. Таким чином є актуальним і затребуваним в сучасній аналітичній теорії управління ви-

рішення завдання синтезу систем управління з урахуванням діючих на них зовнішніх збурень.

### **Формулювання цілей статті (постановка завдання)**

Мета роботи полягає в дослідженні методів, які дозволяють синтезувати управління по виходу із застосуванням процедур редукції, що може істотно скоротити витрати на процес синтезу і розміри самих регуляторів.

### **Основна частина**

Редукція системи полягає в збереженні максимального числа параметрів, інваріантних для повної системи, і які її однозначно визначають, в системі нижчого порядку з заданою точністю апроксимації повної системи. Скорочена модель повинна відображати суттєві властивості повної моделі, а саме, повинні зберегтися суттєві властивості вхідного-вихідного уявлення. Теорія редукції вже достатньо вивчена, і одними з найбільш докладних джерел по методах редукції можна назвати [7] і [8].

Серед методів редукції математичних моделей можна виділити дві основні групи: проекційні методи редукції і непроекційні методи редукції.

Проекційні методи - це клас ітераційних методів редукції, в яких вирішується завдання проектування вихідної лінійної математичної моделі на заданий підпростір відносно вихідного простору. Кожен метод, який заснований на проекції, виходячи з деяких міркувань, формує матриці вхідного  $V$  та вихідного  $W$  підпростору.

В проекційних методах можна виділити три основні класи методів редукції:

1. Методи власного ортогонального розкладання.
2. Методи підпростору Кривола.
3. Методи, засновані на зрівноважуванні.

Найбільш часто використовуються проекційні методи редукції в підпросторі Кривола. Вони засновані на побудові матриць проекції, компоненти яких обчислюються за допомогою моментів передавальної функції на різних частотах, і проектуванні системи великих розмірів на систему малих розмірів. Рішення спроектований системи буде наближенням до рішення вихідної системи.

Аналітичні методи синтезу полягають в знаходженні передавальної функції автоматичного пристрою або алгоритму управління, або

при обраній структурі вказаного пристрою встановлюються значення його параметрів, що дають екстремум критерію якості. Іншими словами, аналітичні методи синтезу полягають в знаходженні виразу, який аналітично пов'язує властивості з параметрами коригуючого пристрою, і у визначенні значення параметрів, які відповідають екстремальним значенням функції. Дана група методів дозволяє відразу знайти оптимальне рішення, але часто приводить до складних обчислень. До таких методів синтезу систем управління по виходу відносять синтез  $H_2$  і  $H_\infty$  - оптимальних систем управління, які засновані на мінімізації  $H_2$  і  $H_\infty$  - норм передавальних функцій, що забезпечує мінімальний вплив збуджуючих впливів на контрольований вихід об'єктів управління.

Методи синтезу управління по виходу - методи, які використовують в якості вхідної змінної керуючого пристрою вихід  $y(t)$ , а не стан  $x(t)$ , тобто забезпечують зворотний зв'язок по виходу  $y(t)$ . Метод синтезу  $H_2$ -оптимального управління - метод, який спрямований на мінімізацію  $H_2$ -норми передавальної функції, що забезпечує мінімальний вплив збуджуючих впливів на контрольований вихід об'єктів управління [5]. Метод синтезу  $H_\infty$ -оптимального управління є аналогом метода синтезу  $H_2$ , але спрямований на мінімізацію  $H_\infty$ -норми передавальної функції.

#### Метод побудови $H_2$ - оптимальних систем

Математична модель об'єкта управління представлена моделлю в просторі станів і описується наступною системою рівнянь:

$$\begin{aligned}x(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \\z(t) &= C_1 x(t) + D_{12} u(t), \\y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t),\end{aligned}\tag{1}$$

де  $x(t)$  – вектор стану об'єкта,  $w(t)$  – вектор збуджуючих впливів (обмежений в  $L_2$ -нормі),  $u(t)$  – керуючий вплив, який формується регулятором, що синтезується (вихідний вектор регулятора),  $z(t)$  – вектор помилки контрольованих змінних,  $y(t)$  – вектор вимірюваних змінних, які використовуються для управління (вектор виходу, за яким замикається через регулятор зворотний зв'язок).

Структурна схема синтезованого об'єкта наведена на рисунку 1.

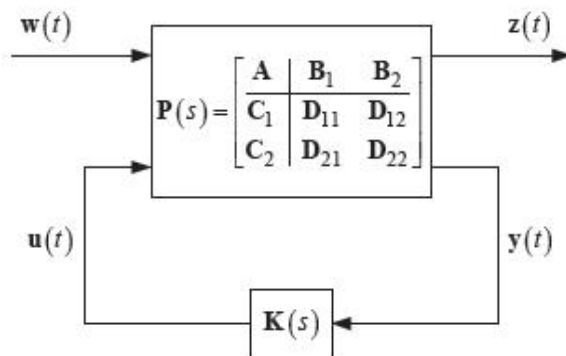


Рисунок 1 – Структурна схема системи, що синтезується

Завдання синтезу  $H_2$ -оптимального регулятора полягає в знаходженні такого регулятора  $K_2(S)$  для системи на рисунку 1, який стабілізує замкнуту систему і мінімізує оціночний функціонал:

$$J_2(K_2) = \|T_{w \rightarrow z}(P_2, K_2)\|^2 \quad (2)$$

де  $P(s)$  – передавальна функція об'єкта управління за умови  $D_{11}=0$  і  $D_{22}=0$ . Нульові значення діагональних блоків матриці  $D$  пов'язані з припущенням відсутності прямого зв'язку між векторами  $w$  і  $z$ . Відзначимо, що збурення враховуються в каналі вимірювань.

В роботі розглядається рішення задачі стабілізації лінійного безперервного стаціонарного об'єкта по виходу із застосуванням методів редукції. Математична модель об'єкта визначена наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ax(t) + Du(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $x(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  – вектори входів, станів і виходів, відповідно. Система має три входи і три виходи, вектор стану включає в себе 256 координат стану.

Етапу синтезу систем управління передують етап аналізу властивостей математичної моделі розглянутого об'єкта. Завдання синтезу протилежно завданню аналізу. Якщо при аналізі структура і параметри задані, а шукається поведінка системи в заданих умовах, то в цьому дослідженні завдання і мета міняються місцями. До числа основних властивостей об'єктів і систем, що підлягають аналізу, відносяться керованість, спостережність і стійкість.

Як відомо, методи в підпросторах Крілова ефективно працюють з сотнями змінних стану. При низькому порядку вихідної моделі

можемо спостерігати недостатньо ефективний результат. У роботі розглядається модель в просторі станів 256 порядку.

Ця система є стійкою. Якщо система нестійка, то алгоритм будь-якого з методів в підпросторі Крилова слід застосовувати тільки до стійкої частини системи. Досягається це поділом моделі на стійку і нестійку частини. Скорочення перетворення не зберігає оригінальні власні числа вихідної системи, і йде перетворення всієї системи, а не просте вилучення власних чисел. Для стійкої системи це не критично, оскільки вона стабілізується за деякий час, і власні числа скороченої системи в цілому поведуться аналогічно вихідним (з деякою погрішністю редукції). Для нестійкої системи, зміна її власного числа з позитивною дійсною частиною призведе до повної розбіжності процесів на будь-якому суттєвому проміжку часу. Тому нестійка частина системи не піддається редукції в підпросторах Крилова.

Важливою умовою для редукції є керованість і спостережність, оскільки некерована і неспостережна система скорочує свій порядок природним чином за допомогою приведення системи до мінімальної реалізації. Обрана система є керованою і спостережною.

Завдання синтезу  $H_2$  і  $H_\infty$ -оптимальних регуляторів була вирішена за допомогою методів, які реалізовані в пакеті Robust Control Toolbox [9] системи MATLAB. Застосування методів редукції до  $H_2$  і  $H_\infty$ -оптимальним регуляторам було реалізовано в пакеті Simulink системи MATLAB.

Обчислювальні експерименти, пов'язані з методами редукції, застосовані до моделі лінії електропередач [10].

#### **Висновки та перспективи подальших досліджень**

Побудована модель стабілізації об'єкта по виходу із застосуванням методів редукції, проведено її аналіз. Досліджено властивості розглянутої моделі лінійної стаціонарної системи і сформульовані критерії оцінки точності скороченої моделі. Під критеріями оцінки точності розуміється точність відтворення реакції системи на зовнішній поетапний вплив, збереження якості стійкості скороченої системи, точність відтворення частотних характеристик в заданій частотній області.

Методи  $H_2$  і  $H_\infty$ -оптимізації по виходу показали результати синтезу, які не суттєво відрізняються в похибках. Однак швидкість обчислення  $H_2$ -оптимального регулятора виявилася значно вище, ніж

при тех же входних данных для обчислення  $H_\infty$ -регулятора. Виявлено, що  $H_2$  і  $H_\infty$ -оптимальні регулятори вирішують проблему високочастотних коливань. Вони перетворюються в низькочастотні резонанси і поступово згасають, що дозволяє ефективно стабілізувати систему.

Таким чином, для скорочення порядку регулятора щодо виходу можна використовувати  $H_2$  і  $H_\infty$ -оптимізацію із застосуванням до вихідної системи скороченого регулятора. Причому, невеликі порядки редукції при побудові регулятора показали більш високу точність.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Васильев А.Ю., Козлов В.Н., Куприянов В.Е. Методы редукции динамических систем (с приложениями в энергетике) / под ред. В.Н. Козлова – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 109 с.

2. Козлов В.Н., Куприянов В.Е., Шашихин В.Н. Управление энергетическими системами. Часть 1: Теория автоматического управления: Учеб. Пособие / под ред. В.Н. Козлова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008.– 316 с.

3. Крылов, А.Н. О численном решении уравнения которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем. / А.Н.Крылов// ИАН, Отд. мат. и ест. наук. (7). – 1931. – с.491-539.

4. Куприянов В.Е., Васильев А.Ю. Грубые системы управления. Синтез систем управления по выходу. учеб. пособие / В.Е. Куприянов, А.Ю. Васильев. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 83 с.

5. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.3.- М.:ВНИТИ,1985.–407 с.

6. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление/ Б.Т.Поляк, П.С. Щербаков – М.: Наука, 2002, 273 с.

7. Grimm E. Krylov projection methods for model reduction / E. Grimm.– Ph.D. Thesis, Univ. of Illinois at UrbanaChampaign, 1997

8. Athanasios C Antoulas. Approximation of large-scale dynamical systems / Siam.– 2005. – 497p.

9. Robust Control Toolbox User's Guide. MathWork Matlab 7.0.1 Release 14

10. Benchmark Examples for Model Reduction . – [Электронный ресурс]. – Режим доступа:<http://slicot.org/20-site/126-benchmark-examples>