DOI 10.34185/1562-9945-4-123-2019-14
УДК 519.25

А.П. Сарычев

КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ КОТОРОЙ ОПИСЫВАЕТСЯ ВЕКТОРНОЙ АВТОРЕГРЕССИЕЙ

Аннотация. В рамках статьи решена задача статистической классификации состояний динамической системы, которая может находиться в двух классах состояний, в каждом из которых её функционирование описывается своей системой авторегрессионных уравнений с априорно неизвестными параметрами. Предполагается, что выполнены следующие условия: а) два класса состояний описываются одинаковыми множествами наблюдаемых входных и выходных переменных; б) выходные переменные, как в первом, так и во втором классе определены разными множествами регрессоров (входных переменных); в) модели функционирования в первом и втором классах различны как по коэффициентам, так и по структуре авторегрессионных моделей; г) ковариационные матрицы случайных величин в моделях функционирования и моделях наблюдения для первого и второго классов различны. Построено правило классификации и исследованы его свойства.

Опыт успешного решения задач обнаружения изменения свойств динамических систем на основе регрессионных уравнений в работе, где предложен и обоснован подход к построению математических моделей контроля технического состояния силовых и энергетических установок в длительной эксплуатации, показывает целесообразность применения такого подхода при решении задач контроля функционирования объектов ракетно-космической техники.

Рассмотрена задача классификации состояний динамической системы, которая может находиться в двух классах состояний. Функционирование системы в классах описывается различными системами авторегрессионных уравнений. Построено правило классификации и исследованы его свойства.

Ключевые слова: клссификация, динамическая система, контроль, функционирование объектов, класс состояния.

Введение. Задача обнаружения изменения свойств динамических систем часто возникает в таких областях, как техническая и медицинская диагностика, контроль технологических процессов, мониторинг, обработка сигналов [1]. Распространённым классом моделей, описывающих функционирование стохастических динамических систем, является класс авторегрессионных моде-

© Сарычев А.П., 2019

лей. Примерами решения задач обнаружения для этого класса моделей могут служить работы [2]–[5]. Так, в [2] рассмотрена задача обнаружения перехода объекта из одного класса состояний в другой класс, в каждом из которых объект описывается своей одномерной авторегрессионной моделью с известными параметрами. В [3]–[4] подобные задачи рассмотрены для класса векторных авторегрессионных моделей с известными параметрами. В [5] задача обнаружения рассматривается для одномерной авторегрессионной модели совместно с задачей структурно-параметрической идентификации, т. е. поиском наилучшей структуры в заданном классе. Пример успешного решения задачи обнаружения на основе регрессионных уравнений содержится в работе [6], где предложен и обоснован поход к построению математических моделей контроля технического состояния силовых и энергетических установок в длительной эксплуатации, предусматривающий последовательные этапы формирования полиномиальных регрессионных моделей статики (установившихся режимов) и многомерных трендовых моделей эксплуатационной динамики для оценки изменений отклонений параметров объектов от установленных регрессионных, что позволяет выявить изменения технического состояния в жизненном цикле.

Основная задача данной работы – обнаружение изменения свойств динамической системы, которая может находиться в двух классах состояний, в каждом из которых её поведение описывается своей системой авторегрессионных уравнений (векторной авторегрессией) с априорно неизвестными параметрами. В [7] рассмотрена задача оценивания коэффициентов в системе авторегрессионных моделей в предположении, что ошибки наблюдения выходных переменных моделируемого объекта статистически зависимы, выходные переменные могут определяться, вообще говоря, разными множествами регрессоров, а ковариационная матрица ошибок наблюдений выходных переменных неизвестна. В этих условиях для определения коэффициентов построена итерационная схема оценивания, эффективность которой подтверждена методом статистических испытаний. Опираясь на эти результаты, можно сформулировать следующую задачу статистической классификации (распознавания): на основе обучающих выборок наблюдений двух классов состояний, каждый из которых характеризуется своей системой авторегрессионных моделей, требуется построить решающее правило, которое позволяет устанавливать принадлежность анализируемого наблюдения к одному из двух классов состояний.

1. Априорные предположения о динамической системе

Пусть функционирование динамического объекта в некотором классе состояний подчиняется закону в виде системы авторегрессионных уравнений[7]

$$\begin{pmatrix} \overset{*}{x}_1(k) \\ \overset{*}{x}_2(k) \\ \vdots \\ \overset{*}{x}_i(k) \\ \vdots \\ \overset{*}{x}_n(k) \end{pmatrix} = \sum_{q=1}^{h} \left[\begin{array}{c|c|c|c} \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-1}(q) & \cdots & \overset{*}{x}_{1-p}(q) \\ \hline \overset{*}{x}_1(q) & \overset{*}{x}_0(q) & \cdots & \overset{*}{x}_{2-p}(q) \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \overset{*}{x}_{i-1}(q) & \overset{*}{x}_{i-2}(q) & \cdots & \overset{*}{x}_{i-p}(q) \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \overset{*}{x}_{n-1}(q) & \overset{*}{x}_{n-2}(q) & \cdots & \overset{*}{x}_{n-p}(q) \end{array}\right] \begin{pmatrix} \overset{o}{\theta}_1(k,q) \\ \overset{o}{\theta}_2(k,q) \\ \vdots \\ \overset{o}{\theta}_p(k,q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_0(k) \\ \zeta_1(k) \\ \vdots \\ \zeta_{i-1}(k) \\ \vdots \\ \zeta_{n-1}(k) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

или

$$\overset{*}{\mathbf{x}}(k) = \sum_{q=1}^{h} \overset{*}{\mathbf{Z}}(p;q)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q) + \boldsymbol{\zeta}(-1;k), \quad k = 1,2,\ldots,h\,, \quad (2)$$

где $\overset{*}{\mathbf{x}}(k)$ – ненаблюдаемый $(n \times 1)$-вектор значений k-й выходной переменной объекта в дискретные моменты времени $t = t_i$, $i = 1,2,\ldots,n$; n – общее число наблюдений за объектом; p – число предыдущих значений выходных переменных, влияющих на их текущее значение; $\overset{*}{\mathbf{Z}}(p;q)$ – $(n{\times}p)$-матрица p предыдущих ненаблюдаемых значений q-й переменной, $q = 1,2,\ldots,h$, в обозначении этой матрицы p означает тот факт, что в (1)–(2) при формировании величины $\overset{*}{x}_i(k)$ участвуют величины $(x_{i-1}(q), x_{i-2}(q),\ldots, x_{i-p}(q))$; h – число выходных переменных, образующих множество X; $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)$ – $(p \times 1)$-вектор неизвестных детерминированных, не зависящих от времени коэффициентов; $\boldsymbol{\zeta}(-1;k)$ – ненаблюдаемый случайный $(n \times 1)$-вектор, в обозначении которого ”–1” означает тот факт, что в (1)–(2) при формировании величины $x_i(k)$ аддитивно участвует величина $\zeta_{i-1}(k)$.

В (1)–(2) предполагается, что в формировании текущего значения k-й выходной переменной участвуют все p предыдущих значений всех h выходных переменных. В общем случае не все переменные и не все их предыдущие значения могут участвовать в этом формировании. Для записи моделей в общем случае введем структурные матрицы, смысл которых покажем на примере. Пусть на текущее значение k-й выходной переменной влияют первое, второе и четвертое предыдущие значения q-й переменной из максимально заданного возможного числа влияющих предыдущих значений $p=5$. Тогда вместо матрицы $\overset{*}{\mathbf{Z}}(p;q)$ в (1)–(2) следует записать произведение матриц

$$\overset{*}{\mathbf{Z}}(p;q)\mathbf{S}(k,q)=$$

$$=\begin{bmatrix} \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-1}(q) & \overset{*}{x}_{-2}(q) & \overset{*}{x}_{-3}(q) & \overset{*}{x}_{-4}(q) \\ \overset{*}{x}_1(q) & \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-1}(q) & \overset{*}{x}_{-2}(q) & \overset{*}{x}_{-3}(q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{*}{x}_{i-1}(q) & \overset{*}{x}_{i-2}(q) & \overset{*}{x}_{i-3}(q) & \overset{*}{x}_{i-4}(q) & \overset{*}{x}_{i-5}(q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{*}{x}_{n-1}(q) & \overset{*}{x}_{n-2}(q) & \overset{*}{x}_{n-3}(q) & \overset{*}{x}_{n-4}(q) & \overset{*}{x}_{n-5}(q) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-1}(q) & \overset{*}{x}_{-3}(q) \\ \overset{*}{x}_1(q) & \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-2}(q) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{*}{x}_{i-1}(q) & \overset{*}{x}_{i-2}(q) & \overset{*}{x}_{i-4}(q) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{*}{x}_{n-1}(q) & \overset{*}{x}_{n-2}(q) & \overset{*}{x}_{n-4}(q) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где (5×3)-матрица $\mathbf{S}(k,q)$ представляет собой структурную матрицу, отражающую влияние первого, второго и четвертого предыдущих значений переменной с номером q на текущее значение переменной состояния с номером k. Априорная информация о значении p и о том, какие именно предыдущие значения каждой из переменных определяют текущие значения выходных переменных в законе функционирования объекта (1)–(2), представляется набором структурных матриц $\mathbf{S}(k,q)$, $k,q=1,2,\ldots,h$, которые могут быть различными для выходных переменных. Будем предполагать, что эти структурные матрицы заданы. С учетом введенных структурных матриц закон функционирования (2) для общего случая формирования выходных переменных запишем в виде

$$\overset{*}{\mathbf{x}}(k)=\sum_{q=1}^{h}\overset{*}{\mathbf{Z}}(p;q)\mathbf{S}(k,q)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)+\boldsymbol{\zeta}(-1;k)=\overset{=}{\mathbf{x}}(k)+\boldsymbol{\zeta}(-1;k),\quad k=1,2,\ldots,h, \tag{4}$$

где $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)$ – $(m(k,q)\times 1)$-вектор неизвестных детерминированных коэффициентов; $\overset{=}{\mathbf{x}}(k)$ – ненаблюдаемая составляющая $(n\times 1)$-вектора значений k-й переменной; $m(k,q)$ – число столбцов в матрице $\mathbf{S}(k,q)$; $m(k,1)+m(k,2)+\ldots+m(k,k)+\ldots+m(k,h)=m(k)$ – общее число неизвестных коэффициентов в модели для выходной переменной с номером k.

Пусть для наблюдений k-й выходной переменной объекта выполняется

$$x_i(k)=\overset{*}{x}_i(k)+\varepsilon_i(k),\quad i=1,2,\ldots,n,\quad k=1,2,\ldots,h, \tag{5}$$

где $x_i(k)$ – наблюдаемое значение k-й переменной в момент времени $t = t_i$, $\overset{*}{x}_i(k)$ – ненаблюдаемое значение; $\varepsilon_i(k)$ – ненаблюдаемая случайная величина.

Запишем с учетом (5) модель наблюдения объекта в векторной форме

$$\mathbf{x}(k) = \overset{*}{\mathbf{x}}(k) + \boldsymbol{\varepsilon}(k), \;\; k = 1,2,\ldots,h. \tag{6}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{X} = \left[\, \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \ldots, \mathbf{x}(h) \,\right], \tag{7}$$

$$\overset{=}{\mathbf{X}} = [\, \overset{=}{\mathbf{x}}(1), \overset{=}{\mathbf{x}}(2), \ldots, \overset{=}{\mathbf{x}}(h) \,], \quad \overset{*}{\mathbf{X}} = [\overset{*}{\mathbf{x}}(1), \overset{*}{\mathbf{x}}(2), \ldots, \overset{*}{\mathbf{x}}(h)], \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(-1) = \left[\, \boldsymbol{\zeta}(-1;1), \boldsymbol{\zeta}(-1;2), \ldots, \boldsymbol{\zeta}(-1;h) \,\right], \quad \mathbf{E} = \left[\, \boldsymbol{\varepsilon}(1), \boldsymbol{\varepsilon}(2), \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}(h) \,\right], \tag{9}$$

и, учитывая (6)–(9), модели функционирования и наблюдения запишем в виде

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \overset{=}{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\Gamma}(-1), \quad \mathbf{X} = \overset{*}{\mathbf{X}} + \mathbf{E}. \tag{10}$$

Пусть относительно $\boldsymbol{\zeta}(-1;k)$, $k = 1,2,\ldots,h$, выполнено:

$$E\{\boldsymbol{\zeta}(-1;k)\} = \mathbf{0}_n, \;\; E\{\boldsymbol{\zeta}(-1;k)\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(-1;k)\} = \sigma_\zeta(k,k)\,\mathbf{I}_n; \tag{11}$$

$$E\{\boldsymbol{\zeta}(-1;k)\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(-1;q)\} = \sigma_\zeta(k,q)\,\mathbf{I}_n, \;\; k,q = 1,2,\ldots,h; \;\; k \neq q; \tag{12}$$

$$E\{\zeta_{i_1}(-1;k)\zeta_{i_2}(-1;q)\} = 0, \;\; i_1, i_2 = 1,\ldots,n, \;\; i_1 \neq i_2, \;\; k,q = 1,2,\ldots,h, \tag{13}$$

где $E\{\cdot\}$ – знак математического ожидания по возможным всем реализациям случайных векторов $\boldsymbol{\zeta}(-1;k)$ и $\zeta(-1;q)$; $\mathbf{0}_n$ – $(n \times 1)$-вектор, состоящий из нулей; $\sigma_\zeta(k,k)$ – дисперсия величины $\zeta_i(-1;k)$, $i = 1,2,\ldots,n$, ограниченная величина; $\sigma_\zeta(k,q)$ – ковариация случайных величин $\zeta_i(-1;k)$ и $\zeta_i(-1;q)$, $i = 1,2,\ldots,n$, ограниченная величина; $\mathbf{I}_n$ – единичная $(n \times n)$-матрица.

Пусть относительно $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$, $k = 1,2,\ldots,h$, выполнено:

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(k)\} = \mathbf{0}_n, \;\; E\{\boldsymbol{\varepsilon}(k)\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(k)\} = \sigma_\varepsilon(k,k)\,\mathbf{I}_n, \;\; k = 1,2,\ldots,h; \tag{14}$$

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(k)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(q)\} = \sigma_\varepsilon(k,q)\,\mathbf{I}_n, \;\; k,q = 1,2,\ldots,h, \;\; k \neq q; \tag{15}$$

$$E\{\varepsilon_{i_1}(k)\varepsilon_{i_2}(q)\} = 0, \;\; i_1, i_2 = 1,2,\ldots,n, \;\; i_1 \neq i_2, \;\; k,q = 1,2,\ldots,h, \tag{16}$$

где $E\{\cdot\}$ – знак математического ожидания по возможным реализациям случайных векторов $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(q)$; $\sigma_\varepsilon(k,k)$ – дисперсия величины

$\varepsilon_i(k),\ i=1,2,\dots,n$, ограниченная величина; $\sigma_\varepsilon(k,q)$ – ковариация случайных величин $\varepsilon_i(k)$ и $\varepsilon_i(q)$.

Запишем предположения (11)–(13) и (14)–(16) в обобщенном виде:

$$E\{\mathbf{\Gamma}(-1)\}=\mathbf{O}_{(n\times h)},\quad E\{[\mathbf{\Gamma}(-1)]^{\mathrm{T}}\mathbf{\Gamma}(-1)\}=n\,\mathbf{\Sigma}_\zeta, \tag{17}$$

$$E\{\mathbf{E}\}=\mathbf{O}_{(n\times h)},\quad E\{\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\}=n\,\mathbf{\Sigma}_\varepsilon, \tag{18}$$

где $\mathbf{O}_{(n\times h)}$ – нулевая $(n\times h)$-матрица; $\mathbf{\Sigma}_\zeta$, $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon$ – заданные ковариационные $(h\times h)$-матрицы в моделях функционирования и наблюдения соответственно.

Будем также предполагать, что матрица в законе функционирования объекта $\mathbf{\Gamma}(-1)$ и матрица ошибок наблюдения $\mathbf{E}$ статистически независимы

$$E\{\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Gamma}(-1)\}=\mathbf{O}_{(h\times h)}. \tag{19}$$

Пусть в результате наблюдения в моменты времени $t=t_i$, $i=1-2p,2-2p,\dots,0,1,2,\dots,n$, получена $((n+2p)\times h)$-матрица значений выходных переменных объекта

$$\left[\begin{array}{cccc} x_{1-2p}(1) & x_{1-2p}(2) & \cdots & x_{1-2p}(h) \\ x_{2-2p}(1) & x_{2-2p}(2) & \cdots & x_{2-2p}(h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0(1) & x_0(2) & \cdots & x_0(h) \\ \hdashline x_1(1) & x_1(2) & \cdots & x_1(h) \\ x_2(1) & x_2(2) & \cdots & x_2(h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(1) & x_n(2) & \cdots & x_n(h) \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{X}(0)\\ \hdashline \mathbf{X}\end{array}\right]. \tag{20}$$

Пусть заданы: 1) p – число предыдущих значений выходных переменных, которые влияют на их текущее значение; 2) набор структурных матриц $\mathbf{S}(k,q),\ k,q=1,2,\dots,h$, которые определяют, какие именно предыдущие значения каждой из переменных определяют текущие значения выходных переменных объекта (1)–(19). Для оценивания неизвестных коэффициентов $\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)$, $k,q=1,2,\dots,h$ по результатам наблюдения объекта (20) в [7]–[8] разработаны итерационные процедуры параметрической идентификации, в которых $\mathbf{X}(0)$ используется в качестве начальных условий.

2. Оценивание коэффициентов в системах авторегрессионных уравнений

Для $(n\times 1)$-вектора $\mathbf{x}(k)$, согласно [7], выполняется

$$\mathbf{x}(k)=\sum_{q=1}^{h}\overset{=}{\mathbf{Z}}(p;q)\mathbf{S}(k,q)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)+\boldsymbol{\xi}(k),\quad k=1,2,\dots,h\,, \tag{21}$$

где $\overset{=}{\mathbf{Z}}(p;q)$ – $(n\times p)$-матрица ненаблюдаемых значений q-й переменной объекта, по своей структуре она аналогична матрице $\overset{*}{\mathbf{Z}}(p;q)$ в (1):

$$\overset{=}{\mathbf{Z}}(p;q)=\begin{bmatrix}\overset{=}{x}_0(q) & \overset{=}{x}_{-1}(q) & \cdots & \overset{=}{x}_{1-p}(q)\\ \overset{=}{x}_1(q) & \overset{=}{x}_0(q) & \cdots & \overset{=}{x}_{2-p}(q)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overset{=}{x}_{n-1}(q) & \overset{=}{x}_{n-2}(q) & \cdots & \overset{=}{x}_{n-p}(q)\end{bmatrix},\quad q=1,2,\dots,h\,; \tag{22}$$

$\boldsymbol{\xi}(k)$ – случайный $(n\times 1)$-вектор с нулевым математическим ожиданием

$$\boldsymbol{\xi}(k)=\boldsymbol{\varepsilon}(k)+\sum_{q=1}^{h}[\boldsymbol{\Gamma}(-2,Z;q)]\mathbf{S}(k,q)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)+\boldsymbol{\zeta}(-1;k)\,, \tag{23}$$

$$E\{\boldsymbol{\xi}(k)\}=\mathbf{0}_n,\quad k=1,2,\dots,h\,; \tag{24}$$

$\boldsymbol{\Gamma}(-2,Z;q)$ – $(n\times p)$-матрица ненаблюдаемых случайных величин

$$\boldsymbol{\Gamma}(-2,Z;q)=\begin{bmatrix}\zeta_{-1}(q) & \zeta_{-2}(q) & \cdots & \zeta_{-p}(q)\\ \zeta_0(q) & \zeta_{-1}(q) & \cdots & \zeta_{1-p}(q)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \zeta_{n-2}(q) & \zeta_{n-3}(q) & \cdots & \zeta_{n-1-p}(q)\end{bmatrix},\quad q=1,2,\dots,h\,. \tag{25}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{x}(k),\quad \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k)=(\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm{T}}(k,1),\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm{T}}(k,2),\dots,\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm{T}}(k,h))^{\mathrm{T}},\quad k=1,2,\dots,h\,; \tag{26}$$

$$\mathbf{R}(k)=[\overset{=}{\mathbf{Z}}(p;1)\mathbf{S}(k,1)\;\vdots\;\overset{=}{\mathbf{Z}}(p;2)\mathbf{S}(k,2)\;\vdots\;\dots\;\vdots\;\overset{=}{\mathbf{Z}}(p;k)\mathbf{S}(k,k)\;\vdots\;\dots\;\vdots\;\overset{=}{\mathbf{Z}}(p;h)\mathbf{S}(k,h)]\,, \tag{27}$$

где $\mathbf{R}(k)$ – матрица регрессоров для k-й выходной переменной.

Учитывая (26)–(27), запишем систему авторегрессионных моделей (21)

$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{R}(k)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k)+\boldsymbol{\xi}(k)=\overset{o}{\mathbf{y}}(k)+\boldsymbol{\xi}(k),\quad k=1,2,\dots,h\,. \tag{28}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}(1) \\ \hdashline \mathbf{y}(2) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \mathbf{y}(h) \end{pmatrix}, \quad \overset{o}{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \overset{o}{\mathbf{y}}(1) \\ \hdashline \overset{o}{\mathbf{y}}(2) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \overset{o}{\mathbf{y}}(h) \end{pmatrix}, \quad \overset{o}{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(1) \\ \hdashline \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(2) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(h) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(1) \\ \hdashline \boldsymbol{\xi}(2) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{\xi}(h) \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{R}(1) & \mathbf{O}_{(n\times m(2))} & \cdots & \mathbf{O}_{(n\times m(h))} \\ \hdashline \mathbf{O}_{(n\times m(1))} & \mathbf{R}(2) & \cdots & \mathbf{O}_{(n\times m(h))} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \mathbf{O}_{(n\times m(1))} & \mathbf{O}_{(n\times m(2))} & \cdots & \mathbf{R}(h) \end{array} \right], \tag{30}$$

где $\mathbf{y}$ – объединённый $(N\times 1)$-вектор наблюдаемых зашумленных значений; $\overset{o}{\mathbf{y}}$ – $(N\times 1)$-вектор ненаблюдаемых значений; $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}$ – $(M\times 1)$-вектор неизвестных коэффициентов; $\boldsymbol{\xi}$ – $(N\times 1)$-вектор ненаблюдаемых случайных аддитивных составляющих; $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ – объединённая $(N\times M)$-матрица регрессоров; $N = n\,h$; $M = m(1) + m(2) + \ldots + m(h)$.

Запишем систему h авторегрессионных уравнений (28) учетом (29)–(30)

$$\mathbf{y} = \overset{o}{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\xi} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}\,\overset{o}{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\xi}. \tag{31}$$

Для оценки коэффициентов $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}$ выполняется [7]:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{C}\ \mathbf{y}, \quad \hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{d}}(1) \\ \hdashline \hat{\mathbf{d}}(2) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \hat{\mathbf{d}}(h) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{d}}(k) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{d}}(k,1) \\ \hdashline \hat{\mathbf{d}}(k,2) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \hat{\mathbf{d}}(k,h) \end{pmatrix}, \ k = 1,2,\ldots,h, \tag{32}$$

где для $(M\times N)$-матрицы $\mathbf{C}$, состоящей из $(h\times h)$ блоков, выполнено

$$\mathbf{C} = (\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}, \tag{33}$$

где $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}$ – ковариационная $(N\times N)$-матрица объединённого $(N\times 1)$-вектора ненаблюдаемых аддитивных случайных составляющих $\boldsymbol{\xi}$ в (29).

Для матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}$, состоящей из $(h\times h)$ блоков, выполняется

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\xi} = \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon} \otimes \mathbf{I}_n + \boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\Sigma}_{\zeta} \otimes \mathbf{I}_n, \tag{34}$$

ISSN 1562-9945

где $\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_n$ – кронекеровское произведение матриц $\mathbf{\Sigma}$ и $\mathbf{I}_n$; $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon$, $\mathbf{\Sigma}_\zeta$ – ковариационные $(h \times h)$-матрицы в моделях наблюдения и функционирования, введённые в (17)–(18).

В (34) $(N \times N)$-матрица $\mathbf{\Psi}$ состоит из $(h \times h)$ блоков, а её (k,q)-й блок ($k,q=1,2,...,h$) представляет собой $(n \times n)$-матрицу:

$$\mathbf{\Psi}(k,q) =$$

$$= \begin{bmatrix} \psi_{kq}(0) & \psi_{kq}(+1) & \cdots & \psi_{kq}(p-1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \psi_{kq}(-1) & \psi_{kq}(0) & \cdots & \psi_{kq}(p-2) & \psi_{kq}(p-1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \psi_{kq}(1-p) & \psi_{kq}(2-p) & \cdots & \psi_{kq}(0) & \psi_{kq}(+1) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{kq}(1-p) & \cdots & \psi_{kq}(-1) & \psi_{kq}(0) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \psi_{kq}(0) & \psi_{kq}(+1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \psi_{kq}(-1) & \psi_{kq}(0) \end{bmatrix}. \quad (35)$$

В (35) для $\psi_{kq}(\Delta)$, $\Delta = -p+1, -p+2, \ldots, p-2, p-1$, выполняется

$$\psi_{kq}(\Delta) = \mathrm{Cov}\{\xi_{i_1}(k)\xi_{i_2}(q)\} =$$

$$= \sum_{q_1=1}^{h} \sum_{q_2=1}^{h} \sigma_\zeta(q_1,q_2)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm{T}}(k,q_1)\mathbf{S}^{\mathrm{T}}(k,q_1)\mathbf{I}(i_1-i_2)\mathbf{S}(q,q_2)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(q,q_2), \quad (36)$$

где $\mathbf{I}_p(i_1-i_2)$ – $(p \times p)$-матрица, у которой все элементы равны нулю, кроме элементов одной диагонали, равных единице: если $\Delta = i_1 - i_2 = 0$, то это главная диагональ; если $\Delta > 0$, то это диагональ, расположенная выше главной диагонали на Δ строк; если $\Delta < 0$, то это диагональ, расположенная ниже главной диагонали на $|\Delta|$ строк.

Таким образом, (k,q)-й блок $\mathbf{\Sigma}_\xi$ представляет собой $(n \times n)$-матрицу

$$\mathbf{\Sigma}_\xi(k,q) = \sigma_\varepsilon(k,q)\mathbf{I}_n + \mathbf{\Psi}(k,q) + \sigma_\zeta(k,q)\mathbf{I}_n, \quad k,q=1,2,...,h. \quad (37)$$

С учетом (33)–(37) для оценки коэффициентов выполняется

$$\hat{\mathbf{d}} = (\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}\,\mathbf{y}. \quad (38)$$

В формулу (33) для матрицы $\mathbf{C}$ входит ненаблюдаемая матрица $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$, а в формулу (34) для матрицы $\mathbf{\Sigma}_\xi$ – матрица $\mathbf{\Psi}$, элементы которой, как следует из (35)–(36), зависят от неизвестных коэффициентов $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}$. Эти обстоятельства использованы для построения итерационных процедур вычисления неизвестных коэффициентов в виде (32)–(38): в [7] разработана итерационная процедура для случая, когда ковариационные матрицы $\mathbf{\Sigma}_\zeta$, $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon$ априорно известны, а в [8] – неизвестны. Процедуры исследованы методом статистических испытаний.

Учитывая (29) и (32), оценку (38) запишем в виде

$$\hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{d}}(1) \\ \hdashline \hat{\mathbf{d}}(2) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \hat{\mathbf{d}}(h) \end{pmatrix} = \mathbf{C}\,\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1\bullet} \\ \hdashline \mathbf{C}_{2\bullet} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \mathbf{C}_{h\bullet} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}(1) \\ \hdashline \mathbf{y}(2) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \mathbf{y}(h) \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \hat{\mathbf{d}}(k) = \mathbf{C}_{k\bullet} \begin{pmatrix} \mathbf{y}(1) \\ \hdashline \mathbf{y}(2) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \mathbf{y}(h) \end{pmatrix}, \qquad (39)$$

где

$$\mathbf{C}_{k\bullet} = [\mathbf{C}_{k1} \mid \mathbf{C}_{k2} \mid \cdots \mid \mathbf{C}_{kh}] \qquad (40)$$

является k-й строкой блоков матрицы $\mathbf{C}$, состоящей из $(h \times h)$ блоков.

Для оценки $\hat{\mathbf{d}}(k)$ с учетом (28) и (38) выполняется

$$\hat{\mathbf{d}}(k) = \sum_{q=1}^{h} \sum_{l=1}^{h} [(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}]_{kl} [\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}]_{lq} \mathbf{R}(q) \mathring{\boldsymbol{\theta}}(q) + \sum_{q=1}^{h} \mathbf{C}_{kq}\, \boldsymbol{\xi}(q) =$$

$$= \sum_{q=1 (q \neq k)}^{h} \sum_{l=1}^{h} [(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}]_{kl} [\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}]_{lq} \mathring{\boldsymbol{\theta}}(q) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{h} [(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}]_{kl} [\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}]_{lk} \mathring{\boldsymbol{\theta}}(k) + \sum_{q=1}^{h} \mathbf{C}_{kq}\, \boldsymbol{\xi}(q) = \mathring{\boldsymbol{\theta}}(k) + \sum_{q=1}^{h} \mathbf{C}_{kq}\, \boldsymbol{\xi}(q).$$

$$(41)$$

Для авторегрессионных моделей с учётом (41) выполняется

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{R}(k) \hat{\mathbf{d}}(k) = \mathbf{R}(k) \mathring{\boldsymbol{\theta}}(k) + \mathbf{R}(k) \sum_{q=1}^{h} \mathbf{C}_{kq}\, \boldsymbol{\xi}(q) = \mathring{\mathbf{y}}(k) + \mathbf{R}(k) \sum_{q=1}^{h} \mathbf{C}_{kq}\, \boldsymbol{\xi}(q),$$

$$(42)$$

где $\hat{\mathbf{y}}(k)$ – $(n \times 1)$-вектор выхода модели для k-й переменной, $k = 1, 2, \dots, h$.

Учитывая (42), для авторегрессионных моделей можно записать

$$\mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{y}}(k) + \mathbf{u}(k) = \mathbf{R}(k) \hat{\mathbf{d}}(k) + \mathbf{u}(k), \quad k = 1, 2, \dots, h, \qquad (43)$$

где $\mathbf{u}(k)$ – $(n \times 1)$-вектор остатков [9], для которого выполняется

$$\mathbf{u}(k) = \boldsymbol{\xi}(k) - \mathbf{R}(k) \sum_{q=1}^{h} \mathbf{C}_{kq}\, \boldsymbol{\xi}(q), \quad E\{\mathbf{u}(k)\} = \mathbf{0}_n, \qquad (44)$$

где $\mathbf{0}_n$ – нулевой $(n \times 1)$-вектор.

Введем матрицу остатков моделей

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}(1),\, \mathbf{u}(2), \ldots,\, \mathbf{u}(h)] \qquad (45)$$

и матрицу $\mathbf{W}$, в которой (k,q)-элемент вычисляется по столбцам с номерами k и q матрицы $\mathbf{U}$ (45):

$$[\mathbf{W}]_{k,q} = [\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}]_{k,q} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(k)\,\mathbf{u}(q). \qquad (46)$$

Для (k,q)-элемента математического ожидания матрицы выполняется:

$$\mathbf{\Omega}_{kq} = E\,\{[\mathbf{W}]_{k,q}\} = E\,\{[\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\xi}(q)]\} -$$

$$- E\{[\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(k)(\mathbf{R}(q)\sum_{s=1}^{h}\mathbf{C}_{qs}\,\boldsymbol{\xi}(s))]\} - E\{[(\mathbf{R}(k)\sum_{r=1}^{h}\mathbf{C}_{kr}\,\boldsymbol{\xi}(r))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}(q)]\} +$$

$$+ E\{[(\mathbf{R}(k)\sum_{r=1}^{h}\mathbf{C}_{kr}\,\boldsymbol{\xi}(r))^{\mathrm{T}}(\mathbf{R}(q)\sum_{s=1}^{h}\mathbf{C}_{qs}\,\boldsymbol{\xi}(s))]\} =$$

$$= n\cdot(\sigma_{\varepsilon}(k,q) + \psi_{kq}(0) + \sigma_{\zeta}(k,q)) - \mathrm{tr}\,[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\,]_{kq}. \qquad (47)$$

Введя обозначения

$$\mathbf{P} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}, \qquad (48)$$

$$\mathbf{\Sigma}_{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_{11}(0) & \psi_{12}(0) & \cdots & \psi_{1h}(0) \\ \psi_{21}(0) & \psi_{22}(0) & \cdots & \psi_{2h}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{h1}(0) & \psi_{h2}(0) & \cdots & \psi_{hh}(0) \end{bmatrix}, \qquad (49)$$

$$\mathbf{T}_{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{tr}[\mathbf{P}_{11}] & \mathrm{tr}[\mathbf{P}_{12}] & \cdots & \mathrm{tr}[\mathbf{P}_{1h}] \\ \mathrm{tr}[\mathbf{P}_{21}] & \mathrm{tr}[\mathbf{P}_{22}] & \cdots & \mathrm{tr}[\mathbf{P}_{2h}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{tr}[\mathbf{P}_{h1}] & \mathrm{tr}[\mathbf{P}_{h2}] & \cdots & \mathrm{tr}[\mathbf{P}_{hh}] \end{bmatrix}, \qquad (50)$$

для матрицы $\mathbf{\Omega}$ окончательно получаем

$$\mathbf{\Omega} = n\cdot(\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon} + \mathbf{\Sigma}_{\psi} + \mathbf{\Sigma}_{\zeta}) - \mathbf{T}_{P}. \qquad (51)$$

Используем результаты (21)–(51) для построения решающего правила, предназначенного для классификации новых наблюдений.

3. Решающее правило классификации на основе двух систем авторегрессионных уравнений

Пусть в процессе своего функционирования исследуемый объект может находиться в одном из двух классов состояний, каждый из которых характеризуется своей системой авторегрессионных уравнений. Пусть $X(\mathrm{I})$ и $X(\mathrm{II})$ – выборки наблюдений за состоянием объекта, полученные для первого P_{I} и второго P_{II} класса состояний в соответствии с (1)–(20). Тогда возможно формулирование следующей *задачи статистической классификации*: на основе обучающих выборок $X(\mathrm{I})$ и $X(\mathrm{II})$ требуется построить решающее правило, которое позволяло бы установить принадлежность анализируемого (существующего или ожидаемого) наблюдения (состояния) к одному из двух классов состояний. Решение задачи предполагает оценивание коэффициентов двух систем авторегрессионных уравнений для двух классов состояний P_I и P_{II} по соответствующим обучающим выборкам наблюдений $X(\mathrm{I})$ и $X(\mathrm{II})$. Для такого оценивания воспользуемся результатами (21)–(51).

Пусть, в соответствии с формулой (26), $(h\times 1)$-вектор $\mathbf{y}_*=(y_*(1),y_*(2),\ldots,y_*(h))^{\mathrm{T}}=(x_{n+1}(1),x_{n+1}(2),\ldots,x_{n+1}(h))^{\mathrm{T}}$ представляет собой наблюдение с номером $n+1$, принадлежность которого к первому или второму классу состояний требуется установить.

Пусть $(m(k)\times 1)$-векторы $\mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(k)=(r_{n+1,1}(k),r_{n+1,2}(k),\ldots,r_{n+1,m(k)}(k))$, $k=1,2,\ldots,h$, представляют собой строки регрессоров, сформированные в соответствии с (27) для соответствующих компонент вектора наблюдения $\mathbf{y}_*=(y_*(1),y_*(2),\ldots,y_*(h))^{\mathrm{T}}$.

Рассмотрим случай, в котором наблюдение принадлежит классу состояний P_I. (В силу симметрии случай принадлежности классу состояний P_{II} может быть рассмотрен аналогично). Исследуем сначала *правильное решение*, состоящее в том, что наблюдение отнесено к классу состояний P_I.

Рассмотрим случайный вектор

$$\mathbf{u}_*(I\,|\,I)=\begin{pmatrix}u_*(I\,|\,I,1)\\u_*(I\,|\,I,2)\\\vdots\\u_*(I\,|\,I,h)\end{pmatrix}=\mathbf{y}_*(I)-\hat{\mathbf{y}}_*(I)=\begin{pmatrix}y_*(I,1)-\hat{y}_*(I,1)\\y_*(I,2)-\hat{y}_*(I,2)\\\vdots\\y_*(I,h)-\hat{y}_*(I,h)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\xi_*(I,1)\\\xi_*(I,2)\\\vdots\\\xi_*(I,h)\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,1)\mathbf{C}_{1\bullet}(I)\\\mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,2)\mathbf{C}_{2\bullet}(I)\\\vdots\\\mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,h)\mathbf{C}_{h\bullet}(I)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\xi(I,1)\\\xi(I,2)\\\vdots\\\xi(I,h)\end{pmatrix},\qquad(52)$$

где $\mathbf{y}_*(I)$ – $(h\times 1)$-вектор измерений выходных переменных исследуемого наблюдения; $\hat{\mathbf{y}}_*(I)=(\hat{y}_*(I,1),\hat{y}_*(I,2),\ldots,\hat{y}_*(I,h))^{\mathrm{T}}$ – $(h\times 1)$-вектор расчетных выходов первой системы моделей, который получается после подстановки в нее измерений входных переменных $(\mathbf{r}_*(I,1),\mathbf{r}_*(I,2),\ldots,\mathbf{r}_*(I,h))$ для исследуемого наблюдения. При записи (52) использована формула (39) для оценок коэффициентов и факт их несмещённости, установленный в [7].

Вычислим ковариационную матрицу случайного вектора $\mathbf{u}_*(I/I)$. Для этого воспользуемся следующим известным результатом многомерного статистического анализа (см., например, теорему 2.4.5 на стр. 41 в [10]).

Теорема а. Если векторная случайная величина $\boldsymbol{\eta}$ распределена по многомерному нормальному закону $\boldsymbol{\eta}\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$, то векторная случайная величина $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}$ распределена по многомерному нормальному закону $\boldsymbol{\gamma}\sim N(\mathbf{D}\boldsymbol{\mu},\mathbf{D}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{D}^{\mathrm{T}})$.

Введем случайный вектор $\boldsymbol{\eta}_*(I\,|\,I)=(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(I,1),\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(I,2),\ldots,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(I,h),$ $\xi_*(I,1),\xi_*(I,2),\ldots,\xi_*(I,h))^{\mathrm{T}}$. Запишем случайный вектор $\mathbf{u}_*(I/I)$ в виде

$$\mathbf{u}_*(I\,|\,I)=\left[\mathbf{M}_1(I\,|\,I)-\begin{bmatrix}\mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,1)\mathbf{C}_{1\bullet}(I)\\ \mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,2)\mathbf{C}_{2\bullet}(I)\\ \vdots\\ \mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,h)\mathbf{C}_{h\bullet}(I)\end{bmatrix}\mathbf{M}_2(I\,|\,I)\right]\boldsymbol{\eta}_*(I\,|\,I)=$$

$$=\left[\mathbf{M}_1(I\,|\,I)-\mathbf{R}_*(I\,|\,I)\mathbf{M}_2(I\,|\,I)\right]\boldsymbol{\eta}_*(I\,|\,I)=\mathbf{D}_*(I\,|\,I)\boldsymbol{\eta}_*(I\,|\,I)\ , \tag{53}$$

где

$$\mathbf{R}_*(I\,|\,I)=\begin{bmatrix}\mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,1)\mathbf{C}_{1\bullet}(I)\\ \mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,2)\mathbf{C}_{2\bullet}(I)\\ \vdots\\ \mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,h)\mathbf{C}_{h\bullet}(I)\end{bmatrix};\quad \mathbf{D}_*(I\,|\,I)=\mathbf{M}_1(I\,|\,I)-\mathbf{R}_*(I\,|\,I)\mathbf{M}_2(I\,|\,I)\,; \tag{54}$$

а для блочных матриц $\mathbf{M}_1(I\,|\,I)$ и $\mathbf{M}_2(I\,|\,I)$ выполняется: $\mathbf{M}_1(I\,|\,I)=\left[\mathbf{O}_{(h\times N(I))}\ \vdots\ \mathbf{I}_h\right]$, $\mathbf{M}_2(I\,|\,I)=\left[\mathbf{I}_{N(I)}\ \vdots\ \mathbf{O}_{(N(I)\times h)}\right]$; $\mathbf{O}_{(h\times N(I))}$ – нулевая матрица размера $(h \times N(I))$; $\mathbf{I}_h$ – единичная $(h \times h)$-матрица; $\mathbf{O}_{(N(I)\times h)}$ – нулевая матрица размера $(N(I) \times h)$; $\mathbf{I}_{N(I)}$ – единичная $(N(I) \times N(I))$-матрица.

Для ковариационной матрицы случайного вектора $\boldsymbol{\eta}_*(I/I)$ выполняется

$$\boldsymbol{\Sigma}_\eta(I|I) = E\{(\boldsymbol{\eta}_*(I|I) - E\{\boldsymbol{\eta}_*(I|I)\})(\boldsymbol{\eta}_*(I|I) - E\{\boldsymbol{\eta}_*(I|I)\})^{\mathrm{T}}\} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Sigma}_\xi(I) & \mathbf{O}_{(N(I)\times h)} \\ \hline \mathbf{O}_{(h\times N(I))} & \boldsymbol{\Sigma}_*(I) \end{array}\right], \tag{55}$$

где

$$\boldsymbol{\Sigma}_\xi(I) = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon(I) \otimes \mathbf{I}_{n(I)} + \boldsymbol{\Psi}(I) + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta(I) \otimes \mathbf{I}_{n(I)}, \tag{56}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_*(I) = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon(I) + \boldsymbol{\Sigma}_\psi(I) + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta(I), \tag{57}$$

а матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon(I), \boldsymbol{\Psi}(I), \boldsymbol{\Sigma}_\zeta(I)$ и $\boldsymbol{\Sigma}_\psi(I)$ определяются по формулам (14)–(16), (35), (11)–(13) и (49) соответственно; $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon(I) \otimes \mathbf{I}_{n(I)}$ – кронекеровское произведение матриц $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon(I)$ и $\mathbf{I}_{n(I)}$.

Применяя приведенную выше теорему и учитывая (53) и (55)–(57), для ковариационной матрицы случайного вектора $\mathbf{u}_*(I|I)$ получаем

$$\boldsymbol{\Omega}_*(I|I) = \mathbf{D}_*(I|I)\,\boldsymbol{\Sigma}_\eta(I|I)\,\mathbf{D}_*^{\mathrm{T}}(I|I) = \boldsymbol{\Sigma}_*(I) + \mathbf{R}_*(I|I)\,\boldsymbol{\Sigma}_\xi(I)\,\mathbf{R}_*^{\mathrm{T}}(I|I). \tag{58}$$

Квадратичная форма

$$l_*(I|I) = \mathbf{u}_*^{\mathrm{T}}(I|I)\,\boldsymbol{\Omega}_*^{-1}(I|I)\,\mathbf{u}_*(I|I) \tag{59}$$

имеет χ^2-распределение с h степенями свободы (см. теорему 3.3.3 в [10]).

Исследуем теперь *ошибочное решение*, состоящее в том, что исследуемое наблюдение, принадлежащее классу состояний P_I, отнесено к классу P_{II}.

Рассмотрим случайный вектор

$$\mathbf{u}_*(II|I) = \begin{pmatrix} u_*(II|I,1) \\ u_*(II|I,2) \\ \vdots \\ u_*(II|I,h) \end{pmatrix} = \mathbf{y}_*(I) - \hat{\mathbf{y}}_*(II) = \begin{pmatrix} y_*(I,1) - \hat{y}_*(II,1) \\ y_*(I,2) - \hat{y}_*(II,2) \\ \vdots \\ y_*(I,h) - \hat{y}_*(II,h) \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \overset{o}{y}_*(I,1)-\overset{o}{y}_*(II,1) \\ \overset{o}{y}_*(I,2)-\overset{o}{y}_*(II,2) \\ \vdots \\ \overset{o}{y}_*(I,h)-\overset{o}{y}_*(II,h) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \xi_*(I,1) \\ \xi_*(I,2) \\ \vdots \\ \xi_*(I,h) \end{pmatrix}-\begin{bmatrix} \mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,1)\mathbf{C}_{1\bullet}(II) \\ \mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,2)\mathbf{C}_{2\bullet}(II) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,h)\mathbf{C}_{h\bullet}(II) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(II,1) \\ \boldsymbol{\xi}(II,2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}(II,h) \end{pmatrix}, \tag{60}$$

где $\mathbf{y}_*(I)$ – $(h\times 1)$-вектор измерений выходных переменных исследуемого наблюдения; $\hat{\mathbf{y}}_*(II)=(\hat{y}_*(II,1),\hat{y}_*(II,2),\ldots,\hat{y}_*(II,h))^{\mathrm{T}}$ – $(h\times 1)$-вектор расчетных выходов второй системы моделей, который получается после подстановки в нее измерений входных переменных $(\mathbf{r}_*(I,1),\mathbf{r}_*(I,2),\ldots,\mathbf{r}_*(I,h))$ для исследуемого наблюдения. При записи (60) использована формула (39) для оценок и факт их несмещённости [7].

Введем случайный вектор $\boldsymbol{\eta}_*(II\,|\,I)=(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(II,1),\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(II,2),\ldots,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(II,h),$ $\xi_*(I,1),\xi_*(I,2),\ldots,\xi_*(I,h))^{\mathrm{T}}$. Тогда случайный вектор $\mathbf{u}_*(II/I)$ можно записать

$$\mathbf{u}_*(II\,|\,I)=\begin{pmatrix} \overset{o}{y}_*(I,1)-\overset{o}{y}_*(II,1) \\ \overset{o}{y}_*(I,2)-\overset{o}{y}_*(II,2) \\ \vdots \\ \overset{o}{y}_*(I,h)-\overset{o}{y}_*(II,h) \end{pmatrix}+\left[\mathbf{M}_1(II\,|\,I)-\begin{bmatrix} \mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,1)\mathbf{C}_{1\bullet}(II) \\ \mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,2)\mathbf{C}_{2\bullet}(II) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,h)\mathbf{C}_{h\bullet}(II) \end{bmatrix}\mathbf{M}_2(II\,|\,I)\right]\boldsymbol{\eta}_*(II\,|\,I)=$$

$$=\overset{o}{\mathbf{y}}_*(I)-\overset{o}{\mathbf{y}}_*(II)+[\mathbf{M}_1(II\,|\,I)-\mathbf{R}_*(II\,|\,I)\mathbf{M}_2(II\,|\,I)]\boldsymbol{\eta}_*(II\,|\,I)=$$

$$=\boldsymbol{\delta}_*(II\,|\,I)+\mathbf{D}_*(II\,|\,I)\boldsymbol{\eta}_*(II\,|\,I), \tag{61}$$

где

$$\mathbf{R}_*(II\,|\,I)=\begin{bmatrix} \mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,1)\mathbf{C}_{1\bullet}(II) \\ \mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,2)\mathbf{C}_{2\bullet}(II) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_*^{\mathrm{T}}(I,h)\mathbf{C}_{h\bullet}(II) \end{bmatrix};\ \mathbf{D}_*(II\,|\,I)=\mathbf{M}_1(II\,|\,I)-\mathbf{R}_*(II\,|\,I)\mathbf{M}_2(II\,|\,I); \tag{62}$$

для блочных матриц $\mathbf{M}_1(II\,|\,I)$ и $\mathbf{M}_2(II\,|\,I)$ выполняется $\mathbf{M}_1(II\,|\,I)=\left[\mathbf{O}_{(h\times N(II))}\ \vdots\ \mathbf{I}_h\right]$, $\mathbf{M}_2(II\,|\,I)=\left[\mathbf{I}_{N(II)}\ \vdots\ \mathbf{O}_{(N(II)\times h)}\right]$; $\mathbf{O}_{(h\times N(II))}$ – нулевая матрица размера $(h\times N(II))$; $\mathbf{I}_h$ – единичная $(h\times h)$-матрица;

$\mathbf{O}_{(N(II)\times h)}$ – нулевая матрица размера $(N(II)\times h)$; $\mathbf{I}_{N(II)}$ – единичная $(N(II)\times N(II))$-матрица; $\boldsymbol{\delta}_*(II/I)=\overset{\circ}{\mathbf{y}}_*(I)-\overset{\circ}{\mathbf{y}}_*(II)$.

Для ковариационной матрицы случайного вектора $\boldsymbol{\eta}_*(II/I)$ выполняется

$$\boldsymbol{\Sigma}_\eta(II\,|\,I)=E\{(\boldsymbol{\eta}(II\,|\,I)-E\{\boldsymbol{\eta}(II\,|\,I)\})(\boldsymbol{\eta}(II\,|\,I)-E\{\boldsymbol{\eta}(II\,|\,I)\})^{\mathrm{T}}\}=\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{\Sigma}_\xi(II) & \mathbf{O}_{(N(II)\times h)}\\ \hline \mathbf{O}_{(h\times N(II))} & \boldsymbol{\Sigma}_*(I)\end{array}\right], \tag{63}$$

где

$$\boldsymbol{\Sigma}_\xi(II)=\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon(II)\otimes\mathbf{I}_{n(II)}+\boldsymbol{\Psi}(II)+\boldsymbol{\Sigma}_\zeta(II)\otimes\mathbf{I}_{n(II)}, \tag{64}$$

а матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon(II),\boldsymbol{\Psi}(II),\boldsymbol{\Sigma}_\zeta(II)$ и $\boldsymbol{\Sigma}_\psi(I)$ определяются по формулам (14)–(16), (35), (11)–(13) и (49) соответственно; $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon(II)\otimes\mathbf{I}_{n(II)}$ – кронекеровское произведение матриц $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon(II)$ и $\mathbf{I}_{n(II)}$; матрица $\boldsymbol{\Sigma}_*(I)$ определена в (57).

Применяя приведенную выше теорему и учитывая (60) и (63)–(64), для ковариационной матрицы случайного вектора $\mathbf{u}_*(II|I)$ получаем

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Omega}_*(II\,|\,I)=\mathbf{D}_*(II\,|\,I)\,\boldsymbol{\Sigma}_\eta(II\,|\,I)\,\mathbf{D}_*^{\mathrm{T}}(II\,|\,I)=\\ &\boldsymbol{\Sigma}(I)+\mathbf{R}_*(II\,|\,I)\boldsymbol{\Sigma}_\xi(II)\mathbf{R}_*^{\mathrm{T}}(II\,|\,I)\ .\end{aligned} \tag{65}$$

Квадратичная форма

$$l_*(II\,|\,I)=\mathbf{u}_*^{\mathrm{T}}(II\,|\,I)\,\boldsymbol{\Omega}_*^{-1}(II\,|\,I)\,\mathbf{u}_*(II\,|\,I) \tag{66}$$

имеет нецентральное χ^2-распределение с h степенями свободы и параметром нецентральности

$$\tau_*^2(II\,|\,I)=\boldsymbol{\delta}_*^{\mathrm{T}}(II\,|\,I)\boldsymbol{\Omega}_*^{-1}(II\,|\,I)\boldsymbol{\delta}_*(II\,|\,I) \tag{67}$$

(см., например, теорему 5.4.1 в [10]).

Теперь, на основе результатов (52)–(67), сформулируем *решающее правило*:

$$\begin{aligned}&\text{если } l_*(I\,|\,I)<l_*(II\,|\,I)\text{, то наблюдение } \mathbf{y}_* \text{ будем относить к классу } P_I;\\ &\text{если } l_*(I\,|\,I)>l_*(II\,|\,I)\text{, то наблюдение } \mathbf{y}_* \text{ будем относить к классу } P_{II}.\end{aligned} \tag{68}$$

4. Теоретические значения вероятностей правильной и ошибочной классификаций

Получим теоретические значения вероятностей ошибочной и правильной классификаций по решающему правилу (68). Для вычисления вероятности ошибочной классификации наблюдения, фактически принадлежащего первой совокупности, необходимо знать совместную плотность распределения случайных величин $l_*(I\,|\,I)$ и $l_*(II\,|\,I)$. Запись совместной плотности представляет сложную задачу, поскольку эти величины *статистически зависимы*. Для подтверждения факта их статистической зависимости вычислим коэффициент корреляции случайных величин $l_*(I\,|\,I)$ и $l_*(II\,|\,I)$.

Сначала сформулируем вспомогательный результат в виде леммы.

Лемма. Если векторная случайная величина $\boldsymbol{\gamma}$ распределена по многомерному нормальному закону $\boldsymbol{\gamma} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, то выполняется

$$E\{\boldsymbol{\gamma}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}\;\boldsymbol{\gamma}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}\} = \mathrm{tr}[\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{A}\,]\,\mathrm{tr}[\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{B}\,] + 2\,\mathrm{tr}[\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{B}\,]. \tag{69}$$

Доказательство леммы получается непосредственными вычислениями.

Запишем для коэффициента корреляции величин $l_*(I\,/\,I)$ и $l_*(II\,/\,I)$

$$\mathrm{cor}\,(l_*(I\,|\,I), l_*(II\,|\,I)) = \frac{\mathrm{cov}\,(l_*(I\,|\,I), l_*(II\,|\,I))}{\sqrt{D\{l_*(I\,|\,I)\}}\;\sqrt{D\{l_*(II\,|\,I)\}}}. \tag{70}$$

Используя свойства χ^2-распределения и нецентрального χ^2-распределения (см. например, стр. 124-126 в [11]), для математических ожиданий и дисперсий случайных величин $l_*(I\,|\,I)$ и $l_*(II\,|\,I)$ можно записать

$$E\{l_*(I\,|\,I)\} = h\,, \quad E\{l_*(II\,|\,I)\} = \tau_*^2(II\,|\,I) + h\,, \tag{71}$$

$$D\{l_*(I\,|\,I)\} = 2h\,, \quad D\{l_*(II\,|\,I)\} = 4\tau_*^2(II\,|\,I) + 2h\,. \tag{72}$$

Воспользовавшись сформулированной леммой, для ковариации случайных величин $l_*(I\,|\,I)$ и $l_*(II\,|\,I)$ получаем

$$\mathrm{cov}\,(l_*(I\,|\,I), l_*(II\,|\,I)) = 2\,\mathrm{tr}[\,\boldsymbol{\Sigma}(I)\,\boldsymbol{\Omega}_*^{-1}(I\,|\,I)\,\boldsymbol{\Sigma}(I)\,\boldsymbol{\Omega}_*^{-1}(II\,|\,I)\,]. \tag{73}$$

Объединяя результаты (70)–(73), для коэффициента корреляции случайных величин $l_*(I\,|\,I)$ и $l_*(II\,|\,I)$ получаем

$$\mathrm{cor}\,(l_*(I\,|\,I), l_*(II\,|\,I)) = \frac{\mathrm{tr}[\boldsymbol{\Sigma}(I)\,\boldsymbol{\Omega}_*^{-1}(I\,|\,I)\,\boldsymbol{\Sigma}(I)\,\boldsymbol{\Omega}_*^{-1}(II\,|\,I)]}{\sqrt{2\,h\,\tau_*^2(II\,|\,I) + h^2}} > 0\,. \tag{74}$$

Итак, вычисление вероятности ошибочной классификации наблюдения, фактически принадлежащего первому классу состояний, осложняется статистической зависимостью случайных величин $l_*(I\,|\,I)$ и $l_*(II\,|\,I)$.

Менее сложной задачей является вычисление вероятности ошибочной классификации наблюдения, фактически принадлежащего первому классу состояний, для конкретного значения случайной величины $l_*(I\,|\,I) = l$. В этом случае вероятность отнести анализируемое наблюдение к классу состояний P_{II}, в то время как оно принадлежит P_I, есть не что иное, как вероятность выполнения неравенства $l_*(II\,|\,I) < l$. Поскольку случайная величина $l_*(II\,|\,I)$ имеет нецентральное χ^2-распределение, эту вероятность можно вычислить:

$$\operatorname{prob}(II\,|\,I) = \operatorname{prob}(l_*(II\,|\,I) < l) = \int_0^l f(x; h, \tau_*^2(II\,|\,I))\,dx\,, \tag{75}$$

где $f(x; h, \tau_*^2(II\,|\,I))$ – функция плотности χ^2-распределения с h степенями свободы и параметром нецентральности $\tau_*^2(II\,|\,I)$, который введен в (67).

Вероятность правильной классификации наблюдения, фактически принадлежащего первой совокупности, можно записать, используя (75)

$$\operatorname{prob}(I\,|\,I) = 1 - \operatorname{prob}(II\,|\,I)\,. \tag{76}$$

5. Вероятности правильной и ошибочной классификаций по результатам идентификации систем авторегрессионных уравнений

Рассмотрим квадратичную форму

$$\hat{l}_*(I\,|\,I) = \mathbf{u}_*^{\mathrm{T}}(I\,|\,I)\,\mathbf{W}_*^{-1}(I\,|\,I)\,\mathbf{u}_*(I\,|\,I)\,, \tag{77}$$

где вектор $\mathbf{u}_*(I\,|\,I)$ определен в (53) и имеет многомерное нормальное распределение $\mathbf{u}_*(I\,|\,I) \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}_*(I\,|\,I))$; $\boldsymbol{\Omega}_*(I\,|\,I)$ – ковариационная $(h \times h)$-матрица определена в (4.58); $\mathbf{W}_*(I\,|\,I)$ – $(h \times h)$-матрица определяется аналогично (4.46):

$$[\mathbf{W}_*(I\,|\,I)]_{k,q} = [\mathbf{U}_*^{\mathrm{T}}(I\,|\,I)\,\mathbf{U}_*(I\,|\,I)]_{k,q} = \mathbf{u}_*^{\mathrm{T}}(I\,|\,I,k)\,\mathbf{u}_*(I\,|\,I,q)\,. \tag{78}$$

Теорема. Для квадратичной формы (77) выполняется:

$$\frac{\hat{l}_*(I\,|\,I)}{n(I)h} \cdot \frac{n(I)h - h + 1}{h} \sim F(h, n(I)h - h + 1)\ , \tag{79}$$

где $F(h, n(I)h - h + 1)$ – центральное F-распределение Фишера с h и $n(I)h - h + 1$ степенями свободы.

Справедливость теоремы следует из независимости вектора $\mathbf{u}_*(I\,|\,I)$ и матрицы $\mathbf{W}_*(I\,|\,I)$, и того факта, что матрица $\mathbf{W}_*(I\,|\,I)$ имеет распределение Уишарта с $n(I)h$ степенями свободы (см., например, стр. 213-214 в [10]):

$$\mathbf{W}_*(I\,|\,I) \sim W_h((n(I)h, \boldsymbol{\Omega}_*(I\,|\,I))\,. \tag{80}$$

Из (80) следует выполнение (79) (см., например, теорему 5.2.2 в [10]).

Рассмотрим теперь квадратичную форму

$$\hat{l}_*(II \mid I) = \mathbf{u}_*^{\mathrm{T}}(II \mid I)\ \mathbf{W}_*^{-1}(II \mid I)\,\mathbf{u}_*(II \mid I), \tag{81}$$

где вектор $\mathbf{u}_*(II \mid I)$ определен в (61) и имеет многомерное нормальное распределение $\mathbf{u}_*(II \mid I) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega}_*(II \mid I))$; $\mathbf{\Omega}_*(II \mid I)$ – ковариационная $(h \times h)$-матрица определена в (4.65); $\mathbf{W}_*(II \mid I)$ – $(h \times h)$-матрица определяется аналогично (4.46):

$$[\mathbf{W}_*(II \mid I)]_{k,q} = [\mathbf{U}_*^{\mathrm{T}}(II \mid I)\,\mathbf{U}_*(II \mid I)]_{k,q} = \mathbf{u}_*^{\mathrm{T}}(II \mid I,k)\,\mathbf{u}_*(II \mid I,q). \tag{82}$$

Сформулируем решающее правило, опираясь на (52)–(67) и (77)–(82):

если $\hat{l}_*(I \mid I) < \hat{l}_*(II \mid I)$, то наблюдение $\mathbf{y}_*$ будем относить к классу P_I;

если $\hat{l}_*(I \mid I) > \hat{l}_*(II \mid I)$, то наблюдение $\mathbf{y}_*$ будем относить к классу P_{II}.

(83)

Для вычисления вероятности ошибочной классификации наблюдения, фактически принадлежащего первой совокупности, необходимо знать совместную плотность распределения случайных величин $\hat{l}_*(I \mid I)$ и $\hat{l}_*(II \mid I)$, а запись совместной плотности представляет собой сложную задачу, поскольку эти случайные величины *статистически зависимы*.

Менее сложной задачей является вычисление вероятности ошибочной классификации наблюдения, фактически принадлежащего первой совокупности, для конкретного значения случайной величины $\hat{l}_*(II \mid I) = \tilde{l}$. Вероятность отнести анализируемое наблюдение к классу состояний P_{II}, в то время как оно принадлежит P_I, есть не что иное, как вероятность выполнения неравенства $\hat{l}_*(I \mid I) > \tilde{l}$. Поскольку случайная величина $\hat{l}_*(I \mid I)$ имеет центральное F-распределение Фишера, эту вероятность можно вычислить:

$$\mathrm{prob}(II \mid I) = \mathrm{prob}(\hat{l}_*(I \mid I) > \tilde{l}) = \int_0^{\tilde{l}} F(x; h, n(I)h - h + 1)\,dx, \tag{84}$$

где $F(x; h, n(I)h - h + 1)$ – функция плотности F-распределения Фишера с h и $2nh - h + 1$ степенями свободы.

Используя (84) можно записать вероятность правильной классификации наблюдения, фактически принадлежащего первому классу состояний

$$\mathrm{prob}(I \mid I) = 1 - \mathrm{prob}(II \mid I). \tag{85}$$

Случай принадлежности исследуемого наблюдения $\mathbf{y}_*$ ко второму классу состояний P_{II} может быть рассмотрен аналогично.

Отметим также, что рассмотренная задача обнаружения изменения свойств динамических систем может быть поставлена и решена в условиях структурной неопределённости, когда структурные матрицы, введённые в первом пункте, априорно неизвестны. В этом случае построение систем авторегрессионных уравнений оптимальной сложности для двух классов состояний может быть проведено на основе результатов [12–14].

Заключение. Решена задача статистической классификации состояний динамической системы, которая может находиться в двух классах состояний, в каждом из которых её функционирование описывается своей системой авторегрессионных уравнений с априорно неизвестными параметрами. Предполагается, что выполнены следующие условия: а) два класса состояний описываются одинаковыми множествами наблюдаемых входных и выходных переменных; б) выходные переменные, как в первом, так и во втором классе определены разными множествами регрессоров (входных переменных); в) модели функционирования в первом и втором классах различны как по коэффициентам, так и по структуре авторегрессионных моделей; г) ковариационные матрицы случайных величин в моделях функционирования и моделях наблюдения для первого и второго классов различны. Построено правило классификации и исследованы его свойства.

Опыт успешного решения задач обнаружения изменения свойств динамических систем на основе регрессионных уравнений в работе [6], где предложен и обоснован подход к построению математических моделей контроля технического состояния силовых и энергетических установок в длительной эксплуатации, показывает целесообразность применения такого подхода при решении задач контроля функционирования объектов ракетно-космической техники.

ЛИТЕРАТУРА / ЛІТЕРАТУРА

1. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем: пер. с англ. / М. Бассвиль, А. Вилски, А. Банвенист и др.; под. ред. М. Бассвиль, А. Банвениста. – М. : Мир, 1989. – 278 с.

2. Бородкин Л. И. Алгоритм обнаружения моментов изменения параметров уравнения случайного процесса / Л. И. Бородкин, В. В. Моттль // Автоматика и телемеханика. – 1976. – № 6. – С. 23–31.

3. Воробейчиков С. Э. Об обнаружении разладок в динамических системах / С. Э. Воробейчиков, В. В. Конев // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 3. С. 56–68.

4. Цыганова Ю. В. Метод обнаружения факта нарушения и его диагностики в линейных стохастических системах в процессе фильтрации / Ю. В. Цыганова // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2009. – № 2 (18). – С. 163–171.
5. Карташов В. Я. Обнаружение структурно-параметрических изменений в стохастических системах в реальном масштабе времени алгоритмами непрерывных дробей и структурного анализа / В. Я. Карташов, М. А. Новосельцева // Управление большими системами. – 2011. – Вып. 34. – С. 62–91.
6. Миргород В. Ф. Математические модели процессов управляемого изменения состояния силовых и энергетических установок: дисс. … д-ра техн.наук/Миргород Владимир Фёдорович.–Днепропетровск,2012.–344 с.
7. Сарычев А. П. Идентификация параметров систем авторегрессионных уравнений при известных ковариационных матрицах / А. П. Сарычев // Международный научно-технический журнал “Проблемы управления и информатики”. – 2012. – № 3. – С. 14–30.
8. Сарычев А. П. Исследование методом статистических испытаний итерационной процедуры для идентификации параметров системы авторегрессионных уравнений / А. П. Сарычев // Системні технології. –2014. – Випуск 3 (92). – С. 77–89.
9. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ : пер. с англ. / Дж. Себер. – М. : Мир, 1980. – 456 с.
10. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ : пер. с англ. / Т. Андерсон. – М. : Физматгиз. – 1963. – 500 с.
11. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. – М. : Наука, 1985. – 640 с.
12. Сарычев А. П. Моделирование в классе систем авторегрессионных уравнений в условиях структурной неопределенности / А. П. Сарычев // Международный научно-технический журнал “Проблемы управления и информатики”. – 2015. – № 4. – С. 79–103.
13. Системный анализ и управление сложными системами в условиях неопределенности / А. П. Алпатов, В. Т. Марченко, Ю. А. Прокопчук, А. П. Сарычев, С. В. Хорошилов; под. ред. А. П. Алпатова. – Днепропетровск : ИТМ НАНУ и ГКАУ, 2015. – 196 с.
14. Александр Сарычев. Моделирование сложных систем в условиях структурной неопределённости: регрессионные и авторегрессионные модели / А. П. Сарычев. LAP LAMBERT Academic Publishing RU, Saarbrücken, Deutschland. – 2016. – 274 с.

REFERENCES

1. Obnaruzhenye yzmenenyia svoistv syhnalov y dynamycheskykh system: per. s anhl. / M. Bassvyl, A. Vylsky, A. Banvenyst y dr.; pod. red. M. Bassvyl, A. Banvenysta. – M. : Myr, 1989. – 278 s.
2. Borodkyn L. Y. Alhorytm obnaruzhenyia momentov yzmenenyia para-metrov uravnenyia sluchainoho protsessa / L. Y. Borodkyn, V. V. Mottl // Avtomatyka y telemekhanyka. – 1976. – № 6. – S. 23–31.
3. Vorobeichykov S. Э. Ob obnaruzhenyy razladok v dynamycheskykh sys-temakh / S. Э. Vorobeichykov, V. V. Konev // Avtomatyka y telemekhanyka. – 1990. – № 3. S. 56–68.
4. Tsihanova Yu. V. Metod obnaruzhenyia fakta narushenyia y eho dyahno-styky v lyneinыkh stokhastycheskykh systemakh v protsesse fyltratsyy / Yu. V. Tsыhanova // Vestnyk Samarskoho hosudarstvennoho aэrokosmyche-skoho unyversyteta. – 2009. – № 2 (18). – S. 163–171.
5. Kartashov V. Ya. Obnaruzhenye strukturno-parametrycheskykh yzmene-nyi v stokhastycheskykh systemakh v realnom masshtabe vremeny alhoryt-mamy neprerыvnыkh drobei y strukturnoho analyza / V. Ya. Kartashov, M. A. Novoseltseva // Upravlenye bolshymy systemamy. – 2011. –Vip. 34.–S. 62–91.
6. Myrhorod V. F. Matematycheskye modely protsessov upravliaemoho yzmenenyia sostoianyia sylovыkh y эnerhetycheskykh ustanovok: dyss. … d-ra tekhn. nauk / Myrhorod Vladymyr Fёdorovych. –Dnepropetrovsk, 2012.–344 s.
7. Sarichev A. P. Ydentyfykatsyia parametrov system avtorehressyon-nыkh urav-nenyi pry yzvestnыkh kovaryatsyonnыkh matrytsakh / A. P. Sarыchev // Mezhdunarodnыi nauchno-tekhnycheskyi zhurnal "Problemы upravlenyia y ynfor-matyky". – 2012. – № 3. – S. 14–30.
8. Sarichev A. P. Yssledovanye metodom statystycheskykh yspitanyi yteratsyonnoi protseduri dlia ydentyfykatsyy parametrov systemi av-torehressyonnikh uravnenyi / A. P. Sarichev // Systemni tekhnolohii. –2014. – Vypusk 3 (92). – S. 77–89.
9. Seber Dzh. Lyneinii rehressyonnii analyz : per. s anhl. / Dzh. Seber. – M.: Myr, 1980. – 456 s.
10. Anderson T. Vvedenye v mnohomernii statystycheskyi analyz: per. s anhl. / T. Anderson. – M. : Fyzmathyz. – 1963. – 500 s.
11. Spravochnyk po teoryy veroiatnostei y matematycheskoi statystyke / V. S. Koroliuk, N. Y. Portenko, A. V. Skorokhod, A. F. Turbyn. – M. : Nau-ka, 1985. – 640 s.
12. Sarichev A.P. Modelyrovanye v klasse system avtorehressyonnыkh uravnenyi v uslovyiakh strukturnoi neopredelennosty / A. P. Sarichev // Mezhdunarodnii nauchno-tekhnycheskyi zhurnal "Problemi upravlenyia y ynformatyky". – 2015. – № 4. – S. 79–103.

13. Systemnii analyz y upravlenye slozhnimy systemamy v uslovyiakh neopredelennosty / A.P. Alpatov, V.T. Marchenko, Yu.A. Prokopchuk, A.P. Sarichev, S.V. Khoroshylov; pod. red. A. P. Alpatova. – Dnepropet-rovsk : YTM NANU y HKAU, 2015. – 196 s.
14. Aleksandr Sarichev. Modelyrovanye slozhnikh system v uslovyiakh strukturnoi neopredelënnosty: rehressyonnie y avtorehressyonnie modely / A.P. Sarichev. LAP LAMBERT Academic Publishing RU, Saarbrücken, Deutschland. – 2016. – 274 s.
Received 12.03.2019.
Accepted 15.03.2019.

Класифікація станів динамічної системи, функціонування який описує векторної авторегресії

В рамках статті вирішена задача статистичної класифікації станів динамічної системи, яка може перебувати в двох класах станів, в кожному з яких її функціонування описується своєю системою авторегресійних рівнянь з апріорно невідомими параметрами. Передбачається, що виконані наступні умови: а) два класи станів описуються однаковими множинами спостережуваних вхідних і вихідних змінних; б) вихідні змінні, як в першому, так і в другому класі визначено різними множинами регресорів (вхідних змінних); в) моделі функціонування в першому і другому класах різні як за коефіцієнтами, так і за структурою авторегресійних моделей; г) коваріаційні матриці випадкових величин в моделях функціонування і моделях спостереження для першого і другого класів різні. Побудовано правило класифікації і досліджені його властивості.

Досвід успішного вирішення завдань виявлення зміни властивостей динамічних систем на основі регресійних рівнянь в роботі, де запропонований і обґрунтований підхід до побудови математичних моделей контролю технічного стану силових і енергетичних установок в тривалій експлуатації, показує доцільність застосування такого підходу при вирішенні завдань контролю функціонування об'єктів ракетно-космічної техніки.

Розглянуто задачу класифікації станів динамічної системи, яка може перебувати в двох класах станів. Функціонування системи в класах описується різними системами авторегресійних рівнянь. Побудовано правило класифікації і досліджені його властивості.

Classification of the state of the dynamic system, which is functioned by which is described by vector autoresis

Within the framework of the article, the problem of statistical classification of states of a dynamic system is solved, which can be in two classes of states, in each of which its operation is described by its own system of autoregressive equations with a priori unknown parameters. It is assumed that the following conditions are fulfilled: a) two classes of states are described by the same sets of observed input and output variables; b) the output variables, both in the first and in the second class, are determined by different sets of regressors (input variables); c) the models of functioning in the first and second classes are different both in terms of coefficients and in the structure of autoregressive models; d) the covariance matrices of random variables in the functioning models and the observation models for the first and second classes are different. The rule of classification is constructed and its properties are investigated.

The experience of successfully solving problems of detecting changes in the properties of dynamic systems based on regression equations in the work, where an approach to

constructing mathematical models for monitoring the technical condition of power and power plants in long-term operation was proposed, shows the feasibility of applying this approach to solving problems of controlling the operation of rocket-space objects technology.

The problem of classifying states of a dynamic system, which can be in two classes of states, is considered. The functioning of the system in classes is described by various systems of autoregressive equations. The rule of classification is constructed and its properties are investigated.

Сарычев А.П. – д.т.н., ведущий научный сотрудник, Институт технической механики Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины.

Саричев О.П. – д.т.н., провідний науковий співробітник, Інститут технічної механіки Національної академії наук України та Державного космічного агентства України.

Sarychev A.P. – doctor of technical sciences, leading scientific researcher, Institute of Technical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine and State Space Agency of Ukraine.

ISSN 1562-9945