

УДК 624.012

**ВНУТРІШНІ ЗУСИЛЛЯ У ПОЛОГІЙ ОБОЛОНЦІ ВІД'ЄМНОЇ
ГАУСОВОЇ КРИВИНИ ПРИ ДІЇ ВЕРТИКАЛЬНОГО
НАВАНТАЖЕННЯ**

**ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ В ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКЕ
ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ
ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ**

**DEFINITION OF INTERNAL FORCES SHALLOW SHELL OF
NEGATIVE GAUSSIAN CURVATURE UNDER THE INFLUENCE OF
VERTICAL LOAD**

**Сунак О.П., к.т.н., доцент, Ужегов С.О., аспірант, Пахолюк О.А., к.т.н.,
доцент (Луцький національний технічний університет)**

**Сунак О.П., к.т.н., доцент, Ужегов С.О., аспирант, Пахолюк О.А., к.т.н.,
доцент (Луцкий национальный технический университет)**

**Sunak O.P., Ph.D in Engineering, Associate Professor, Uzhegov S.O.,
postgraduate, Pakholyuk O.A., Ph.D in Engineering, Associate Professor
(Lutsk National Technical University, s. Lutsk)**

**У статті наведені вирази для аналітичного визначення внутрішніх
зусиль від вертикального навантаження в оболонці у формі
гіперболічного параболоїда з головними напрямками поверхні вздовж
діагоналей основи оболонки.**

**В статье приведены выражения для аналитического определения
внутренних усилий от вертикальной нагрузки в оболочке в форме
гиперболического параболоида с главными направлениями поверхности
вдоль диагоналей основы оболочки.**

**The article presents expressions for the analytical determination of internal
forces of the vertical load in the shell in the form of a hyperbolic paraboloid
with the principal directions along the diagonals of the shell's base surface.**

Ключові слова:

оболонка, гіпар, кривина, навантаження, внутрішні зусилля, граничні умови; оболочка, гипар, кривизна, нагрузка, внутренние усилия, граничные условия; shell, hypar, curvature, load, internal forces, the boundary conditions;

Пологі оболонки від'ємної гаусової кривини застосовують для покриття промислових та цивільних будівель, проектування опорних конструкцій, огорожуючих та несучих стін, спеціальних споруд, створення малих архітектурних форм. Такі покриття дають можливість створювати будівлі та споруди з вільним плануванням, перекривати значні площі, вони не складні при зведенні – високотехнологічні, мають архітектурну виразність. Досвід світового будівництва довів, що використання просторових конструкцій для покриття великопротітних будівель дає змогу економити до 25 – 30% бетону, до 25% арматурної сталі, у загальній вартості економити 12 – 14% коштів. Це є основними критеріями при виборі конструкцій покриття та широкому їх застосуванню. Разом з тим, гіперболічний параболоїд (гіпар) характеризується лінійністю форми – його поверхня створена системою прямих ліній (рис. 1), що суттєво спрощує виготовлення опалубки, армування та оздоблення поверхні, виготовлення елементів покриття у вигляді збірних плит.

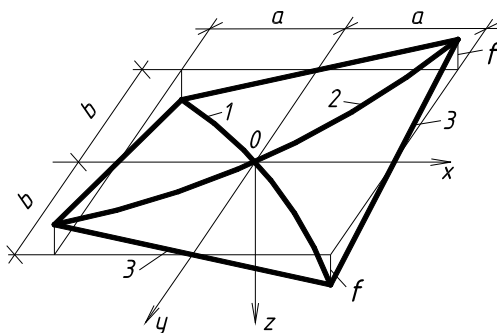


Рис. 1. Поверхня від'ємної гаусової кривини: 1 – головний напрямок додатної кривини; 2 – головний напрямок від'ємної кривини; 3 - твірні

Проведені чисельні дослідження показали, що покриття у вигляді гіперболічних параболоїдів мають достатню жорсткість та стійкість, а конструкції у вигляді спряжених систем надають будівлям відмінну архітектурну виразність – різними сполученнями оболонок можна створювати різноманітні форми покриттів будівель з довільною сіткою колон.

У таких оболонках при рівномірно розподіленому навантаженні по всій поверхні вздовж головних напрямків додатної кривини виникає стиск, а вздовж головних напрямків від'ємної кривини – розтяг. Поверхня оболонки, описана рівнянням другого ступеня, має прямолінійні твірні. Її рівняння

$$z = c x y, \quad (1)$$

де c – стала величина.

Відповідно до рис. 1 при $x = a$, $y = b$ ордината $z = f$, і на основі рівняння (1)

$$c = f/(ab). \quad (2)$$

Напрямки головних кривин поверхні та осей координат не співпадають, тобто $k_x \neq k_1$ і $k_y \neq k_2$.

Кривини поверхонь вздовж осей Ox та Oy підтверджують, що поверхня дійсно обмежена прямими:

$$k_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(cxy) = 0 \text{ (пряма лінія);}$$

$$k_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(cxy) = 0 \text{ (пряма лінія).}$$

Кривина кручення

$$k_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(cxy) = c = \frac{f}{ab}, \quad (3)$$

тобто величина k_{xy} є сталою величиною по всій поверхні.

Система рівнянь рівноваги внутрішніх сил і зовнішнього навантаження на прямокутному елементі проекції оболонки (за умови $a = b$) на площині xOy [1] має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y &= 0; \\ k_x N_x + 2k_{xy} N_{xy} + k_y N_y &= pX + qY - Z, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

де N_x , N_{xy} , N_y – внутрішні зусилля, віднесені до проекції елемента на площину xOy ; X , Y , Z – складові навантаження, розподіленого по поверхні, паралельні до напрямку осей Ox , Oy , Oz ;

$$\left. \begin{aligned} k_x = 0; k_y = 0; k_{xy} = c = f/a^2; \\ p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(cxy) = cy; q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(cxy) = cx. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Підставивши у третє рівняння системи (4) коефіцієнти (5),

$$0 \cdot N_x + 2cN_{xy} + 0 \cdot N_y = cyX + cxY - Z$$

отримано

$$N_{xy} = \frac{c(Xy + Yx) - Z}{2c}, \quad (6)$$

З першого рівняння (4) визначено

$$N_x = -\int \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X \right) dx + f_1(y). \quad (7)$$

З другого рівняння (4) визначено

$$N_y = -\int \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + Y \right) dy + f_2(x). \quad (8)$$

Функції $f_1(y)$ та $f_2(x)$ в (7) і (8) визначають відповідно до граничних умов.

При вертикальному навантаженні w , рівномірно розподіленому по поверхні оболонки, компоненти навантаження

$$\left. \begin{aligned} X = 0; \\ Y = 0; \\ Z = w\sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2} = w\sqrt{1 + c^2(x^2 + y^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Якщо (9) підставити в (6), то

$$N_{xy} = \frac{c(0 \cdot y + 0 \cdot x) - w\sqrt{1 + c^2(x^2 + y^2)}}{2c} = -\frac{w}{2}\sqrt{1/c^2 + x^2 + y^2}. \quad (10)$$

Підставивши (10) у (7), вираз для N_x :

$$\begin{aligned} N_x &= -\int \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dx + f_1(y) = \\ &= \frac{w}{2} \int \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1/c^2 + x^2 + y^2} dx + f_1(y) = \\ &= \frac{w}{2} y \ln \left(x + \sqrt{1/c^2 + x^2 + y^2} \right) + f_1(y). \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогічно – підставивши (10) у (8) – вираз для N_y :

$$\begin{aligned} N_{\delta} &= -\int \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dy + f_2(x) = \\ &= \frac{w}{2} \int \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{1/c^2 + x^2 + y^2} dy + f_2(x) = \\ &= \frac{w}{2} x \ln \left(y + \sqrt{1/c^2 + x^2 + y^2} \right) + f_2(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Граничні умови при безмоментному стані:

при $x = \pm a$ зусилля $N_x = 0$; $N_{xy} \neq 0$;

при $y = \pm b$ зусилля $N_y = 0$; $N_{xy} \neq 0$;

Прирівнявши в (11) N_x до 0, отримано

$$f_1(y) = -\frac{w}{2} y \ln \left(a + \sqrt{1/c^2 + a^2 + y^2} \right). \quad (13)$$

Аналогічно, прирівнявши в (12) N_y до 0, отримано

$$f_2(\delta) = -\frac{w}{2} \delta \ln \left(b + \sqrt{1/c^2 + x^2 + b^2} \right). \quad (14)$$

Підставивши (13) в (11), отримано вираз для визначення зусиль N_x вздовж осі Ox у проекції оболонки:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{w}{2} y \ln \left(x + \sqrt{1/c^2 + x^2 + y^2} \right) - \frac{w}{2} y \ln \left(a + \sqrt{1/c^2 + a^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{w}{2} y \ln \frac{x + \sqrt{1/c^2 + x^2 + y^2}}{a + \sqrt{1/c^2 + a^2 + y^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогічно, підставивши (14) в (12), отримано вираз для N_y ,

$$\begin{aligned} N_{\delta} &= \frac{w}{2} \delta \ln \left(\delta + \sqrt{1/c^2 + x^2 + y^2} \right) - \frac{w}{2} \delta \ln \left(b + \sqrt{1/c^2 + x^2 + b^2} \right) = \\ &= \frac{w}{2} x \ln \frac{y + \sqrt{1/c^2 + x^2 + y^2}}{b + \sqrt{1/c^2 + x^2 + b^2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Якщо до горизонтальної проекції оболонки прикласти вертикальне навантаження w_0 , рівномірно розподілене по всій її площині, то складові цього навантаження становитимуть:

$$X = 0; Y = 0; Z = w_0.$$

Внутрішні зусилля становитимуть:

$$N_x = 0; N_y = 0; N_{xy} = -w_0/2c = -w_0a^2/2f.$$

Отже, в проекції оболонки нормальні зусилля рівні нулю, а дотичні по всьому полю є сталою величиною. Безмоментний стан оболонки зводиться до чистого зсуву. Головні зусилля постійні і чисельно рівні дотичним зусиллям, вони направлені вздовж діагоналей основи оболонки, одне з них розтягуюче – вздовж напрямку від'ємної кривини, а інше, вздовж напрямку додатної кривини, стискуюче.

Реалізувати безмоментний стан на практиці досить складно, оскільки це пов'язано з улаштуванням абсолютно жорсткого контуру, жорсткого стягеля або неподатливих контрфорсів; навіть незначна їх податливість веде до порушення основної вимоги існування безмоментного напруженого стану – появи переміщень геометричного згинання. Оболонка деформується при появі переміщень, викликаних згинанням серединної поверхні без видовжень і зсувів (чистий згин), що з позиції безмоментної теорії трактується як миттєва змінність. Тому практичним є розрахунок за моментною теорією.

Геометрично нелінійні задачі теорії оболонок характеризуються особливою складністю їх розв'язку.

Напочатку широкого застосування отримав метод малого параметра, проте пізніше основне місце зайняли прямі методи Бубнова-Гальоркіна та Рітца. Значна частина задач розв'язувалась методом П.Ф.Папковича – задавшись функцією прогинів, підставляли її у рівняння деформацій, інтегрували і знаходили вираз функції напружень. Далі методом Бубнова-Гальоркіна розв'язували рівняння рівноваги і визначали невідомі параметри; проте безпосереднє застосування цього методу до системи нелінійних рівнянь пологих оболонок дало широкі можливості при розв'язуванні крайових задач.

1. Железобетонные конструкции: Спец. курс. Учеб.пособие для вузов/ Байков В.Н., Дроздов П.Ф., Трифонов И.А. и др. Под ред. В.Н.Байкова - М.: Стройиздат, 1981.- 767 с. ил. 2. Самольянов И.И.. Прочность, устойчивость и колебания гиперболического параболоида. – Луцк.: Луцкий индустриальный институт. – 1993. – 316 с.