УДК 004.67

Є.А. Недашківський, І.В. Баклан

МОДЕЛЬ ЧАСОВОГО РЯДУ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ

Анотація. В статті розглянута моделювання фінансових часових рядів з високою ступенем нелінійної мінливості, що часто демонструють фрактальні властивості. Розглянутий алгоритм аналізу та прогнозування часових рядів з фрактальною структурою.

Ключові слова: часові ряди, фрактальна структура, прогнозування.

Постановка проблеми

Створення модифікованих моделей, що об'єднують у собі інтелектуальні та статистичні методи аналізу, та прогнозування фінансових часових рядів є актуальним завданням сьогодення в силу наявності виявлених недоліків існуючих методів у сфері сучасної економічної науки.

Інтеграція апарату нечіткої логіки та теорії детермінованого хаосу у межах лінгвістичного моделювання спонукають до розробки інноваційних підходів прогнозування фінансових часових рядів з фрактальною структурою.

Аналіз публікацій по темі дослідження

Фінансові часові ряди демонструють високу ступінь нелінійної мінливості, особливо на високих частотах, і часто демонструють фрактальні властивості. Коли фрактальна розмірність часового ряду дорівнює нулю, це пов'язано з двома характерними рисами:

- фрактальні процеси виявляють неоднорідність – високу ймовірність екстремальних або віддалених коливань, як правило, з нерегулярними інтервалами;

- фрактальні процеси також демонструють симетрію експонування – пропорційність співвідношень між коливаннями на різних відстанях поділу.

Ознаки фрактальності на фінансових ринках не передбачають хаотичності поведінки, що нагадує випадковість, породжену невеликим числом детермінованих рівнянь. Фрактальність у великомас-

 ISSN 1562-9945

штабних багатовимірних системах, таких як фінансові ринки, є стохастичною [1]. Цей тип фрактальності зазвичай виникає в результаті мультиплікативних взаємодій між двома або більше стохастичними процесами.

Більша частина сучасної літератури з нелінійної мінливості [2,3,4] на фінансових ринках була заснована на дифузії волатильності з безліччю випадкових факторів. Дифузори волатильності з мультиплікативним зв'язком між стохастичними чинниками, як правило, генерують фрактальність.

На великих відстанях поділу фінансові ряди можуть моделюватися з використанням структурних рівнянь, які, як правило, не є фрактальними. У цьому сенсі доцільно охарактеризувати економічні часові ряди як прояв фрактальних властивостей на коротких горизонтах, але з асимптотичною схожістю з рівновагою. У деяких випадках базові структурні рівняння також породжують фрактальність [5].

Найбільш ясним прикладом є обмінний курс, імовірно обумовлений диференціалами в реальні ставки дохідності. Нехай X_t – це обмінний курс, I_t– це процентна ставка, e – індекс очікування, ε_t – залишкова складова фінансового часового ряду, F – іноземна валюта. Структурне рівняння має вигляд:

$$X_t = \omega_0 + \omega_1 X_{t-1} + \omega_2[(I_t - \pi_1^e) - (I_{Fl} - \pi_{Ft}^e)] + \varepsilon_l$$

Як наголошується у [6], прийняття коефіцієнтів стохастичних процесів може призвести до нелінійної мінливості. На основі цього вираз $[(I_t - \pi_1^e) - (I_{Fl} - \pi_{Ft}^e)]$ передбачає фрактальну поведінку. Крім того, номінальні та реальні відсоткові ставки також можуть бути фрактальними, так що різниця в реальних ставках прибутковості сама по собі різниця двох незалежних фрактальних процесів..

Мета дослідження

Метою досліджень є дослідження моделей і алгоритмів для аналізу та прогнозування фінансових часових рядів з фрактальними властивостями.

Основна частина

В статті пропонується використання алгоритму прогнозування на основі двох методів:

- застосування моделі переходу станів для передбачення умовної ймовірності екстремальних подій;

- побудова моделі симетрії на коротких часових масштабах.

Методологія моделювання часового ряду базується на розкладанні тимчасового ряду на складові компоненти і моделюванні значень кожної компоненти окремо. У рамках даного дослідження пропонується застосування до кожного ряду агрегування, тобто розкладання ряду на короткі проміжки значення яких подібні за будь-якою ознакою. З точки зору математичної науки агрегування розглядається як перетворення вихідної моделі в модель з меншим числом змінних і обмежень, що дає наближений (в порівнянні з вихідним) опис досліджуваного процесу або об'єкта.

Головним фактором дослідження фрактальної структури фінансових часових рядів є знаходження фрактальних показників у рамках досліджуваного ряду. Так у роботі [7] доведено, що фрактальна розмірність близька до 1,5 (μ=0.5) є справедливою лише для 15-25% фінансових часових рядів, що є незадовільним показником, решту часу поведінка рядів істотно відрізняється від броунівського руху. На думку автора, даний факт пояснюється тим, що ділянки «не нормальної» (або «аномальної») поведінки мають коротку тривалість. У той же час для перевірки на нормальність відомими методами необхідні великі масиви даних (від кількох сотень до кількох тисяч точок). Всередині інтервалу, що використовується для перевірки на нормальність стандартними методами, виявиться велика кількість ділянок з різною поведінкою. При розрахунку тестових значень характеристики персистентних і антиперсистентних ділянок компенсуються і підсумкові значення виявляться близькими до нормальних.

На основі вищевикладеного припустимо, що N – кількість подій, L –характерна довжина, а D – фрактальна розмірність; зафіксуємо значення для фінансового часового ряду $D=1$.

Імовірнісна міра розмірності визначається за формулою: $\left[N(|Y_t - Y_{t-1}|) > {}^{L}\!/_{N}(|Y_t - Y_{t-1}|)\right]\!/_{L}$. Частка спостережень, що лежать за межами порога L щодо загальної вибірки, варіюється в залежності від:

$$\left[N(|Y_t - Y_{t-1}|) > {}^{L}\!/_{N}(|Y_t - Y_{t-1}|)\right] \approx L^d$$

де знаком позначається асимптотична рівність. У цьому сенсі розмірність – це міра ентропії або хаотичності.

Вимірювання змінюється в залежності від порогу, і тому часто вимірюється як асимптотична межа по мірі наближення порога до

 ISSN 1562-9945

нуля. Модифікацією даного методу виступає оцінка середньої неоднорідності процесу, за допомогою корозмірності C, результатом якої є різниця між розмірністю вкладення d та фрактальною розмірністю D:

$$C = D - d\,.$$

Якщо $C \neq 0$, то процес називається фрактальним.

При низьких ступенях фрактальності (близьких до нуля) процес більш однорідний: екстремальних коливань мало. І навпаки, для більш високих значень C, властиві більш екстремальні події або коливання за порогом. Процес стає менш однорідним, більш короткочасним, більш рідкісним і більш нестійким.

Відносини між корозмірністю і симетричним масштабування задаються наступними рівняннями в яких τ – це тимчасова шкала від 1 до T, де T-найбільший часовий масштаб; μ – індекс; q – ряд показників масштабування. Симетрія масштабування має вигляд:

$$\mu(|Y_t - Y_{t-1}|^q) \approx [\mu(|Y_t - Y_{t-1}|^q)]\left[(\tau/T)^{\zeta(q)}\right]$$

де ζ – функція, яка включає в себе три параметри:

$$\zeta(q) = qH - \left\{\left[C_1/(\alpha - 1)\right](q^\alpha - q)\right\}, \text{де} \alpha \neq 1$$

$$\zeta(q) = qH - (C_1 q \ln q), \text{де} \alpha = 1$$

Параметр C_1 – кодування, пов'язане з масштабуванням засобів вибірки. Коли $C_1 = 0$, $\zeta(q)$ є лінійним трендом. Коли $C_1 \neq 0$, кривизна осі $\zeta(q)$ залежить від корозмірності і розподілу ймовірностей. Коефіцієнт α характеризує розподіл ймовірності. Випадок $\alpha = 2$ відповідає розподілу Гауса, тоді як $\alpha = 1$ відповідає розподілу Коші. Більшість економічних процесів показують . У цьому випадку розподіл має більш важкі хвости, ніж стандартна норма, і дисперсія змінюється в часі. Цікавою властивістю рядів, як , так і $0 < C_1 < 1$, є те, що інтеграція зазвичай не призводить до згладжування. Замість цього інтеграл буде показувати дискретні стрибки.

Коефіцієнт H характеризує індекс фрактальності, тобто величину яка зменшується, коли затримка між двома однаковими парами значень в часі ряду збільшується. Позначення H насправді бере початок з експонента Херста, або відкликаного коефіцієнта діапазону [8]. Проте в цих рамках H оцінюється як один з низки коефіцієнтів масштабування. Ця статистика пов'язана з порядком інтеграції адитивної константи. Для процесу $I(0)$ $H = 0.5$. Для нестаціонарного процесу порядок інтеграції може бути відновлений шляхом оцінки темпів змін [9]. Цей метод надійний як для нелінійності, так і для дробових порядків інтеграції.

Ідея використання симетрії масштабування для прогнозування була спочатку запропонована у [10] для фізичних процесів, які демонструють сильні симетрії між великими і малими масштабами. Оскільки відносини пропорційності у фінансових часових рядах, як правило, обмежені короткими інтервалами, моделі тут використовують лише наближену симетрію. Для прогнозованої швидкості змін існує симетрія відносно останнього відставання:

$$(X_{t+1} - X_t) = \lambda_{1t}(X_{t+1} - X_{t-1})$$

де λ_{1t} – коефіцієнт пропорційності, числовий коефіцієнт позначає відстань поділу на ФНЗ, а t – коефіцієнт вказує на зміну часу. Аналогічним чином, для темпів змін:

$$(X_t - X_{t-1}) = \lambda_{2t}(X_t - X_{t-2})$$

рішення для λ_{2t}:

$$\lambda_{2t} = \left[{(X_t - X_{t-1})}/{(X_t - X_{t-2})}\right]$$

Одна з практичних проблем в реалізації полягає в тому, що знаменники коефіцієнтів можуть містити нульові значення. Для обчислення відсутніх значень можна використовувати будь-яку кількість процедур інтерполяції. У разі якщо співвідношення невизначене, дані експоненціально згладжуються, і співвідношення на основі згладжених даних замінюються. Модель прогнозування для загального процесу:

$$X_{t+1} = \omega_0 + \omega_1 X_t + \omega_2[(I_t - \pi_t^e) - (I_{Ft} - \pi_{Fl}^e)] + \omega_3\lambda_{2t} + \varepsilon_l$$

Як зазначалося вище, більшість структурних рівнянь в макроекономіці не передбачають довгострокової фрактальності. Це доводить необхідність використання структурного рівняння і побудови шкали коефіцієнтів для залишкової частини:

$$(\varepsilon_l - \varepsilon_{t-1}) = \gamma_{2t}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-2})$$

$$\gamma_{2t} = \left[{(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})}/{(\varepsilon_t - \varepsilon_{1-2})}\right]$$

де γ_{2t} – коефіцієнт пропорційності для залишку. Таким чином, модель прогнозування стає:

$$X_{t+1} = \omega_0 + \omega_1 X_t + \omega_2[(I_t - \pi_t^e) - (I_{Ft} - \pi_{Fl}^e)] + \omega_3\gamma_{2t} + v_t$$

де v_t – залишок від цієї регресії.

 ISSN 1562-9945

Основний недолік, пов'язаний з моделями, полягає в тому, що коефіцієнти шкали відомі тільки для поточного періоду. Крім того, в ході практичних випробувань коефіцієнти шкали часто були визнані занадто нестабільними для ефективного прогнозування. Розумним рішенням є коефіцієнт масштабування у дві компоненти, систематичний процес і залишок [11]. Нехай γ_{2St} позначає системну компоненту у γ_{2t}. Як правило, прогнозист не знає форми цієї компоненти, але може оцінити її за допомогою регресії по лагах [12]:

$$\gamma_{2St} = \omega_0 + \omega_1 \gamma_{2l-1} + \omega_2 \gamma_{2t-2} + v_t$$

Прогнозоване значення, γ_{2St+1}, потім включається в рівняння прогнозування. Отримуємо:

$$X_{t+1} = \omega_0 + \omega_1 X_t + \omega_2 [(I_t - \pi_t^e) - (I_{Ft} - \pi_{Fl}^e)] + \omega_3 \gamma_{2St+1} + v_t$$

Оцінка фрактальних параметрів заснована на масштабуванні логічних засобів абсолютних логічних різниць щодо збільшення відстаней поділу [13]. По суті, це зв'язок між симетрією масштабування і функцією $\zeta(q)$. Індекс фрактальності є локальною фрактальною характеристикою фінансового часового ряду. На основі описаних методів аналізу та прогнозування будується загальний спосіб аналізу який проектується на формування програмного додатку.

Рисунок 1 – Структурна схема реалізації загального способу аналізу та прогнозування фінансового часового ряду за допомогою лінгвістичного моделювання

У межах дослідження запропоновано спосіб аналізу та прогнозування фінансового часового ряду за допомогою лінгвістичного моделювання, який передбачає масштабування часового ряду та виділення співрозмірності.

Загальний спосіб аналізу та прогнозування фінансового часового ряду за допомогою лінгвістичного моделювання є можливість описати у кілька кроків, які виконуються у межах шести етапів, узагальнена схема виконання яких наведена на рис. 1.

Перший етап – Використання статистичних методів і візуалізація для попереднього аналізу фінансового часового ряду на предмет виявлення наявності або відсутності важких хвостів, трендів, циклічних або сезонних компонент і ін..

Другий етап – Агрегування фінансового часового ряду, з метою укрупнення економічних показників шляхом їх об'єднання в групу. Агреговані показники представляють узагальнені, синтетичні вимірники, які поєднують в одному загальному показнику.

Третій етап – Фрактальний аналіз фінансового часового ряду з метою встановлення в ньому таких характеристик і тенденцій, як трендостійкість або, навпаки, хаотичність, персистентність або антиперсистентність. Обчислювальна частина фрактального аналізу базується на визначенні співрозмірності. Оцінки, одержувані на виході цього етапу, мають числову природу.

Четвертий етап – Формування симетрії масштабування фінансового часового ряду. Виявлення симетрії повороту, зсуву і масштабування у числових послідовностях фінансових рядів, з метою отримання числових показників перетворень, а також оцінки ступеня порушення симетрії.

П’ятий етап – Формування прогнозу для розглянутих фінансових часових рядів шляхом реалізації обчислень на базі побудованого алгоритму.

Шостий етап – Оцінка похибки отриманого прогнозу для розглянутих фінансових часових рядів.

Розроблений алгоритм підлягає реалізації на базі програмного продукту, розробка якого передбачається у подальшому.

Висновки

Запропоновано модель фінансового часового ряду. За базову модель, яка підлягає аналізу та прогнозуванню обрано дані обмінного

 ISSN 1562-9945

курсу, як прояв фрактальних властивостей на коротких горизонтах, але з асимптотичною схожістю з рівновагою. Визначено спосіб аналізу та прогнозування фінансового часового ряду за допомогою лінгвістичного моделювання, який передбачає масштабування часового ряду та виділення співрозмірності. Агрегування фінансового часового ряду, здійснюється з метою укрупнення економічних показників шляхом їх об'єднання в групу. Формування симетрії масштабування фінансового часового ряду виробляється з метою отримання числових показників перетворень, а також оцінки ступеня порушення симетрії. Особливості запропонованого способу дозволяють аналізувати та прогнозувати фінансові часові ряди в умовах, коли існуючі методи, які використовують окремо апарат математичної статистики або інформаційних технологій, виявляються малоефективними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Светлов Кирилл Владимирович. Стохастические методы анализа рынка заимствований: диссертация ... кандидата экономических наук: 08.00.13 / Светлов Кирилл Владимирович;[Место защиты: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный университет"].- Санкт-Петербург, 2016.- 143 с.

2. Люу Ю. Методы и алгоритмы финансовой математики. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. — 751 с.

3. Бородин А. Н. Случайные процессы. — СПб.: Лань, 2012. — 640 с.

4. Gibson R., Lhabitant F., Talay D. Modeling the term structure of interest rates: A review of the literature // Foundations and Trends in Finance. — 2010. — Vol. 5, no. 1-2

5. Ярушкина, Н.Г. Интеллектуальный анализ временных рядов: Учебное пособие / Н.Г. Ярушкина, Т.В. Афанасьева, И.Г. Перфильева. – Ульяновск: УлГТУ, 2010 – 324 с

6. Mandelbrot B. 1997.Fractals and Scaling in Finance. Springer: New York.

7. Старченко, Н.В. Индекс фрактальности и локальный анализ хаотических временных рядов. [Текст]: дис. канд.. физ-мат. наук: 01.01.03: защищена 15.02.2006 / Старченко Николай Викторович

8. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы / Б. Мандельброт. – М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.

9. Atkins P.W., Beran J.A. General Chemistry, N.Y.: Scientific American Books, 1992, 922 p.

10.Schertzer D, Lovejoy S, Schmitt F, Chigirinskaya Y, Marsan D. 1997. Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency.Fractals 5:427–471

11.Лукашин Ю.П. О возможности краткосрочного прогнозирования курсов валют с помощью простейших статистических моделей / Ю.П. Лукашин // Вестник МГУ. - 1990. - Сер. 6. Экономика. - № 1.- С. 75-84.

12.Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: применение теории хаоса в инвестициях и экономике. – М.: Интернет-трейдинг, 2004], 98 Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. – М.: Мир, 2000.

13.Перцовский О.Е. Моделирование валютных рынков на основе процессов с длинной памятью / О.Е. Перцовский-М.: ГУ ВШЭ, 2004