

УДК 624.012.25

**РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ СОПРОТИВЛЕНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С КОМБИНИРОВАННЫМ АРМИРОВАНИЕМ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫМИ И СТАЛЬНЫМИ СТЕРЖНЯМИ**

**РОЗРАХУНКОВА МОДЕЛЬ ОПОРУ ЗГИНАЛЬНИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З КОМБІНОВАНИМ АРМУВАННЯМ СКЛОПЛАСТИКОВИМИ ТА СТАЛЕВИМИ СТЕРЖНЯМИ**

**RESISTYANCE OF BENDING CONCRETE ELEMENTS WITH COMBINED STEEL AND FIBER-REINFORCED POLYMER (FRP) REINFORCEMENT**

**Тур В.В., д.т.н., професор; Малиха В.В., інженер (Брестський державний технічний університет)**

**Тур В.В., д.т.н., професор; Малиха В.В., інженер (Брестский государственный технический университет)**

**Tur V., Dr.-Dscience, Professor; Malykha V., Engineer (Brest State Technical University)**

**У статті наведені основні положення розрахункової моделі опору згинальних елементів з комбінованим армуванням сталевими і склопластиковими стержнями, які враховують роботу елемента у перерізах між тріщинами.**

**В статье представлены основные положения расчетной модели сопротивления изгибаемых элементов с комбинированным армированием стальными и стеклопластиковыми стержнями, учитывающей работу элемента в сечениях между трещинами.**

**Article is presented basis of design resistance model for concrete bending elements with combined steel and fiber-reinforced polymer bars, what take account resistance element in point between cracks.**

**Ключевые слова:**

Опір, арматура, зчеплення, полімер.

Сопротивление, арматура, сцепление, полимер.

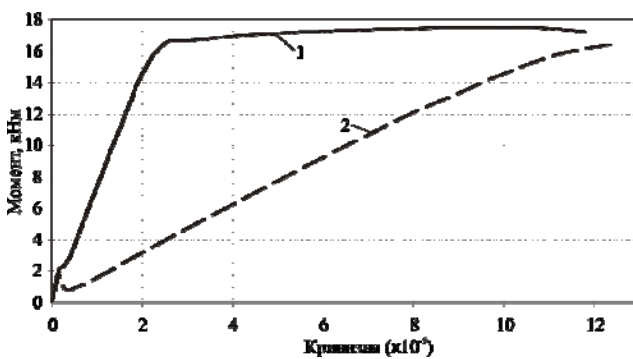
Resistance, reinforcement, bond, polymer.

**В последнее десятилетие в строительной практике** при возведении конструкций из бетона, эксплуатирующихся в агрессивных условиях окружающей среды, а также конструктивных элементов зданий специального назначения, широко применяют неметаллическую арматуру. В международной практике такую арматуру принято обозначать термином «полимерный композит, армированный волокнами» (англ. *fiber-reinforced polymer composite* – FRP). Более детально такую арматуру (FRP) классифицируют в зависимости от вида применяемого армирующего волокна и типа полимерного связующего. Подробную классификацию и технические характеристики полимерных композитов, армированных волокнами (FRP), применяемых в международной практике можно найти в рекомендациях [1–3] и актуальных технических стандартах. Следует отметить, что в национальной практике все более широкое применение получает арматура на основе стеклянных и базальтовых волокон на эпоксидном связующем, которую принято обозначать термином «арматура стеклопластиковая» (АСП).

Обладая достаточно высокой прочностью при растяжении ( $f_{yk} \approx 1000$  МПа), стеклопластиковая арматура имеет низкий модуль упругости (от 36 до 51 ГПа), соизмеримый с модулем упругости бетона. При этом диаграмма деформирования " $\sigma_f - \varepsilon_f$ " для этой арматуры представлена практически линейной зависимостью между напряжениями и относительными деформациями [3].

На рис. 1 показаны расчетные зависимости "момент – кривизна", полученные для изгибаемых элементов, армированных стальной и стеклопластиковой арматурой, при условии, что в обоих случаях сопротивление элемента является одинаковым. Как видно из представленных графиков (см. рис. 1), после образования трещин нормального отрыва изгибная жесткость элемента, армированного стеклопластиковой арматурой резко снижается по отношению к элементу, армированному стальными стержнями. При пошаговом нагружении элемента вплоть до предельного значения изгибающего момента, обусловленного, как правило, достижением предельных относительных деформаций бетона сжатой зоны, наблюдается практически линейная зависимость " $M - \varphi$ ". При этом следует обратить

внимание на одно важное обстоятельство – после образования трещин на графике зависимости "М – φ" практически полностью отсутствует участок пластического деформирования. Таким образом, в большинстве практических случаев (даже при  $\rho_{l,f} \leq \rho_{l,f,bal}$ ) разрушение носит хрупкий характер, что существенно образом оказывает влияние на надежность конструктивных элементов. В силу этого, в рекомендациях по проектированию, разработанных *fib* [3], при определении расчетных сопротивлений стеклопластиковой арматуры следует применять частный коэффициент  $\gamma_{f,s} = 1,5$ .



- 1 – армирование стальными стержнями
- 2 – армирование стеклопластиковыми стержнями

Рис. 1. Расчетные зависимости "момент – кривизна", полученные для изгибаемых элементов, армированных стальной и стеклопластиковой арматурой

**Обширные экспериментально-теоретические исследования элементов,** армированных неметаллическими (FRP) стержнями, выполненные на протяжении последних лет, позволили разработать нормативно-технические документы [1–3], содержащие базовые рекомендации по проектированию конструкций с указанным армированием.

Следует отметить, что включенные в эти документы расчетные модели сопротивлений, применяемые для проверок предельных состояний по методу частных коэффициентов согласно [8] практически не отличаются от принятых при проектировании железобетонных элементов, армированных стальными стержнями. Главным отличием от проектирования железобетонных элементов, принятым в рекомендациях [1–3], является введение повышенного значения частного коэффициента для неметаллической арматуры при проверках предельных состояний несущей

способности и ограничение напряжений (не более 30 % от характеристической прочности) в арматуре при проверках предельных состояний эксплуатационной пригодности (с учетом эффектов от длительного приложения нагрузки).

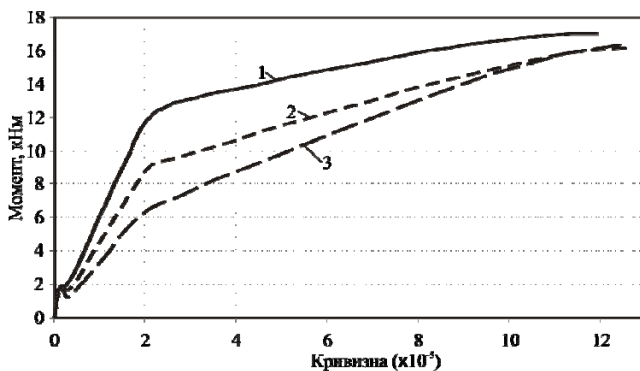
Несколько сомнительным выглядит применение в рекомендациях [3] модели "*tension stiffening*" для определения средних относительных деформаций неметаллической арматуры при расчете ширины раскрытия трещин и прогибов. Это следует, прежде всего, из различий в диаграммах " $\sigma - \epsilon$ ", описывающих законы сцепления такой арматуры с бетоном согласно MC2010 [6]. Принятые достаточно консервативные подходы при проектировании конструкций с неметаллической арматурой ведут к ощутимому недоиспользованию прочностных свойств композитного полимера, армированного волокнами (FRP), не создавая при этом требуемых резервов надежности.

**Ситуация может быть существенно улучшена** при использовании в одном конструктивном элементе как неметаллической, так и определенной доли стальной арматуры. Очевидно, что дополнительное количество стальной арматуры следует устанавливать с точки зрения повышения жесткостных характеристик элемента и ограничения ширины раскрытия трещин в эксплуатационной стадии. В соответствии с предложенным подходом до достижения текучести в стальной арматуре, последняя, работая совместно с неметаллической арматурой, контролирует ширину раскрытия трещин и повышает изгибную жесткость элемента.

После достижения текучести в стальной арматуре прирост усилия достигается за счет активного включения в работу неметаллической арматурой.

На рис. 2 приведены теоретические зависимости "момент – кривизна" для элементов с комбинированным армированием, полученные из расчета по деформационной модели для сечений при различных соотношениях коэффициентов продольного армирования ( $\rho_l$  и  $\rho_{lf}$ ). Приведенные зависимости " $M - \varphi$ " (см. рис. 2) дают полную качественную картину сопротивления элемента.

Необходимо отметить, что при постановке дополнительной стальной арматуры на графиках " $M - \varphi$ " появляется участок пластического деформирования, а начальная изгибная жесткость для элемента с трещинами повышается.



1 –  $\rho_l = 0,77\%$ ,  $\rho_{l,f} = 0,25\%$ ;

2 –  $\rho_l = 0,50\%$ ,  $\rho_{l,f} = 0,38\%$ ;

3 –  $\rho_l = 0,14\%$ ,  $\rho_{l,f} = 0,55\%$ ;

Рис. 2. Теоретические зависимости "момент – кривизна" для элементов с комбинированным армированием, полученные из расчета по деформационной модели для сечений при различных соотношениях коэффициентов продольного армирования ( $\rho_l$  и  $\rho_{l,f}$ )

При использовании в одном сечении стальной и неметаллической арматуры расчетные модели, предложенные в [1–3], требуют существенной корректировки, в частности при проверке предельных состояний эксплуатационной пригодности. В данном случае решение задачи может быть получено с использованием блочной модели, рассмотренной ниже.

#### Расчетная модель сопротивления изгибу элемента с комбинированным армированием

Как было показано, для элементов с комбинированным армированием не вполне корректно использовать общие зависимости, применяемые для контроля ширины раскрытия трещин и прогибов согласно [1–3], основанные на т.н. зависимостях "*tension stiffening*". Возможным вариантом решения задачи является рассмотрение расчетной модели для блока, выделенного трещинами, а не модели сечения (как это принято в традиционных случаях) с последующим усреднением расчетных параметров модели с учетом совместной работы армирующего элемента и бетона на участках между трещинами.

При формулюванні положень розрахункової моделі пропонується розглядати блок, виділений сусідніми тріщинами. Теоретичні підходи до побудови блочних моделей викладені в роботах [4, 5]. Для виділеного розрахункового блока (рис. 3) в загальному випадку можна записати:

$$\varepsilon_{\tilde{m}\tilde{m}}(x, d_g) = \frac{du_c}{dx} \quad (1)(1a)$$

$$\varepsilon_s(x, d_s) = \frac{du_s}{dx} \quad (16)$$

$$\varepsilon_{ct}(x) = \frac{du_{ct}}{dx} \quad (1b)$$

$$s(x) = u_s(x) - u_{ct}(x) \quad (1g)$$

де  $\varepsilon_{cc}(x, d_g)$  – відносна деформація найбільш стиснутої грані бетону;

$\varepsilon_s(x, d_g)$  – відносна деформація розтягнутої арматури;

$\varepsilon_{ct}$  – відносна деформація розтягнутого бетону;

$s(x)$  – взаємне проскальзування арматури відносно бетону.

Статическа задача в загальному випадку розв'язується з використанням модифікованих положень деформаційної моделі, детально викладеної, наприклад, в роботі [4]. В межах модифікованої деформаційної моделі для розрахункового блока використовується наступна система рівнянь:

– рівняння рівноваги продольних сил

$$\int_{A_c} \sigma_{cc}(x, y) \cdot b(y) dy - \int_{A_{ct}} \sigma_{ct}(x, y) \cdot b(y) dy - \sum_{i=1}^n A_{s,i} \cdot \sigma_{s,i}(x) - \sum_{k=1}^m A_{f,k} \cdot \sigma_{f,k}(x) = 0; \quad (2)$$

– рівняння рівноваги моментів

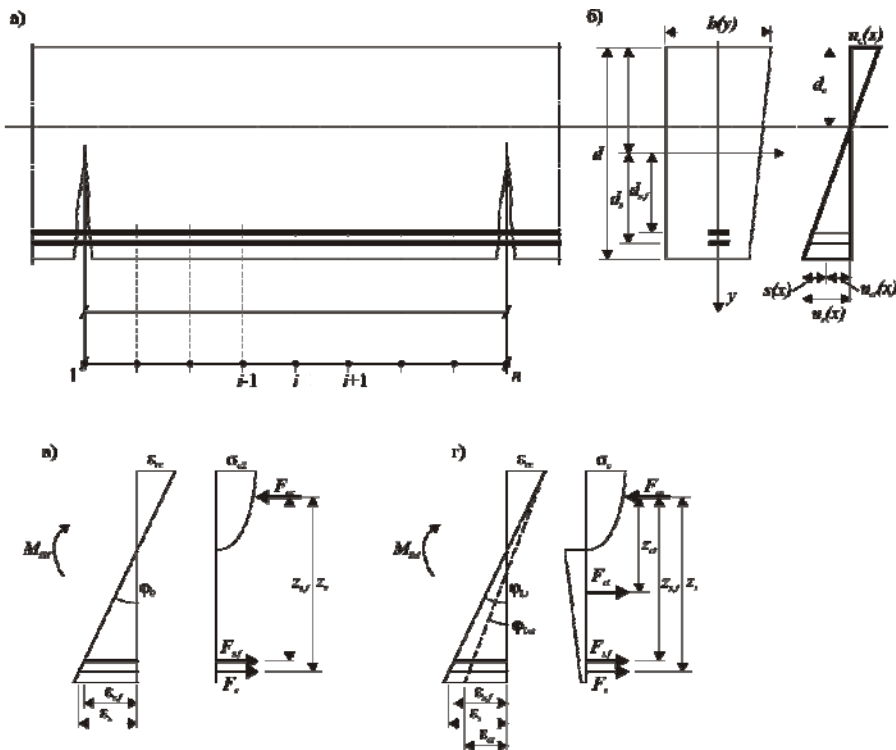
$$\int_{A_c} \sigma_{cc}(x, y) \cdot b(y) \cdot y \cdot dy - \int_{A_{ct}} \sigma_{ct}(x, y) \cdot b(y) \cdot y \cdot dy - \sum_{i=1}^n A_{s,i} \cdot \sigma_{s,i}(x) \cdot d_{s,i} - \sum_{k=1}^m A_{f,k} \cdot \sigma_{f,k}(x) \cdot d_{f,k} = M_{Ed}(x); \quad (3)$$

– рівняння рівноваги для окремого стержня

$$\frac{d\sigma_s(x)}{dx} - \frac{4}{\varnothing} \tau(x) = 0; \quad (4)$$

– уравнения для проскальзывания

$$\frac{ds(x)}{dx} = \varepsilon_s(x) - \varepsilon_{ct}(x). \quad (5)$$



(а) – схема расчетного блока;

(б) – распределение продольных перемещений в сечении с трещиной;

(в) – схема распределения продольных деформаций и усилий для сечения с трещиной;

(г) – схема распределения продольных деформаций и усилий для "i"-го сечения между трещинами

Рис. 3. К построению модели сопротивления изгибаемого элемента с комбинированным армированием

Кроме того, исходную систему уравнений (2)..(5) следует дополнить диаграммами деформирования для материалов " $\sigma_c - \varepsilon_c$ ", " $\sigma_s - \varepsilon_s$ ", " $\sigma_f - \varepsilon_f$ " и диаграммами, связывающими величину касательных напряжений  $\tau$  с величиной проскальзывания  $s$ .

На аналитическом описании диаграмм " $\tau - s$ " следует остановиться более подробно, т.к. они играют ключевую роль в оценке напряженно-деформированного состояния расчетного блока. Для стальной арматуры диаграмма " $\tau - s$ " может быть принята в соответствии с указаниями ModelCode 2010 [6] (рис. 4). Аналитическое описание диаграммы принято в следующем виде:

$$\tau_0 = \tau_{\max} \left( s/s_1 \right)^\alpha \quad \text{при } 0 \leq s \leq s_1;$$

$$\tau_0 = \tau_{\max} \quad \text{при } s_1 < s \leq s_2;$$

$$\tau_0 = \tau_{\max} \frac{(\tau_{\max} - \tau_f)}{(s_3 - s_2)} \quad \text{при } s_2 < s \leq s_3;$$

$$\tau_f \quad \text{при } s > s_3.$$

Параметрические точки диаграммы " $\tau - s$ " для стальной арматуры (при  $\varepsilon_s < \varepsilon_{sy}$ ) могут быть приняты по табл. 1.

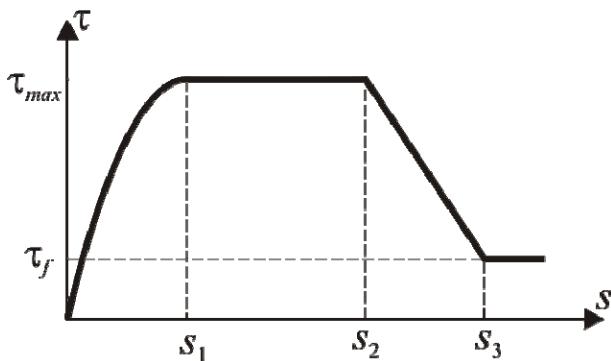


Рис. 4. Зависимость " $\tau - l$ " для стальных стержней согласно MC2010 [6]



Таблиця 1

Параметрические точки диаграммы "τ – s" для стальной арматуры согласно MC2010 (область деформирования  $\epsilon_s < \epsilon_{sy}$ ) [6]

Параметрическая точка диаграммы (рис. 4)	Условия сцепления	
	хорошие	другие
$\tau_{max}$	$2,5 \sqrt{f_{ck}}$	$1,25 \sqrt{f_{ck}}$
$s_1$	1,0 мм	1,8 мм
$s_2$	2,0 мм	3.6 мм
$s_3$	$C_{clear}^{1)}$	$C_{clear}$
$\alpha$	0,4	0,4
$\tau_f$	$0,4\tau_{max}$	$0,4\tau_{max}$

<sup>1)</sup>  $C_{clear}$  – расстояние между стержнями.  
Толщина защитного слоя  $\geq 5\varnothing$ ;  
 $C_{clear} \geq 10\varnothing$ .

Необходимо отметить, что MC2010 содержит корректирующие коэффициенты, учитывающие изменение условий сцепления для стальной арматуры: 1) при действии поперечных сжимающих напряжений; 2) при достижении относительных деформаций, соответствующих началу текучести ( $\epsilon_s \leq \epsilon_{sy}$ ). В этом случае параметрические точки исходной диаграммы "τ – s" подвергаются модификации при помощи коэффициентов:

$$\tau_{bm} = \tau_0 \cdot \theta_y \cdot \theta_{p,tr}; \tag{6}$$

где  $\theta_y = 1 - \left[ 0,85 \left( 1 - e^{-5a^b} \right) \right]$  при  $\epsilon_{sy} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{su}$ ;  $\tag{7}$

$$a = \frac{\epsilon_s - \epsilon_{sy}}{\epsilon_{su} - \epsilon_{sy}}; b = 2 - \frac{f_{tk}}{f_{yk}}; \tag{8}$$

$$\theta_{p,tr} = 1 - \tanh \left[ 0,2 \left( \frac{\bar{\sigma}_\perp}{0,1 f_{cm}} \right) \right] \text{ при } \sigma_{c\perp} \leq 0. \tag{9}$$

В соответствии с MC2010 [6] для описания закона сцепления неметаллической арматуры (FRP) предложена диаграмма "τ<sub>f</sub> – s<sub>f</sub>" (рис. 5).

Аналитическое описание диаграммы "τ<sub>f</sub> – s<sub>f</sub>" представлено в следующем виде:

$$\tau_f = \tau_{f,m} \left( s_f / s_{f,m} \right)^\alpha \quad \text{при } 0 \leq s_f < s_{f,m};$$

$$\tau_f = \tau_{f,m} - \tau_{f,m} \left( s_f - s_{f,m} \right) / s_{f,m} \quad \text{при } s_{f,m} \leq s_f \leq s_{f,n}.$$

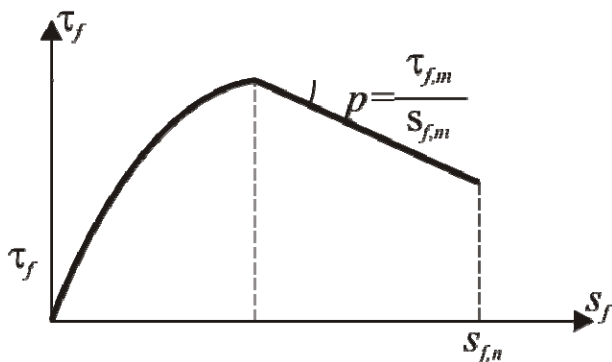


Рис. 5. Диаграмма деформирования " $\tau_f - s_f$ " для неметаллической арматуры согласно МС2010 [6]

Как следует из указаний, приведенных в МС2010 [6], значения параметрических точек диаграммы " $\tau_f - s_f$ " для соответствующего вида неметаллической арматуры следует определять опытным путем.

Точное решение задачи, в частности при проверках предельных состояний эксплуатационной пригодности, может быть получено из системы дифференциальных уравнений в каждом интервале интегрирования с соответствующими граничными условиями. В частности, для концевых участков расчетного блока распределение относительных деформаций и напряжений может быть получено непосредственно из расчета по деформационной модели сечения с трещиной.

Решение исходной системы дифференциальных уравнений усложняется тем обстоятельством, что некоторые из них являются нелинейными и, кроме того, величина сцепления зависит от положения расчетного сечения на длине блока по отношению к сечению с трещиной. В связи с этим для решения задачи может быть рекомендована итерационная процедура, основанная на численном решении в конечных разностях по методу "*regula falsi*".

Так, в частности, если из граничных условий известны значения напряжений в арматуре  $\sigma_{s,1}$  и  $\sigma_{s,n}$  на концах расчетного блока, тогда смещения  $s_1$  и  $s_n$  – неизвестны. Для решения задачи задается начальное

значение  $s_1$  на итерации для одного конца расчетного блока и вычисляется напряжение в арматуре  $\sigma_{s,n}$  – в сечении на другом конце расчетного блока.

На произвольной итерации "j" процедура включает расчет параметров в узле "i+1" через значения, полученные в узле "i".

Выражения в конечных разностях имеют вид:

$$\sigma_{s,i+1}^{(j)} = \sigma_{s,i}^{(j)} + \frac{4}{\emptyset} \tau_i^{(j)} \cdot \Delta x; \quad (10)$$

$$s_{i+1}^{(j)} = s_i^{(j)} + \Delta x \left( \frac{\varepsilon_{s,i+1}^{(j)} + \varepsilon_{s,i}^{(j)}}{2} - \frac{\varepsilon_{ct,i+1}^{(j)} + \varepsilon_{ct,i}^{(j)}}{2} \right). \quad (11)$$

Решение базируется на получении граничных значений относительных деформаций  $\varepsilon_{s,1}^{(j)}$  и  $\varepsilon_{c,1}^{(j)}$  и соответствующих напряжений  $\sigma_{s,1}^{(j)}$  и  $\sigma_{c,1}^{(j)}$  (по диаграммам деформирования "σ – ε" для материалов) для сечения с трещиной (в соответствии с принятыми предпосылками расчетной модели для сечения с трещиной  $\sigma_{ct,1}^{(j)} = 0$ ).

После того, как начинается процедура расчета на "j" итерации, напряжения в соответствующем стержневой арматуры  $\sigma_{s,i+1}^{(j)}$  определяют по (10) в точке "i+1" и, используя глобальные условия равновесия для сечений, вычисляют значения  $\sigma_{c,i+1}^{(j)}$  и  $\sigma_{ct,i+1}^{(j)}$ . Установив значения относительных деформаций  $\varepsilon_{s,i+1}^{(j)}$  и  $\varepsilon_{ct,i+1}^{(j)}$  определяют соответствующее значение проскальзывания  $s_{i+1}^{(j)}$ . После того, как установлены  $\sigma_{s,n}^{(j)}$ , проверяется условие:

$$F \left[ s_1^{(j)} \right] = \sigma_{s,n} - \sigma_{s,n}^{(j)} \left( s_1^{(j)} \right) = 0. \quad (12)$$

С использованием метода тангенсов условие может быть выражено:

$$s_1^{(j)} = s_1^{(j-1)} - \frac{\sigma_{s,n} - \sigma_{s,n}^{(j-1)}}{\sigma_{s,n}^{(j-2)} - \sigma_{s,n}^{(j-1)}} \left( s_1^{(j-2)} - s_1^{(j-1)} \right). \quad (13)$$

Для инициации итерационной процедуры следует принять начальное значение проскальзывания  $s_1^{(0)}$ . На первой итерации это значение может быть принято, исходя из того условия, что верхний предел величины проскальзывания  $s_1^{(0)}$  рассчитывают для данного уровня нагружения

умножением максимальной относительной деформации арматуры в сечении с трещиной  $\varepsilon_{s,1}^{(j)}$  на длину расчетного блока, равного расстоянию между соседними трещинами.

При условии, что сходимость итерационного процесса достигнута, и известно распределение относительных деформаций как по высоте сечения, так и по длине расчетного блока, кривизна  $\chi_i$  в  $i$ -ом сечении может быть рассчитана по формуле:

$$\chi_i = \frac{\varepsilon_{s,i}}{d - x_i}, \quad (14)$$

где  $d$  – рабочая высота сечения (расстояние от наиболее сжатой грани сечения до ц.т. соответствующего ряда растянутой арматуры;

$x_i$  – высота сжатой зоны сечения.

Полученные параметры напряженно-деформированного состояния могут быть далее использованы при проверках условий предельных состояний эксплуатационной пригодности элемента с комбинированным армированием.

## Выводы

Предложенная модифицированная блочная модель для оценивания напряженно-деформированного состояния позволяет рационально подойти к проектированию бетонных элементов, имеющих комбинированное армирование стальными и стеклопластиковыми стержнями. Применение в одном сечении стальной арматуры в дополнение к полимерному композиту позволяет не только рационально использовать прочностные свойства стеклопластиковой арматуры, но и повысить надежность конструктивных элементов, выполненных с ее применением.

**1.** fib 2005 "FRP Reinforcement for reinforced concrete structures", Task Group 9.3 (Fiber-Reinforced Polymer) Reinforcement for Concrete Structures, Lausanne, Switzerland, 2005 – 173 p. **2.** ACI 440.1R-03 " Guide for the Design and Construction of Concrete Reinforced with FRP Bars", American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, USA – 2003 – 81 p. **3.** Guide for the Design and Construction of Concrete Structures Reinforced with Fiber Reinforced Polymer Bars – CNR–DT 203/206, Rome, June 2007 – 35 p. **4.** Mantredi G., Pecce M. "A refined R.C. beams elements including bond-slip relationships for the analysis of continuous beams"/ Computer and Structures, Volume 69, Issue 1, October 1998 – p.p. 53–62. **5.** Kisicek T., Soric Z., Galic J. Stress and strain distribution in concrete beams reinforced with FRP Bars – FRP RCS – 9, Sydney, Australia – July 2009 – p.p. 73–82. **6.** ModelCode 2010. **7.** СТБ 1103–98. Арматура стеклопластиковая. Технические условия. **8.** EN 1990:2004. Basis of Structural Design. European Standard. CEN