

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РІШЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ТЕПЛООБМІНУ ПАРАБОЛОЇДА ОБЕРТАННЯ

*Анотація.* Вперше побудована узагальнена просторова математична модель розрахунку температурних полів в параболоїді обертання, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі  $OZ$ , з урахуванням кінцевої швидкості розповсюдження тепла у вигляді крайової задачі Діріхле для гіперболічного рівняння теплопровідності. В роботі побудовано інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле в параболоїді обертання у вигляді збіжних рядів по функціям Фур'є.

*Ключові слова:* комплексний ряд Фур'є, крайова задача Діріхле, інтегральне перетворення Лапласа, час релаксації.

**Постановка проблеми.** В даний час в різних областях промисловості значно розширилася сфера застосування електротехнологічних процесів. Одним з великомасштабних електротехнологічних процесів, що застосовуються в кольоровій металургії, є процес індукційного нагріву металу, призначений для термообробки металів під пластичну деформацію, загартування та інші операції.



Рисунок 1 – Індукційний нагрів заготовки в магнітному полі

Різка підвищення енергетичної ефективності забезпечує принципово нова енергозберігаюча технологія індукційного нагріву [1], що здійснюється

шляхом обертання заготовок в магнітному полі постійного струму, який створюється у збудниках з надпровідними обмотками (рис. 1).

В даний час недостатньо вивчені питання про розподіл температурних полів в заготовках при новому способу нагрівання, без знання яких неможливо здійснити його технічну реалізацію з високими техніко-економічними показниками. Температурні поля в заготовках можуть бути отримані і досліджені шляхом побудови адекватних математичних моделей процесу технології індукційного нагріву на базі сучасної методології чисельного моделювання.

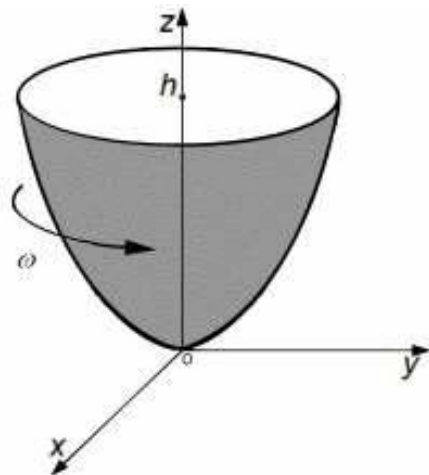
Аналіз останніх досліджень і публікацій. Відомі теоретичні дослідження інноваційної технології нагріву заготовок, які обертаються в магнітному полі постійного струму, пов'язані, в основному, з питаннями енергозбереження та явищем надпровідності [1]. При цьому невелике число наукових робіт присвячено дослідженням електромагнітних і теплових явищ всередині заготовки при її обертанні в магнітному полі постійного струму.

Тому вельми актуальною є задача розробки математичних методів моделювання температурних полів в заготовках при індукційному нагріву металу з використанням інноваційної технології, вирішення якої присвячена ця робота.

Мета дослідження. Метою статті є побудова нової узагальненої просторової математичної моделі розрахунку температурних полів в заготовках у вигляді параболоїда обертання, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності, а також знаходження рішень отриманої крайової задачі.

Постановка задачі. Розглянемо розрахунок температурного поля  $T(\rho, \varphi, z, t)$  параболоїда обертання (рис. 2) з твірною лінією  $r^2 = 2pz$  в циліндричній системі координат  $(r, \varphi, z)$ .

Параболоїд обертається навколо осі OZ з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , а швидкість поширення тепла є відомою величиною. Теплофізичні властивості параболоїда не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура параболоїда постійна  $G_0$ , а на бічній поверхні температура відома і не залежить від часу  $V(\varphi, z)$ . На основі параболоїда (при  $z=h$ ) відомі значення температури  $G(r, \varphi)$ .

Рисунок 2 –Параболоїд обертання з рівнянням твірною лінією  $r^2 = 2pz$ 

Викладення основного матеріалу дослідження. В [2] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно [2] узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається, з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, в циліндричній системі координат приймає вигляд:

$$\gamma c \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \tau_r \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial t} \right] \right\} = \lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right], \quad (1)$$

де  $\gamma$  – щільність середовища;  $c$ -питома теплоємність;  $T(\rho, \varphi, z, t)$ –температура середовища;  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності;  $t$  - час;  $\tau_r$  - час релаксації.

Математично задача визначення температурного поля циліндра складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (1) в області  $D = \{(\rho, \varphi, z, t) | \rho \in (0, 1), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, 1), t \in (0, \infty)\}$ , що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \tau_r \omega \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial t} = \frac{a}{R^2} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] \quad (2)$$

с початковими умовами

$$\theta(\rho, \varphi, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta(\rho, \varphi, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

і граничними умовами

$$\theta(\sqrt{z}, \varphi, z, t) = G(\varphi, z), \quad (4)$$

$$\theta(\rho, \varphi, 1, t) = \Lambda(\rho, \varphi), \quad (5)$$

де  $\theta = \frac{T(\rho, \varphi, z, t) - G_0}{T_{\max} - G_0}$  - відносна температура тіла;  $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$  - коефіцієнт

температуропровідності;  $T_{\max} = \max_{r, \varphi, z} \{V(\varphi, z), G(r, \varphi)\}$ ;  $\chi = \left(\frac{R}{h}\right)^2$ ;  $\rho = \frac{r}{R}$ ;  $z = \frac{z}{h}$ ;

$R = \sqrt{2ph}$ ;  $G(\varphi, z), \Lambda(\rho, \varphi) \in C(0, 2\pi)$ . Тоді рішення крайової задачі (2)-(5)  $\theta(\rho, \varphi, z, t)$  є двічі неперервно диференційованим по  $\rho, \varphi, z$ , один раз по  $t$  в області  $D$  і неперервним на  $\bar{D}$  [3], тобто  $\theta(\rho, \varphi, z, t) \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ , а функції  $\theta(\rho, \varphi, z, t)$ ,  $G(\varphi, z)$ ,  $\Lambda(\rho, \varphi)$  можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [3]:

$$\begin{cases} \theta(\rho, \varphi, z, t) \\ G(\varphi, z) \\ \Lambda(\rho, \varphi) \end{cases} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{cases} \theta_n(\rho, z, t) \\ G_n(z) \\ \Lambda_n(\rho) \end{cases} \cdot \exp(in\varphi), \quad (6)$$

$$\text{де } \begin{cases} \theta_n(\rho, z, t) \\ G_n(z) \\ \Lambda_n(\rho) \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{cases} \theta(\rho, \varphi, z, t) \\ G(\varphi, z) \\ \Lambda(\rho, \varphi) \end{cases} \cdot \exp(-in\varphi) d\varphi;$$

$$\theta_n(\rho, z, t) = \theta_n^{(1)}(\rho, z, t) + i\theta_n^{(2)}(\rho, z, t); \quad G_n(z) = G_n^{(1)}(z) + iG_n^{(2)}(z);$$

$$\Lambda_n(\rho) = \Lambda_n^{(1)}(\rho) + i\Lambda_n^{(2)}(\rho).$$

З огляду на те, що  $\theta(\rho, \varphi, z, t)$  функція дійсна, обмежимося надалі розглядом  $\theta_n(\rho, z, t)$  для  $n=0, 1, 2, \dots$ , тому що  $\theta_n(\rho, z, t)$  і  $\theta_{-n}(\rho, z, t)$  будуть комплексно спряженими [3]. Підставляючи значення функцій з (6) у (2)-(5) у результаті одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial t} + \mathcal{G}_n^{(i)} \theta_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r \mathcal{G}_n^{(i)} \frac{\partial \theta_n^{(m_i)}}{\partial t} = \frac{a}{R^2} \left[ \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \theta_n^{(i)} + \chi \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial z^2} \right] \quad (7)$$

с початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_n^{(i)}(\rho, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

і граничними умовами

$$\theta_n^{(i)}(z, z, t) = G_n^{(i)}(z) \quad (9)$$

$$\theta_n^{(i)}(\rho, 1, t) = \Lambda_n^{(i)}(\rho), \quad (10)$$

де  $\mathcal{G}_n^{(1)} = -\omega n$ ;  $\mathcal{G}_n^{(2)} = \omega n$ ;  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 1$ ;  $i=1, 2$ .

Для розв'язання крайової задачі (7)-(10) застосовуємо інтегральне перетворення:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \iint_D Q(\mu_{n,k}, \rho, z) \cdot \rho \cdot f(\rho, z) d\sigma \quad (11)$$

Власні функції  $Q(\mu_{n,k}, \rho, z)$  і власні значення  $\mu_{n,k}$  знаходяться із розв'язку задачі:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} Q + \mu_{n,k}^2 \cdot Q + \chi \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

$$Q(\mu_{n,k}, \rho, 1) = 0, \quad Q(\mu_{n,k}, \sqrt{z}, z) = 0. \quad (13)$$

Власні функції  $Q(\mu_{n,k}, \rho, z)$  і власні значення  $\mu_{n,k}$  в (12)- (13) знаходяться по формулам, які приведені в [4], а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q(\mu_{n,k}, \rho, z)}{\|Q(\mu_{n,k}, \rho, z)\|^2} \bar{f}(\mu_{n,k}) \quad (14)$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (7) інтегральне перетворення (11) в результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\bar{\theta}_n^{(i)}}{dt} + \mathcal{G}_n^{(i)} \left[ \bar{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{d\bar{\theta}_n^{(m_i)}}{dt} \right] + \tau_r \frac{d^2 \bar{\theta}_n^{(i)}}{dt^2} = \Omega_{n,k}^{(i)} - \mu_{n,k}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} \quad (15)$$

с початковими умовами

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, t) = 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, t)}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

де  $\Omega_{n,k}^{(i)} = - \int_0^1 \sqrt{z} \frac{\partial Q(\mu_n, \sqrt{z}, z)}{\partial \rho} G_n^{(i)}(z) dz - \chi \oint_L \rho \left( \theta_n^{(i)} \frac{\partial Q(\mu_{n,k}, \rho, z)}{\partial z} \right) d\rho$ .

Криволінійний інтеграл обчислюється по замкнутому додатно орієнтованому контуру (рис. 3).

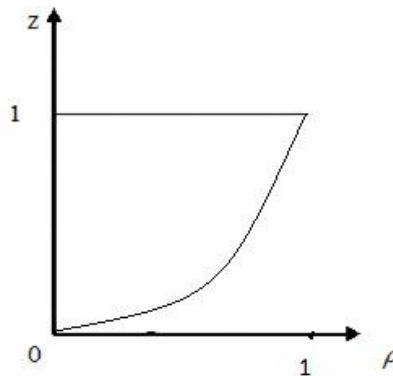


Рисунок 3 – Замкнутий контур з твірною лінією  $\rho^2 = z$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (15) с початковими умовами (16) інтегральне перетворення Лапласа[5]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

В результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно  $\tilde{\theta}_n^{(i)}$ :

$$s \tilde{\theta}_n^{(i)} + \mathcal{G}_n^{(i)}(\tilde{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r s \tilde{\theta}_n^{(m_i)}) + \tau_r s^2 \tilde{\theta}_n^{(i)} = q_{n,k} \left( \frac{\tilde{\Omega}_{n,k}^{(i)}}{\mu_{n,k}^2} - \tilde{\theta}_n^{(i)} \right) \quad (17)$$

де  $q_{n,k} = \frac{a}{R^2} \mu_{n,k}^2$ ;  $i=1,2$ .

Розв'язавши систему рівнянь (17) одержуємо:

$$\tilde{\theta}_n^{(i)} = \alpha_{n,k} \frac{\tilde{\Omega}_{n,k}^{(i)} (\tau_r s^2 + s + q_{n,k}) + (-1)^{i+1} \omega n \tilde{\Omega}_{n,k}^{(m_i)} (1 + s \tau_r)}{(\tau_r s^2 + s + q_{n,k})^2 + \omega^2 n^2 (1 + s \tau_r)^2}, \quad (18)$$

де  $\alpha_{n,k} = \frac{a}{R^2}$ ; ( $i = 1,2$ ).

Застосовуючи до зображення функцій (18) формули оберненого перетворення Лапласа одержуємо оригінали функцій:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t) &= \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n i] + \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1)i] \right\} \cdot \\ &\cdot (e^{s_j t} - 1) + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n i] + \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1)i] \right\} \cdot \\ &\cdot (e^{s_j t} - 1) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t) &= \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n i] - \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1)i] \right\} \cdot \\ &\cdot (e^{s_j t} - 1) + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n i] - \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1)i] \right\} \cdot \\ &\cdot (e^{s_j t} - 1), \end{aligned} \quad (20)$$

де  $\zeta_{n,k}(s_j) = \frac{0.5 s_j^{-1} \alpha_{n,k}}{(2\tau_r s_j + 1)^2 + (\tau_r \omega n)^2}$ ;  $i$ -уявна одиниця, а значення  $s_j$  для

$j=1,2,3,4$  визначаються за формулами:

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r \omega n i - 1) \pm \sqrt{(1 + \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r},$$

$$s_{3,4} = \frac{(\tau_r \omega n i + 1) \pm \sqrt{(1 - \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином з урахуванням формул обернених перетворень (6) і (14) одержуємо температурне поле в параболоїді обертання, який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t) + i \cdot \bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t) \right] \frac{Q(\mu_{n,k}, \rho, z)}{\|Q(\mu_{n,k}, \rho, z)\|^2} \right\} \cdot \exp(in\varphi)$$

де значення  $\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t)$  і  $\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t)$  визначаються по формулам (19), (20).

**Висновки.** Вперше побудована математична модель розрахунку полів температури в параболоїді обертання, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, який обертається, у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічних рівнянь теплопровідності з граничними умовами Діріхле. Побудоване інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле у вигляді збіжних рядів по функціям Фур'є. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну параболоїда обертання, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають при індукційного нагріву, що здійснюється шляхом обертання заготовок в магнітному полі постійного струму, який створюється у збудниках з надпровідними обмотками.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Заикина Н.В., Плешивцева Ю.Э. Моделирование и управление температурными полями в процессе индукционного нагрева заготовок, вращающихся в магнитном поле постоянного тока / Н.В. Заикина, Ю.Э. Плешивцева // Вестник Самарского государственного технического университета, серия «Технические науки», Самара – 2009 – № 3 (25) – С. 215-223.

2. Бердник М.Г. Аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається / М. Г. Бердник // Математичні машини і системи. – 2015. – № 4. – С.117-122.

3. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики / Маркович Б. М. - Львів: Видавництво Львівської політехніки. - 2010. - 384 с.

4. Berdnyk M. The mathematic model and method for solving the dirichlet heat-exchange problem for empty isotropic rotary body / M. Berdnyk // Non-Traditional

Technologies in the Mining Industry. Solid State Phenomena Vol. 277 – Trans Tech Publications, Switzerland– 2018 - pp 168-177.

5. Лопушанська Г.П. Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування /Г.П. Лопушанська, А.О., Лопушанський– М"яус, Львів.: ЛНУ ім. Івана Франка -2014-152 с.

#### REFERENCES

1. Zaikina N.V., Pleshivtseva Yu.E. Modelirovanie i upravlenie temperaturnyimi polyami v protsesse induktsionnogo nagreva zagotovok, vraschayu-schihsya v magnitnom pole postoyannogo toka / N.V. Zaikina, Yu.E. Pleshivtseva // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tehniceskogo universiteta, seriya «Tehnicieskie nauki», Samara –2009 – № 3 (25) –S. 215-223.

2. Berdnyk M.H. Analitychnyi rozviazok uzahalnoi kraiovoi zadachi teploobminu tsylindra, yakyi obertaietsia / M. H. Berdnyk // Matematychni mashyny i systemy. – 2015.– № 4.– S.117-122.

3. Markovych B. M. Rivniannia matematychnoi fizyky / Markovych B. M.- Lviv: Vydavnytstvo Lvivskoi politekhniky. - 2010. - 384 с.

4. Berdnyk M. The mathematic model and method for solving the dirichlet heat-exchange problem for empty isotropic rotary body / M. Berdnyk // Non-Traditional Technologies in the Mining Industry. Solid State Phenomena Vol. 277 – Trans Tech Publications, Switzerland– 2018 - pp 168-177.

5. Lopushanska H.P. Peretvorennia Fur"ie, Laplasa: uzahalnennia ta zastosuvannia /H.P. Lopushanska, A.O., Lopushanskyi– М"iaus, Lviv.: LNU im. Ivana Franka -2014-152 с.