УДК 519.254

О.Г. Байбуз, О.С. Хамхотько, А.Є. Полонська

МЕТОД ПОБУДОВИ ЗГОРТКИ РОЗПОДІЛІВ ВЕЙБУЛЛА

Анотація. Запропоновано метод апроксимації згортки n випадкових величин, розподілених за законами Вейбулла та сплайн-Вейбулла, згорткою сплайн-експоненційних розподілів. Розроблену технологію аналізу структурної надійності застосовано для оцінки надійності технічної системи. Результати імітаційного моделювання порівняно з результатами аналітичних апроксимацій на прикладі оцінки терміну активності складної технічної системи та зроблено висновок про доцільність використання запропонованих апроксимаційних методів.

Ключові слова. Згортка, розподіл Вейбулла, інтенсивність відмов, апроксимація.

Вступ. Питання аналізу та контролю надійності складних систем для експоненційного розподілу часу безвідмовної роботи ретельно досліджені на сучасному етапі розвитку високотехнологічних систем. У працях [1–2] досліджено основні моделі розподілів, розподіли та моменти числа відновлень, альтернуючі процеси відновлення, ймовірнісні моделі відмов та стратегії замін. Були розглянуті процеси відновлення, коли кількість елементів є достатньо велика (у математичній постановці ($n \to \infty$).

Існуючі методики оцінки на базі експоненційного розподілу не дають задовільних висновків про показники надійності, оскільки закони розподілу можуть бути відмінними від експоненційного. Дослідження довели, що при описі моделей відмов і дослідженні показників надійності найбільш вірогідні результати можуть бути досягнуті при використанні розподілу Вейбулла та сплайн-розподілів [3–4].

Постановка завдання. Знайти згортку n випадкових величин, розподілених за законами Вейбулла, та сплайн-Вейбулла шляхом проведення апроксимації розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом з подальшим знаходженням згортки сплайн-експоненційних розподілів.

Розроблену технологію аналізу структурної надійності застосувати для оцінки надійності технічної системи.

Результати дослідження. Щоб підвищити надійність складних систем використовують структурне резервування, тобто введення в структуру об'єкта додаткових елементів, які виконують функції основних елементів у випадку їх відмови.

Для приладів аерокосмічної техніки використовуються такі види резервування – "гаряче", "холодне", "мажоритарне", саме для них потрібно знаходити значення показників надійності.

Для оцінки показників надійності блока з "холодним" резервом потрібно знаходити згортку ς(τ) випадкових величин, розподілених за законом Вейбулла та сплайн-Вейбулла, при кінцевому *n*. При згортці часовий відрізок обчислюється як

$$\tau = \sum_{i=0}^{n} \tau_i, \ \tau_i > 0, \tag{1}$$

де ξ_i – часовий інтервал *i*-ї відмови.

Найвідоміше аналітичне наближення, запропоноване у [5], – знаходження згортки розподілів Вейбулла у вигляді ряду. Цей метод громіздкий і не може бути використаний у багатьох різновидах практичних задач.

У цій статті запропоновано знаходження аналітичної апроксимації згортки розподілів Вейбулла на базі згортки сплайн-експоненційних розподілів. Такий підхід базується на апроксимації функції інтенсивності розподілу Вейбулла кусково-сталими функціями інтенсивності сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом [4]:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda_1 \exp(-\lambda_1 t), 0 < t \le t_0 \\ \lambda_2 \exp[-(\lambda_1 - \lambda_2)t_0 - \lambda_2 t], t_0 < t < \infty \end{cases}. \tag{2}$$

Апроксимація неперервної функції інтенсивності переходів являє собою задачу найкращого наближення розподілу функції $\lambda(x)$ з вагою $p(x)$ ступінчастою функцією $c(x)$. На заданому розбитті $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots x_n \leqslant x_{n+1} = b$ $c(x) = c_i(x) = c_i$, при $x_{i-1} \leqslant x < x_{i-1}$.

 ISSN 1562-9945

Міра близькості $f(x)$ і $c(x)$ на $(a,$b) визначається як

$$\delta_a^b = \delta_a^b\left(|\lambda - c|\right) = \int_a^b p(x)\left|\lambda(x) - c(x)\right| dx \tag{3}$$

– за методом наближення в середньому,

$$\delta_a^b = \delta_a^b\left(\left[\lambda - c\right]^2\right) = \int_a^b p(x)\left[\lambda(x) - c(x)\right]^2 dx \tag{4}$$

– за методом середньоквадратичного наближення.

У результаті розв'язання задачі отримуються параметри λ_1, λ_2, t_0 сплайн-експоненційного розподілу, який має таку функцію розподілу [4]:

$$F(t) = F^{(1)}(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda_1 t), & 0 \le t \le T_0 \\ 1 - \exp(-(\lambda_1 - \lambda_2)t_0 - \lambda_2 t) & T_0 \le t < \infty \end{cases}. \tag{5}$$

Розв'язок задачі знаходження функції розподілу згортки сплайн-експоненційних розподілів може бути знайдений за допомогою характеристичних функцій.

Для функції розподілу характеристична функція $\varphi_n(s)$ має вигляд:

$$\phi_n(s) = \int_0^\infty \exp(-sz)dF_n(t). \tag{6}$$

Отже, для $F_1(t)$ характеристична функція:

$$\phi_1(s) = \int_0^\infty \exp(-sz)dF_1(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + s} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s}\right)\exp(-(\lambda_1 + s)T_0) \tag{7}$$

Шукана характеристична функція для функції розподілу згортки сплайн-експоненційних розподілів $F^{(n)}(t)$ матиме вигляд:

$$\phi^{(n)}(s) = \prod_{i=1}^{n} \phi_i(s). \tag{8}$$

Функція щільності розподілу часу появи n-ї відмови визначається такою формулою:

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(-tz)\phi^{(n)}(z)dz. \tag{9}$$

Якщо час між відмовами системи однаковий та розподілений за сплайн-експоненційним розподілом, то, зважаючи, що підінтегральна функція має в точках $s = -\lambda_1$, $s = -\lambda_2$ полюси n-го порядку,за допомогою теореми про лишки отримаємо такий вираз для функції щільності розподілу згортки:

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{s\to-\lambda_1}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[(s+\lambda_1)^n\varphi^{(n)}(s)\exp(st)\right]$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\lim_{s\to-\lambda_2}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[(s+\lambda_2)^n\varphi^{(n)}(s)\exp(st)\right]. \quad (10)$$

Характеристичну функцію, що знайдена за виразами (6–7), треба підставити в кожний доданок з (10), тоді $f^{(n)}(t)$ можна зобразити так:

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\lim_{s\to-\lambda_1}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[\left(\lambda_1+\left(\frac{\lambda_2(\lambda_1+s)}{\lambda_2+s}-\lambda_1\right)\exp(-(\lambda_1+s)T_0)\right)^n\exp(st)\right]+\right.$$
$$\left.+\lim_{s\to-\lambda_2}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[\left(\frac{\lambda_1((s+\lambda_2))}{\lambda_1+s}+\left(\lambda_2-\frac{\lambda_1((s+\lambda_2))}{\lambda_1+s}\right)\exp(-(\lambda_1+s)T_0)\right)^n\exp(st)\right]\right). \quad (11)$$

Для оцінки ефективності запропонованої технології було проведено порівняльний аналіз з результатами оцінки терміну активності системи управління авіакосмічного апарата.

Розрахункову ймовірність безвідмовної роботи на рік та λ-характеристики інтенсивності відмов апаратури, з припущенням, що відмови, розподілені за експоненційним законом, наведено в табл. 1.

При моделюванні відмов і визначенні параметрів надійності за допомогою комп'ютерних моделей необхідно синтезувати значення випадкових величин, розподілених за законами розподілу Вейбулла та сплайн-Вейбулла.

Нехай $F(x)$ – функція розподілу деякої випадкової величини ξ. Синтезувати цю випадкову величину – значить сформувати послідовність її значень ξ_i, яким властива: імовірність того, що значення ξ_i буде меншим деякого значення x, або $P(\xi_i < x) = F(x)$.

Застосуємо загальний точний метод "зворотної функції", який використовується для моделювання випадкових величин з необмеженими інтервалами зміни значень [6].

Для генерування вибірки даних сплайн-розподілу Вейбулла, який описується функцією розподілу:

ISSN 1562-9945

$$F(t, t_0)=\begin{cases} 1-\exp\left(-\dfrac{t^{\beta}{}_1}{\alpha}\right), 0<t<t_0 \\ 1-\exp\left(-\dfrac{t_0^{\beta_1}}{\alpha}\left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{\beta_2}\right), t\geq t_0, \end{cases} \quad (12)$$

моделювання даних відбувається за законом (13):

$$x_i=\begin{cases} (-\alpha\ln(1-\gamma_i))^{1/\beta_1}, 0<\gamma_i<P_1 \\ (-\alpha x_0^{\beta_2-\beta_1}\ln(1-\gamma_i))^{1/\beta_2}, \gamma_i>P_1 \end{cases}, \quad (13)$$

де $P_1=1-\exp\left(\dfrac{x_0^{\beta_1}}{\alpha}\right)$, α – *п*араметр масштабу розподілу.

Для моделювання згортки n випадкових величин, кожна з яких має функцію розподілу $F(x, \xi)$, скористаємося наведеним методом моделювання розподілу Вейбулла та отримаємо величини x_0, x_1, x_2,… x_n.. Згортка n випадкових величин розраховується за формулою $\tau = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$.

Щоб відновити параметри інтенсивності за розподілом Вейбулла або сплайн-Вейбулла проведемо імітаційне моделювання параметру інтенсивності кожного блоку за байєсівським методом. Результати відновлення параметрів α та β розподілу Вейбулла наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Параметри α та β розподілу Вейбулла для технічної системи

Бортова апаратура	ЙБР за 1 рік	λ*10^6 1/ч	α*10^-6 1/ч	β 1/ч
Побудовник місцевої вертикалі (ПМВ)	0,75	32,38	0,0308	1,014
Гіроскопічний вимірювач вектора кутової швидкості (ГІВКШ)	0,98	2,27	0,5469	1,013
Статичний перетворювач струму (СПС)	0,99	1,14	0,8784	0,998
БЦВМ	0,965	2,97	0,3775	1,036
Пристрій введення – виведення	0,982	2,045	0,3630	0,976
Блок підсилювача потужності (БПП)	0,99	1,14	0,8784	0,998
Рідинна реактивна система (РРС)	0,97	3,4	0,2561	0,987
Блок комутації (БК)	0,99	1,14	0,8784	0,998
Блок матричних реле (БМР)	0.99	1,14	0,8784	0,998
Службовий магнітометр (СМ)	0,935	7,38	0,1277	0,997
Електромеханічний виконавчий орган (ЕМВО)	0,994	0,68	1,2098	0,989

Таблиця 2

Імітаційне моделювання

Метод знаходження згортки	Активний час системи (10^6 годин)	Активний час системи (днів)
Імітаційне моделювання	0,0536	2233
Апроксимація шляхом розкладання в ряд	0,0578	2408
Апроксимація в середньому	0,058	2416
Апроксимація в середньо-квадратичному	0,0574	2391

Результати імітаційного моделювання надійності технічної системи наведено в табл. 2. Ґрунтуючись на результатах дослідження, можна зробити висновок про доцільність використання запропонованих апроксимаційних методів, оскільки відхилення між імітаційними на аналітичними методами оцінки становить близько 3–6 %.

Висновки. Запропоновано технологію апроксимації згортки n випадкових величин, розподілених за законами Вейбулла та сплайн-Вейбулла, згорткою сплайн-експоненційних розподілів. Запропонована технологія апроксимації згортки розподілів Вейбулла в класі сплайн-розподілів є зручною та універсальною, оскільки дозволяє побудову апроксимацій для будь-яких значень параметрів β. Проведено порівняльний аналіз результатів імітаційного моделювання з результатами аналітичних апроксимацій на прикладі оцінки терміну активності системи космічного апарата та зроблено висновок про доцільність використання запропонованих апроксимаційних методів з метою аналізу надійності складних систем.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В. Математические методы теории надежности. М.: Наука, 1965. 534 с.

2. Барлоу Р. Математическая теория надежности. М.: Советское радио, 1969. 488 с.

3. Horst Rinne. The Weibull Distribution: A Handbook / Chapman & Hall/CRC, 2008. 816 p.

4. Байбуз О. Г. Сплайны в надежности. Д., 2003. 256 с.

5. Jin Tongdan, Gonigunta Lakshmana S 'Exponential approximation to Weibull renewal with decreasing failure rate'. Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 00, No. 0, 2009. p. 1–13.

6. Лоу А. М. Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. СПб.: Питер, 2004. 848 с.: ил.

REFERENCES

1. Hnedenko B. V. Matematycheskye metodi teoryy nadezhnosty. M.: Nauka, 1965. 534 s.

2. Barlou R. Matematycheskaia teoryia nadezhnosty. M.: Sovetskoe radyo, 1969. 488 s.

3. Horst Rinne. The Weibull Distribution: A Handbook / Chapman & Hall/CRC, 2008. 816 p.

4. Baibuz O. H. Splaini v nadezhnosty. D., 2003. 256 s.

5. Jin Tongdan, Gonigunta Lakshmana S Exponential approximation to Weibull renewal with decreasing failure rate. Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 00, No. 0, 2009. p. 1–13.

6. Lou A. M. Ymytatsyonnoe modelyrovanye. Klassyka CS. 3-e yzd. SPb.: Pyter, 2004. 848 s.: yl.