УДК 004.92:519.6

О.І. Литвиненко

КОГНІТИВНО-ГРАФІЧНИЙ МЕТОД КОНСТРУЮВАННЯ БАЗИСІВ ТРИКВАДРАТИЧНИХ СЕРЕНДИПОВИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Анотація. Когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій дозволив отримати альтернативні базиси з параметром на триквадратичному скінченному елементі серендипової сім'ї без включення внутрішніх вузлів. За допомогою альтернативних базисів у роботі удосконалено відому інтерполяційну процедуру Тейлора і вперше отримано нові "змішані" просторові елементи, які ефективно використовують на границі областей з різними градієнтами вздовж координатних напрямків.

Ключові слова: скінченний элемент, когнітивно-графічний метод, інтерполяційний поліном, базисна функція, метод Тейлора.

Вступ. Апроксимація границь у методі скінченних елементів (МСЕ) є складною і актуальною задачею, яка ефективно розв'язується за допомогою криволінійних елементів. Автори [1] вважають, що ізопараметричні перетворення у купі з наближеним інтегруванням зробили "революцію" у методі скінченних елементів. В ізопараметричних перетвореннях метода скінченних елементів, як на площині, так і у просторі, в якості "породжуючих" елементів використовують стандартні лінійні, квадратичні і кубічні елементи. Як зазначено в статті [2], за допомогою тестових програм і розв'язання модельних задач встановлено, що квадратичні елементи більш ефективні (наприклад, при побудові матриць жорсткості і векторів сил) у порівнянні з лінійними і кубічними моделями. Справа у тому, що лінійні елементи є менш точними і дуже наближено описують криволінійні границі, тому потребують щільної скінченно-елементної сітки. В СЕ з кубічною інтерполяцією зростає точність, але і збільшуються обчислювальні витрати (наприклад, з'являється потреба в більшій кількості вузлів при чисельному інтегруванні). Також треба брати до уваги, що для апроксимації складових частин елементів конструкцій використовують велику кількість елементів, що значно збільшує розмір глобальної матриці жорсткості. Ці проблеми особливо загострюються при просторових розрахунках. Виникає потреба у конструюванні просторових СЕ з покращеними обчислювальними характеристиками та інтерполяційними якостями.

Аналіз попередніх публікацій. З літератури по МСЕ відомі наступні методи побудови базисів СЕ: матричний [3, 4, 5]; інтерполяційна процедура Тейлора [6]; ймовірнісно-геометричний [7]; геометричний [8]; комбінований алгебро-геометричний [9], когнітивно-графічний метод конструювання ієрархічних функцій форми [10, 11]. Когнітивно-графічний метод завдяки універсальності є ефективним як на площині, так і у просторі.

Мета статті – запропонувати нові моделі "змішаних" скінченних елементів з триквадратичною інтерполяцією за допомогою модифікованої процедури Тейлора.

Основна частина. Традиційна процедура систематичного генерування базису СЕ у просторі має два етапи [6]:

Побудова "проміжної" базисної функції за допомогою перемноження полінома Лагранжа відповідного степеня по одному із напрямів на лінійні поліноми Лагранжа по іншим напрямам.

Побудова "кутової" базисної функції за допомогою лінійної комбінації трилінійної базисної функції $\overline{N}(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$ та "проміжних" функцій.

Розглянемо триквадратичний скінченний елемент серендипової сім'ї (ССЕ-20) у природній системі координат $\xi O \eta$ (рис. 1). Скористаємося процедурою Тейлора для побудови базису ССЕ-20 [6]. При цьому поліном Лагранжа 2-го степеня вздовж одного напрямку перемножують з лінійними поліномами Лагранжа вздовж другого і третього напрямків. Для "проміжних" функцій:

$$N_9(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)(1-\zeta), \tag{1}$$

$$N_{12}(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4}\left(1-\eta^2\right)(1-\xi)(1-\zeta), \tag{2}$$

$$N_{13}(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4}\left(1-\zeta^2\right)(1-\xi)(1-\eta). \tag{3}$$

Для "кутової" функції, наприклад, $N_1(\xi,\eta,\zeta)$, скористаємося лінійною комбінацією відомої функції трилінійної інтерполяції

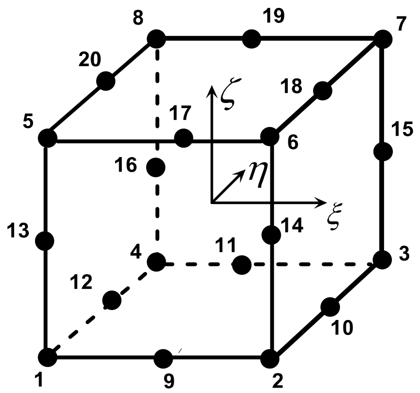
$$\overline{N}_1(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \tag{4}$$

і "проміжних" функцій (1) (3). Вибір вагових коефіцієнтів лінійної комбінації обумовлюється інтерполяційною гіпотезою. Таким чином,

$$N_1(\xi,\eta,\zeta)=\overline{N}_1-\frac{1}{2}(N_9+N_{12}+N_{13}). \tag{5}$$

Базисна функція для вузла 1:

$$N_1(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi-\eta-\zeta-2). \tag{6}$$



$$|\xi|\le 1,$$
$$|\eta|\le 1,$$
$$|\zeta|\le 1.$$

Рисунок 1 - Триквадратичний серендиповий скінченний елемент

Взагалі, для "кутових" вузлів:

$$N_i(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta-2),$$
$$\xi_i,\eta_i,\zeta_i=\pm1, \qquad i=\overline{1,\ 8}. \tag{7}$$

Для "проміжних" вузлів:

$$N_i(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta),$$
$$\eta_i,\zeta_i=\pm1, \qquad i=9,11,17,19. \tag{8}$$

Решта функцій утворюються із (8) шляхом циклічного переставлення ξ,η,ζ.

Елементи з різною кількістю вузлів на ребрах куба називають "змішаними" просторовими СЕ. "Змішані" елементи використовують на границі областей з різними градієнтами вздовж різних координатних напрямків. Автори [12, 13] пропонують будувати змішані елементи за допомогою процедури систематичного генерування базису просторового СЕ з триквадратичною інтерполяцією (метод Тейлора). Наведемо у таблиці 1 алгоритм, який запропонований в [12, 13]. Зауважимо, що ключова ідея побудови “змішаних” серендипових елементів методом Тейлора реалізується у таблиці однією фразою: “за умови, якщо і вузол відсутній”.

Таблиця 1

Функції форми просторового СЕ з числом вузлів від 8 до 20	
$N_1 = \overline{N}_1(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_9 + N_{12} + N_{13}),$	$N_2 = \overline{N}_2(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_9 + N_{10} + N_{14}),$
$N_3 = \overline{N}_3(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_{10} + N_{11} + N_{15}),$	$N_4 = \overline{N}_4(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_{11} + N_{12} + N_{16}),$
$N_5 = \overline{N}_5(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_{13} + N_{17} + N_{20}),$	$N_6 = \overline{N}_6(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_{14} + N_{17} + N_{18}),$
$N_7 = \overline{N}_7(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_{15} + N_{18} + N_{19}),$	$N_8 = \overline{N}_8(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_{16} + N_{19} + N_{20}),$
$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta),\quad i = 9;\,11;\,17;\,19$	
$N_i = \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi_i\xi)(1+\zeta_i\zeta),\quad i = 10;\,12;\,18;\,20$	
$N_i = \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta),\quad i = 13;\,14;\,15;\,16$	
$N_i = 0$ (якщо i-й вузол відсутній), $i = \overline{9;20}$	
$\overline{N}_i(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta),\qquad i = \overline{1,8}.$	

Модель (7)-(8) має неприродний розподіл вузлових навантажень з від’ємними значеннями в кутових вузлах. Нагадаємо, що для скінченного елемента вузлова доля рівномірної масової сили визначається як інтегральне середнє функції форми:

$$p_i = \iiint_{\omega} \gamma\, N_i(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\,,\quad \gamma = \frac{1}{8}. \qquad \textbf{(9)}$$

При використанні інтерполяційних поліномів (7)-(8) на ССЕ уникнути цих недоліків і отримати додатний розподіл рівномірної масової сили неможливо [3].

Поставимо за мету модифікувати інтерполяційну процедуру Тейлора за допомогою функцій форми когнітивно-графічного методу, які для триквадратичного елемента мають вигляд [11]:

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)\times(-2+\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta+$$
$$+K(\xi_i\eta_i\xi\eta+\xi_i\zeta_i\xi\zeta+\eta_i\zeta_i\eta\zeta-2\xi_i\xi-2\eta_i\eta-2\zeta_i\zeta+3)), \quad \textbf{(10)}$$
$$\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i = \pm 1,\quad i=\overline{1,8}.$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)\left(1-\frac{1}{2}K(2-\eta_i\eta-\zeta_i\zeta)\right),$$
$$\eta_i,\ \zeta_i = \pm 1,\quad i = 9,\ 11,\ 17,\ 19. \quad \textbf{(11)}$$

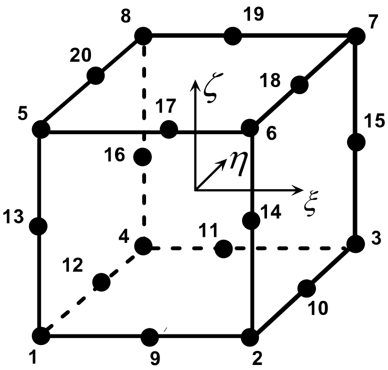
Використаємо у процедурі Тейлора функції форми когнітивно-графічного методу **(10)-(11).** Наявність керуючого параметра K дозволяє генерувати безліч нових елементів з нерегулярним розташуванням вузлів (табл. 2).

Таблиця 2

Функції форми просторового СЕ з числом вузлів від 8 до 20 (багатопараметричний інтерполяційний поліном з параметром К)	
$N_1 = \overline{N}_1(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_9+N_{12}+N_{13})$,	$N_2 = \overline{N}_2(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_9+N_{10}+N_{14})$,
$N_3 = \overline{N}_3(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_{10}+N_{11}+N_{15})$,	$N_4 = \overline{N}_4(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_{11}+N_{12}+N_{16})$,
$N_5 = \overline{N}_5(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_{13}+N_{17}+N_{20})$,	$N_6 = \overline{N}_6(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_{14}+N_{17}+N_{18})$,
$N_7 = \overline{N}_7(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_{15}+N_{18}+N_{19})$,	$N_8 = \overline{N}_8(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{2}(N_{16}+N_{19}+N_{20})$,
$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)\left(1-\frac{K}{2}(2-\eta_i\eta-\zeta_i\zeta)\right),\quad i=9;11;17;19$	
$N_i = \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi_i\xi)(1+\zeta_i\zeta)\left(1-\frac{K}{2}(2-\xi_i\xi-\zeta_i\zeta)\right),\quad i=10;12;18;20$	
$N_i = \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)\left(1-\frac{K}{2}(2-\xi_i\xi-\eta_i\eta)\right),\quad i=13;14;15;16$	
$N_i = 0$ (якщо i-й вузол відсутній) $i=\overline{9;20}$	
$\overline{N}_i(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta),\quad i=\overline{1,8}.$	

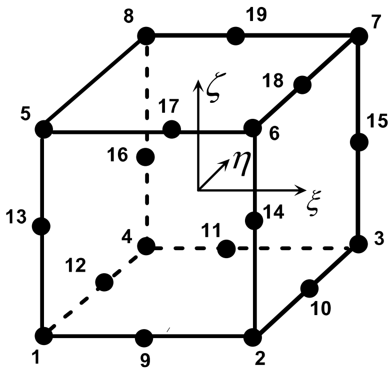
Можливі варіанти розташування вузлів СЕ показані на рис. 2-13.

 ISSN 1562-9945



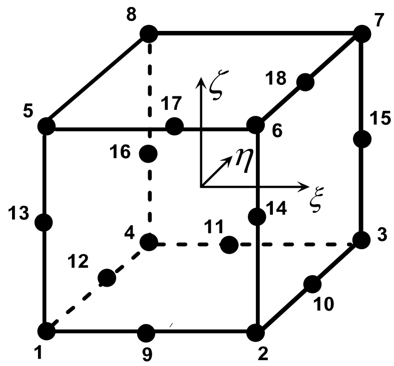
20 вузлів

Рисунок 2



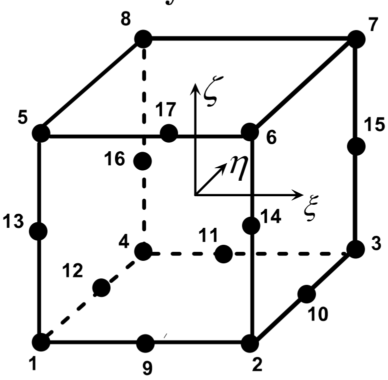
19 вузлів

Рисунок 3



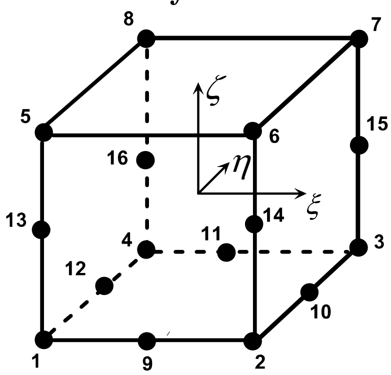
18 вузлів

Рисунок 4



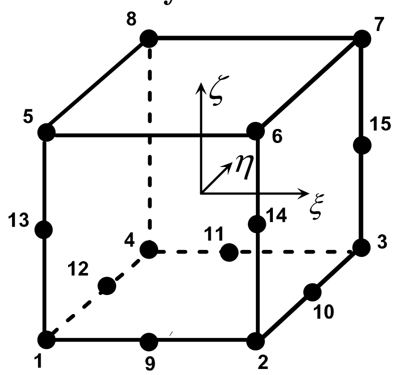
17 вузлів

Рисунок 5



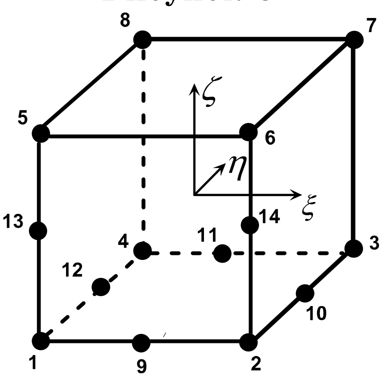
16 вузлів

Рисунок 6



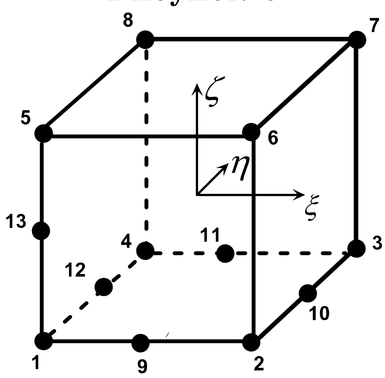
15 вузлів

Рисунок 7



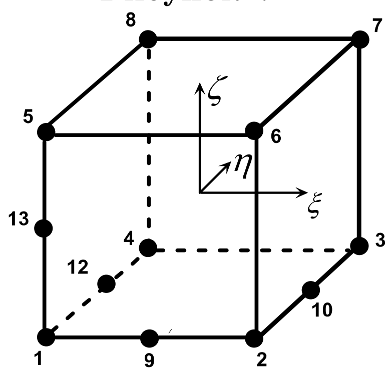
14 вузлів

Рисунок 8



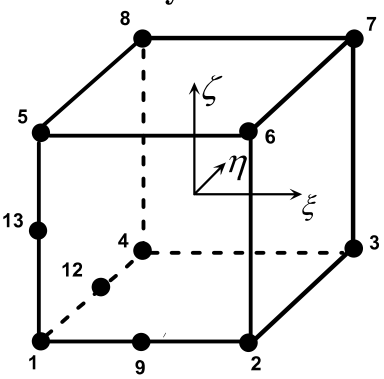
13 вузлів

Рисунок 9



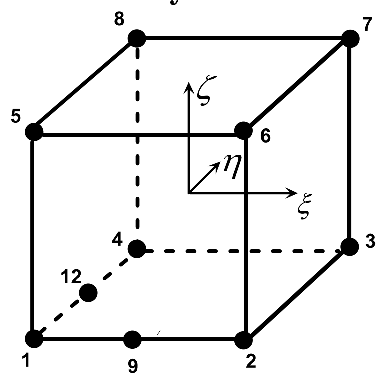
12 вузлів

Рисунок 10



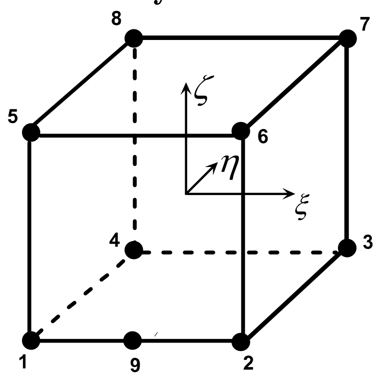
11 вузлів

Рисунок 11



10 вузлів

Рисунок 12



9 вузлів

Рисунок 13

У формулах (12) - (22) наведено функції форми “змішаного” просторового скінченного елемента з лінійно-квадратичною інтерполяцією, який зображено на рис. 11.

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-2-\xi-\eta-\zeta+2K(1+\xi+\eta+\zeta)+K(1+\xi\eta+\xi\zeta+\eta\zeta)),$$

$$N_2 = \frac{1}{16}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(2\xi+K(1-\xi)(2+\eta+\zeta)),$$

$$N_i(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta), \qquad i=3,6,7,8 \quad \xi_i,\eta_i,\zeta_i = \pm 1,$$

$$N_4 = \frac{1}{16}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(2\eta+K(1-\eta)(2+\xi+\zeta)),$$

$$N_5 = \frac{1}{16}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(2\zeta+K(1-\zeta)(2+\xi+\eta)),$$

$$N_9 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\left(1+\xi-\frac{K}{2}(1+\xi)(2+\eta+\zeta)\right),$$

$$N_{12} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\left(1+\eta-\frac{K}{2}(1+\eta)(2+\xi+\zeta)\right),$$

$$N_{13} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\left(1+\zeta-\frac{K}{2}(1+\zeta)(2+\xi+\eta)\right).$$

Аналогічна процедура побудови “змішаних” елементів на площині виконана у випадку базового біквадратичного серендипового скінченного елемента [14].

Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі запропоновані нові “змішані” просторові елементи, які отримані з триквадратичного скінченного елемента серендипової сім’ї за допомогою використання модифікованого методу Тейлора. Цікавим є поширення запропонованих процедур для конструювання функцій форми трикубічного просторового СЕ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ergatoudis I. Curved isoperimetric “quadrilateral” elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz // Internat. J. Solids Struct., —№ 4. —1968. — P. 31-42.

2. Akin J.E. Finite Elements Analysis with Error Estimators / J.E. Akin. — Elsevier, Butterworth -Heinemann, 2005. — 477 p.

3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 541 с.

4. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method /O.C. Zienkiewicz, R.L.Taylor. — V.1. — Butterworth-Heinemann, 2000. — 689 p.

5. Ocate E. Structural Analysis with the Finite Element Method, vol. 1 / E. Ocate. – Springer Netherlands, 2009. – 495 p.

6. Taylor R.L. On the completeness of shape functions for finite element analysis /R.L. Taylor // J. Num. Meth. Eng. -V.4. - № 1. - 1972. - P. 17-22.

7. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ / А.Н.Хомченко. — Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 5 с. — Деп. в ВИНИТИ 21.10.82, №5264.

8. Хомченко А.Н. Геометрия серендиповых аппроксимаций / А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, П.И. Гучек // Прикл. геом. и инж. графика. — К. : Будівельник, 1996. — Вып. 59. — С. 40-42.

9. Астионенко И.А. О серендиповых элементах с естественным спектром узловых нагрузок /И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Геом. та комп'ютерне моделювання. Зб. наук. пр. — Вип. 17. — Харків: ХДУХТ, 2007. — С. 97-102.

10. Хомченко А.Н. Новый подход к построению базисов серендиповых элементов /А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, И.А. Астионенко // Геом. та комп. моделювання. Зб. наук. праць. — Вип. 23. — Харків: ХДУХТ, 2009. — С.90-95.

11. Литвиненко Е.И. Когнитивно-графический метод конструирования иерархических базисов серендиповых пространственных элементов / Е.И. Литвиненко. — Materialy V mezinarodni vedecko – prakticka konference "Aplikovane vedecke novinky – 2009". – Dil. 5. Matematika. Praha: Education and Science, 2009. – P. 60-67.

12. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов./ К. Бате, Е. Вильсон. — М.: Стройиздат, 1982.— 448 с.

13. Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел. / Под. общей редакцией А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. — К.: Вища школа, 1982.— 480 с.

14. Astionenko I. Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element AIP Conference Proceedings report. / I.O. Astionenko, O.I. Litvinenko, N.V. Osipova, G.Ya.Tuluchenko, A.N. Khomchenko — 2016. — V. 1773. — I. 1. — P. 040002-1 – 040002-11. — DOI: 10.1063/1.4964965 .