УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН У АНІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ З ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ БІЛЯ МІКРОТРІЩИН

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ОКОЛО МИКРОТРЕЩИН

STRESSES NEAR MICROCRACKS IN ANISOTROPIC PLATE WITH HARD INCLUDING

Божидарнік В.В., д.т.н., проф., **Бортнік К.Я.**, **Максимович О.В.**, д.т.н., проф. (Луцький національний технічний університет)

Божидарник В.В., д.т.н., проф., **Бортник К.Я**., **Максимович О.В.**, д.т.н., проф. (Луцкий национальный технический университет)

Bozhidarnik V., Doctor of Engineering, Professor, **Bortnyk K., Macsimovich O.**, Doctor of Engineering, Professor (Lutsk National Technical University)

Розроблено алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану анізотропних пластинок із півнескінченим жорстким включенням та тріщинами.

Разработан алгоритм рассчета напряженно-деформированного состояния анизотропных пластинок с полубесконечным жестким включением и трещинами.

The algorithm of calculation of the tensely deformed state of anisotropic plates is worked out from half unfinished hard including and cracks.

Ключові слова:
Анізотропія, пластинка, включення, тріщина, напруження.
Анизотропия, пластинка, включение, трещина, напряжения.
Anisotropy, plate, including, crack, tension.

У механіці руйнування приймають, що на початковій стадії процесу руйнування тріщина підростає вздовж прямої. Тому важливе значення має задача про визначення напружень біля тріщини, коли відношення довжини бічної тріщини до включення є нескінченно малим.

Така задача детально вивчена для ізотропних матеріалів [4,5], причому її розв'язування проведено головним чином на основі розгляду включень скінченої довжини та тріщини із наступним числовим переходом до границі.

У статті розглядається анізотропна пластинка з півнескінченним жорстким включенням і тріщинами. Розв'язок побудовано на основі методу інтегральних рівнянь, ядрами в яких є розв'язки типу Гріна допоміжної задачі теорії пружності.

При цьому задані умови на прямолінійному півнескінченному включенні задовольняються автоматично, що дозволяє спростити розв'язування конкретних задач та підвищити точність розрахунків.

Загальний розв'язок задачі теорії пружності для багатозв'язних анізотропних пластинок з тріщинами. Наведемо основні співвідношення плоскої анізотропної задачі теорії пружності, які далі будуть використовуватись. Розглянемо довільну криву Γ, яка лежить в області *D*, що займає пластинка та виберемо на ній додатній напрямок обходу. Введемо вектор $\overrightarrow{S_\Gamma}$ на дотичній до кривої площинці, нормаль до якої розміщена справа відносно вибраного напрямку обходу.

Проекції (X_Γ, Y_Γ) вектора $\overrightarrow{S_\Gamma}$ і похідні від переміщень (u, v) за дуговою координатою на кривій через комплексні потенціали Лехніцького визначаються за формулами [1,2]

$$Y_\Gamma = -2\,\mathrm{Re}\left[\Phi(z_1)z_1' + \Psi(z_2)z_2'\right],\quad X_\Gamma = 2\,\mathrm{Re}\left[s_1\Phi(z_1)z_1' + s_2\Psi(z_2)z_2'\right], \quad (1)$$

$$u' = 2\,\mathrm{Re}\left[p_1\Phi(z_1)z_1' + p_2\Psi(z_2)z_2'\right],\quad v' = 2\,\mathrm{Re}\left[q_1\Phi(z_1)z_1' + q_2\Psi(z_2)z_2'\right], \quad (2)$$

де $z_j = x + s_j y$, $u' = du/ds$, $v' = dv/ds$, $z_j' = dx/ds + s_j dy/ds$, $p_j = a_{11}s_j^2 + \alpha_{12} - \alpha_{16}s_j$, $q_j = \alpha_{12}s_j + \alpha_{22}/s_j - \alpha_{26}$, $j = 1,2$; ds – диференціал дуги на Γ; s_j – корені характеристичного рівняння; α_{ij} – пружні сталі, які входять у закон Гука.

Далі введемо в розгляд вектор напружень $q_\Gamma(z) = X_\Gamma + iY_\Gamma$ на кривій Γ, який з використанням формул (1), визначається за формулою

$$q_\Gamma = (s_1 - i)z_1'\Phi(z_1) + (\overline{s_1} - i)\overline{z_1'}\,\overline{\Phi(z_1)} + (s_2 - i)z_2'\Psi(z_2) + (\overline{s_2} - i)\overline{z_2'\Psi(z_2)}. \quad (3)$$

Між потенціалами та напруженнями і похідними від переміщень на кривій Γ справедливі взаємозв'язки [2]

$$\Phi(z_1) = \frac{-v' + s_1u' + p_1X_\Gamma + q_1Y_\Gamma}{\Delta_1 z_1'},\quad \Psi(z_2) = \frac{-v' + s_2u' + p_2X_\Gamma + q_2Y_\Gamma}{\Delta_2 z_2'}. \quad (4)$$

де $\Delta_1 = \alpha_{11}(s_1 - s_2)(s_1 - \overline{s_1})(s_1 - \overline{s_2})$, $\Delta_2 = \alpha_{11}(s_2 - s_1)(s_2 - \overline{s_1})(s_2 - \overline{s_2})$.

Інтегральні рівняння задачі для нескінченної пластинки відносно стрибків переміщень. Для побудови загального розв`язку задачі розглянемо спочатку нескінченну область, що містить розріз *L*. На основі (4) для цього випадку для потенціалів Лехніцького маємо інтегральні зображення

$$\Phi(z_1) = \int_L \left[g_1^{'} \Phi_1(z_1, t_1) + g_2^{'} \Phi_2(z_1, t_1) \right] ds + \Phi_S(z_1),$$

$$\Psi(z_2) = \int_L \left[g_1^{'} \Psi_1(z_2, t_2) + g_2^{'} \Psi_2(z_2, t_2) \right] ds + \Psi_S(z_2). \qquad (5)$$

де $g_j^{'} = dg_j / ds$, $g_1 = u^+ - u^-$, $g_2 = v^+ - v^-$, $u^{\pm}$, $v^{\pm}$ – граничні значення переміщень при підході до розрізу зліва і справа відносно вибраного напрямку; $\Phi_S(z_1), \Psi_S(z_2)$– потенціали для суцільної площини, які відповідають прикладеним зусиллям на нескінченності та зосередженим силам.

$$\Phi_1(z_1,t_1) = \frac{A_1}{t_1 - z_1},\ \Phi_2(z_1,t_1) = \frac{A_2}{t_1 - z_1},\ \Psi_1(z_2,t_2) = \frac{B_1}{t_2 - z_2},\ \Psi_2(z_2,t_2) = \frac{B_2}{t_2 - z_2}, \qquad (6)$$

$$A_1 = -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1},\quad A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1},\quad B_1 = -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2},\quad B_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_2}, \qquad (7)$$

За дії зосередженої сили *(X, Y)*, що прикладена в точці (x_0, y_0), потенціали $\Phi_S(z_1), \Psi_S(z_2)$ будуть [1]

$$\Phi_S(z_1) = i\frac{p_1 X + q_1 Y}{2\pi\Delta_1 \left(z_1 - z_{10}\right)},\ \Psi_S(z_2) = i\frac{p_2 X + q_2 Y}{2\pi\Delta_2 \left(z_2 - z_{20}\right)} \qquad (8)$$

Потенціали Φ_j, Ψ_j належать до класу дислокаційних розв'язків, детально розглянутих у [3], причому тут їм дана відповідна механічна інтерпретація.

Модифіковані інтегральні рівняння для пластинки з включенням і тріщинами. Нехай пружна анізотропна пластинка займає область *D*, що обмежена контуром L_D. У випадку, коли область обмежена, контур L_D є зовнішньою межею області *D*. Приймемо, що пластинка додатково послаблена тріщиною, яка лежить на контурі *L*. Розглянемо випадок, коли пластинка перебуває під дією зусиль на нескінченності (для пластинок нескінченних розмірів) та зосереджених сил.

У літературі для ізотропних пластинок будують модифіковані інтегральні рівняння, за яких умови на вибраному отворі (включенні) задовольняються тотожно.

Таким чином досліджувались також плоскі задачі теорії пружності для деяких форм анізотропних пластинок [1,2].

Модифіковане інтегральне зображення. Розглянемо випадок, коли пружна анізотропна пластинка займає задану область D з вільною від навантаження або закріпленою межею.

Побудуємо інтегральні рівняння для даної пластинки з тріщинами так, щоби умови на межі області D виконувались автоматично. З цією метою спочатку побудуємо комплексні потенціали Лехніцького Φ_j^D, Ψ_j^D ($j=1, 2$), які є розв'язком задачі теорії пружності для області D з вільною від навантаження або закріпленою межею, за умови, що ці функції мають наступні особливості

$$\Phi_j^D \sim \frac{A_j}{z_{10}-z_1},\ \Psi_j^D \sim \frac{B_j}{z_{20}-z_2}, \tag{9}$$

де $z_{10}=x_0+s_1y_0$, $z_{20}=x_0+s_2y_0$, $(x_0,y_0)\in D$. Позначимо ці потенціали $\Phi_j^D(z_1,T)$, $\Psi_j^D(z_2,T)$, де T – точка з координатами (x_0,y_0).

Загальний розв'язок даної задачі теорії будемо шукати у вигляді

$$\Phi(z_1)=\int_L[\Phi_1^D(z_1,T)g_1'(s)+\Phi_2^D(z_1,T)g_2'(s)]ds+\Phi_D(z_1),$$

$$\Psi(z_2)=\int_L[\Psi_1^D(z_2,T)g_1'(s)+\Psi_2^D(z_2,T)g_2'(s)]ds+\Psi_D(z_2), \tag{10}$$

де $\Phi_D(z_1)=\Phi_D^P(z_1)+\Phi_D^\infty(z_1)$, $\Psi_D(z_2)=\Psi_D^P(z_2)+\Psi_D^\infty(z_2)$, T– точка (ξ,η), за якою проводиться інтегрування. Тут потенціали Φ_D^∞, Ψ_D^∞ та Φ_D^P, Ψ_D^P – розв'язки задач теорії пружності для області D з однорідними умовами на межі при дії прикладених до пластинки на нескінченності зусиль (для обмежених пластинок рівні нулю) або зосереджених сил відповідно.

Потенціали $\Phi_j^D(z_1,T)$, $\Psi_j^D(z_2,T)$ складаються з особливих функцій $\Phi_j(z_1,t_1)$, $\Psi_j(z_2,t_2)$, що введені вище стосовно до нескінченних пластинок та регулярних функцій. Тому зображення (5), (10) визначають однакові стрибки переміщень на контурі L. Також, за побудовою, потенціали (10) тотожно задовольняють задані однорідні умови на межі області D при довільних функціях g_1', g_2'.

Інтегральні рівняння для знаходження функцій $g_1'(s), g_2'(s)$ у випадку тріщин отримуємо після підстановки (10) в граничні умови за використання формули Сохоцького при граничному переході у вигляді

$$\int_{\Gamma}\left[g_1^{'}(s)Q_1(Z,T)+g_2^{'}(s)Q_2(Z,T)\right]ds=Q(Z),\ Z\in L\,, \qquad (11)$$

де $Q(Z)=Q_T(Z)-Q_D(Z)$; $Q_j(Z,T)-$ вектор напружень q_L в точці Z з координатами (x,y) на кривій L, який визначається за формулою (3) через комплексні потенціали $\Phi_j^D(z_1,T),\Psi_j^D(z_2,T)$; T – точка з координатами (ξ,η); $Q_D(Z)$ – вектор напружень, відповідний потенціалам $\Phi_D(z_1),\Psi_D(z_2)$.

Таким чином, для реалізації підходу немає необхідності виписувати ядра інтегральних рівнянь для кожної нової області – достатньо тільки окремо записати співвідношення для визначення напружень, які відповідають дислокаційним потенціалам. Система алгебраїчних рівнянь, відповідна інтегральним рівнянням (11), будується методом механічних квадратур [1].

Побудова допоміжних (дислокаційних) розв'язків. Розглянемо задачу знаходження функцій $\Phi_j^D(z_1,M),\ \Psi_j^D(z_2,M)$, де M – точка $(x_0,y_0)\in D$, D – область, яку займає пластинка поза включенням. Для їх знаходження введемо комплексні потенціали $\Phi_0(z_1)$, $\Psi_0(z_2)$ для області D, за умови, що ці функції мають наступні особливості

$$\Phi_0(z_1)\sim\frac{A}{z_1-z_{10}},\ \ \Psi_0(z_2)\sim\frac{B}{z_2-z_{20}}, \qquad (12)$$

та відповідні їм переміщення на включенні рівні нулю. Тут A,B – довільні комплексні сталі; $z_{j0}=x_0+s_jy_0$. За побудованих таким чином потенціалів дислокаційні розв'язки будуть

$$\Phi_j^D(z_1,M)=-\Phi_0(z_1)\big|_{A=A_j,B=B_j},\ \Psi_j^D(z_2,M)=-\Psi_0(z_2)\big|_{A=A_j,B=B_j}.$$

Для побудови розв'язку типу Гріна задачі теорії пружності для напівнескінченного включення *x>0* використаємо комплексні потенціали для пластинки з еліптичним жорстким включенням із півосями a,b та центром в т. $(a,0)$ [1]. Після граничного переходу $a\Rightarrow\infty$ отримуємо комплексні потенціали для півнескінченного включення *x>0, y=0* у вигляді

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\sqrt{z}}\left[\frac{A}{\sqrt{z}-\zeta_1}+\alpha_1^{'}\frac{\overline{A}}{\sqrt{z}-\overline{\zeta_1}}+\beta_1^{'}\frac{\overline{B}}{\sqrt{z}-\overline{\zeta_2}}\right],$$
$$\Psi_0(z)=\frac{1}{2\sqrt{z}}\left[\frac{B}{\sqrt{z}-\zeta_2}+\alpha_2^{'}\frac{\overline{A}}{\sqrt{z}-\overline{\zeta_1}}+\beta_2^{'}\frac{\overline{B}}{\sqrt{z}-\overline{\zeta_2}}\right]. \qquad (13)$$

де $\alpha_1^{'} = \dfrac{\overline{p}_1 q_2 - p_2 \overline{q}_1}{\Delta}$, $\beta_1^{'} = \dfrac{\overline{p}_2 q_2 - p_2 \overline{q}_2}{\Delta}$, $\alpha_2^{'} = \dfrac{\overline{p}_1 q_1 - p_1 \overline{q}_1}{\Delta}$, $\beta_2^{'} = \dfrac{\overline{p}_2 q_1 - p_1 \overline{q}_2}{\Delta}$,

$\zeta_j = \sqrt{z_{j0}}$, $\Delta = p_1 q_2 - p_2 q_1$.

Умови для комплексних потенціалів на граничних контурах**.** Приймемо, що відомі проекції (Y_L, X_L) та момент відносно початку координат M_L вектора всіх сил, які прикладені до граничного контуру *L*. Інтегруючи ці співвідношення проти годинникової стрілки, отримуємо

$$\int_{L_1} \Phi(z_1)\, dz_1 = -\frac{p_1 X_L + q_1 Y_L}{\Delta_1}, \quad \int_{L_2} \Psi(z_2)\, dz_2 = -\frac{p_2 X_L + q_2 Y_L}{\Delta_2}, \tag{14}$$

де L_j – криві в системах координат (x_j, y_j), в які при афінних перетвореннях $x_j = x + \mathrm{Re}(s_j) y$, $y_j = x + \mathrm{Im}(s_j) y$ переходить крива *L*.

На основі [1] маємо також ще умову

$$\mathrm{Re}\left[\int_{L_1} z_1 \Phi(z_1)\, dz_1 + \int_{L_2} z_2 \Psi(z_2)\, dz_2 \right] = -M_L / 2 . \tag{15}$$

Знаходження основного напруженого стану. Розглянемо два випадки.

1) Однорідний напружений стан для пластинки з півнескінченним жорстким включенням. За відомих КІН K_j відповідні потенціали шукаємо у вигляді

$$\Phi_D(z_1) = \frac{C_1}{\sqrt{z_1}}, \ \Psi_D(z_2) = \frac{C_2}{\sqrt{z_2}},$$

де C_1, C_2 - невідомі коефіцієнти, які отримуємо з системи рівнянь

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(p_1 C_1 + p_2 C_2) = 0, \\ \mathrm{Re}(q_1 C_1 + q_2 C_2) = 0, \\ \mathrm{Im}(C_1 + C_2) = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi}}, \\ \mathrm{Im}(s_1 C_1 + s_2 C_2) = -\dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}. \end{cases}$$

У цій системі перші два рівняння забезпечують відсутність переміщень на жорсткому включенні, а два останні – забезпечують задані КІН (напруження на продовженні включення будуть $\sigma_y = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \tau_{xy} = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}$).

2) Дія зосередженої сили (X, Y), прикладеної в точці (x_0, y_0). Тоді з огляду на зображення (8) потенціали Φ_D, Ψ_D – визначаються за формулами (13), в яких $A = i\dfrac{p_1 X + q_1 Y}{2\pi\Delta_1}$, $B = i\dfrac{p_2 X + q_2 Y}{2\pi\Delta_2}$.

Чисельний розв'язок ГІР проводився з умови обмеженості напружень у точках виходу тріщини з вершини включення.

Розглянемо тріщину довжиною *l*, що виходить із вершини півнескінченного включення $x > 0$, і нахилена під кутом α до від'ємної півосі *Ox*. Приймемо, що відомі КІН для включення, які позначимо через K_I^0, K_{II}^0.

Результати розрахунків. З метою тестування розробленого алгоритму розглянемо ізотропну пластинку із жорстким прямолінійним включенням довжиною *l*, яка розтягується зусиллями *q*, що діють під кутом φ до осі *Ox*. За відсутності його повороту [4, 5]

$$K_I^g = p\sqrt{\pi l / 32}(1 - \chi - 2\cos 2\varphi), K_{II}^g = p\sqrt{\pi l / 8}\sin 2\varphi .$$

Тут, згідно [5], позначено КІН K_I^g, K_{II}^g, які визначаються так: $K_I = K_I^g c_g$, $K_{II} = K_{II}^g c_g$, де $c_g = \dfrac{\chi - 1}{2\chi}$.

Розглянемо тріщину півдовжиною *a*, яка виходить із вершини включення під кутом α відносно від'ємної півосі *Ox*. Виконаємо розрахунки для ізотропної пластинки із тріщиною нескінченно малої довжини на основі розгляду півнескінченного включення з тріщиною.

Розраховані відносні КІН при $\chi = 2$ залежно від кута нахилу $\alpha = j\pi / 18$ та відповідні значення, отримані в роботі [4] методом конформного відображення, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Розраховані відносні КІН при $\chi = 2$ залежно від кута нахилу $\alpha = j\pi / 18$

	$\varepsilon = 0$				$\varepsilon \neq 0$			
j	F_I	F_I [4]	F_{II}	F_{II} [4]	F_I	F_I [4]	F_{II}	F_{II} [4]
-17	0,1865	0,180	-0,0804	-0,083	0,0011	0,0004	0,0997	0,107
-8	-0,1162	-0,118	-0,0213	-0,023	0,0923	0,094	-0,0654	-0,068
0	0,039	0,036	0,078	0,08	-0,039	-0,036	0	0,003
8	-0,0684	-0,072	-0,1522	-0,154	0,0923	0,096	0,0654	0,063
14	-0,2431	-0,248	-0,0118	-0,013	0,0859	0,085	-0,0739	-0,072
17	-0,1886	-0,186	0,119	0,125	0,0011	0,003	-0,0997	-0,101

Із таблиці видно, що знайдені різними методами результати є близькими. Розрахунки за розробленим алгоритмом проводились із контролем точності, в той же час дані роботи [4] знаходились на основі включення кінцевої довжини із використанням екстраполяційних формул, точність яких обмежена. Для оцінки точності вкажемо, що для півнескінченного включення з тріщиною на продовженні включення КІН визначаються за точними формулами [5]

$$K_I = AK_I^g,\ K_{II} = AK_{II}^g, \quad \text{де } A = \frac{\ln \chi}{\pi\sqrt{\chi}}.$$

Розраховані ними значення відносних КІН при $\alpha = 0$ дорівнюють 0,039 і 0,078, тобто збігаються із відповідними даними, знайденими за розробленим алгоритмом і дещо відрізняються від відповідних даних [5] 0,036 і 0,08.

Розглянемо випадок, коли для жорсткого включення КІН відомі, причому $K_I^G \neq 0$, $K_{II}^G = 0$. Розрахований розподіл КІН для тріщини, нахиленої під кутом α до осі Ox в ізотропній пластинці наведено на рис.1.а (суцільним лініям відповідають відношення K_I / K_I^G, а штриховим K_{II} / K_{II}^G). Аналогічні результати для пластинок з матеріалів ЕТФ, CF1, $CF1_{90}$ наведені на рис. 1.б, 2.

Напрямок із максимальною жорсткістю паралельний до осі *Oy*. Матеріали ЕТФ і CF1 ($CF1_{90}$ -повернутий на 90^0 матеріал CF1) за механічними властивостями належать до відповідно слабо-, та істотно анізотропних.

Із наведених рисунків випливає, що розподіл КІН для різних анізотропних матеріалів має такий самий характер, як і для ізотропних пластинок (хоча кількісно їх значення можуть і відрізнятись при збільшенні міри анізотропії),

якщо включення перпендикулярне до напрямку з максимальною жорсткістю матеріалу.

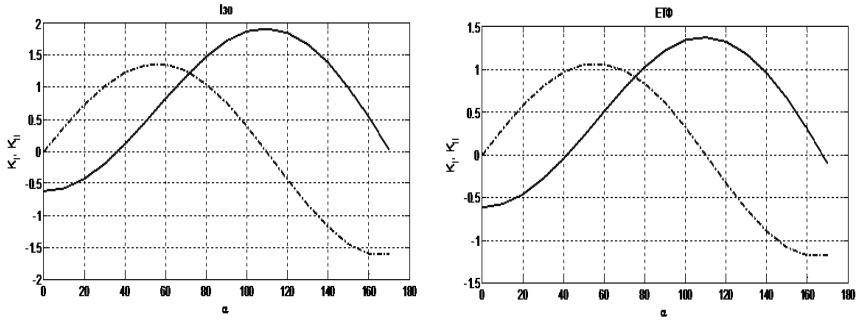

Рис. 1. КІН для нахилених тріщин, матеріал – ізотропія (а) і ЕТФ (б)

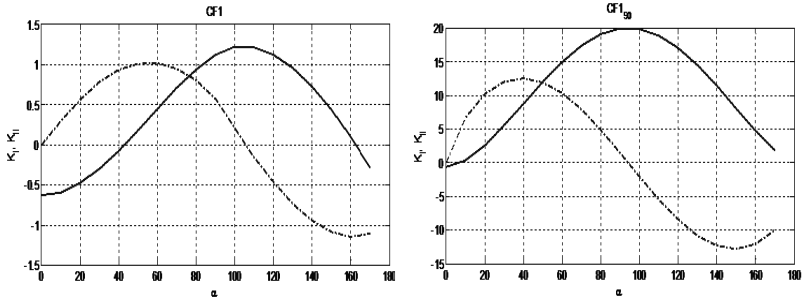

Рис. 2. КІН для нахилених тріщин, матеріал – CF1 (а) і $CF1_{90}$ (б)

Висновок. Розроблено методику дослідження напружень біля тріщин малих розмірів, що виростають із вершини жорсткого включення в анізотропних пластинках. Досліджено характерні властивості розподілу КІН залежно від кута нахилу тріщин та анізотропії матеріалу. Встановлено, що в околі тріщин рівень напружень зростає при включеннях, перпендикулярних напрямку із максимальною жорсткістю матеріалу, якщо біля вершини має місце розтяг.

1. В.В. Божидарнік, О.В. Максимович. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами / Монографія. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – С. 226. **2.** Максимович О. Розрахунок напруженого стану анізотропних пластинок з отворами і криволінійними тріщинами при врахуванні контакту їхніх берегів / Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – № 3. – С. 36-42. **3.** Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / М.: Наука, 1966. – С. 708. **4.** Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / К.: Наук. думка, 1988. – С. 620. **5.** Сташук Н.Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами / К.: Наук. думка, 1993. – С. 359.