УДК 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН ПРИ ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА МНОГОСВЯЗНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

ANALYSIS OF MULTICONNECTED ANISOTROPIC PLATES BI THE INTEGRAL EQUATION METHOD UNDER THE CONCENTRATED LOADING ACTION

Божидарнік В.В., д.т.н., проф., Ротко С.В., к.т.н., доцент, Шваб'юк В.В., к.т.н., доцент, Пасічник Р.В., к.т.н., доцент, (Луцький національний технічний університет, м. Луцьк)

Божидарник В.В., д.т.н., проф., Ротко С.В., к.т.н., доцент, Швабюк В.В., к.т.н., доцент, Пасичнык Р.В., к.т.н., доцент, (Луцкий национальный технический университет, г. Луцк)

Bozhidarnik V., Doctor of Engineering, Professor, Rotko S.V., candidate of technical sciences, Shvabyuk V.V., candidate of technical sciences, Pasichnyk R.V., candidate of technical sciences (Lutsk National Technical University, Lutsk)

Побудовані системи інтегральних рівнянь для визначення напружено-деформованого стану багатозв'язних анізотропних пластин у випадках першої і другої основних задач теорії пружності за дії зосереджених сил.

Построены системы интегральных уравнений для определения напряженно-деформованного состояния многосвязных анизотропных пластин в случаях первой и второй основных задач теории упругости при действии сосредоточенных сил.

The integral equations systems for the definition of the stress-strain state of multiconnected anisotropic plates in the cases of the first and the second

fundamental problems of elasticity theory under the concentrated loading action are constructed.

Ключові слова:
Пластини, багатозв’язність, інтегральні рівняння, зосереджені сили.
Пластины, многосвязность, интегральные уравнения, сосредоточенные силы.
Plates, multiconnected, integral equations, concentrated loading.

Стан питання і задачі дослідження. Розрахунок пластин за допомогою функцій комплексної змінної, із подальшим використанням методу лінійного спряження аналітичних функцій, досконало розвинений у роботах М.І.Мусхелішвілі [1] та Г.М.Савіна [2] для випадку ізотропних пластин. У випадку багатозв’язних анізотропних пластин визначення напружено-деформованого стану через комплексні потенціали відбувається на основі теореми Коші та використання формул Племелі – Сохоцького, де використовуються компактні інтегральні подання. Така методика побудови систем інтегральних рівнянь для визначення комплексних потенціалів раніше використовувалася у роботах [3-5]. Застосування комплексних потенціалів для розрахунку ортотропних пластин із тріщинами наведено у роботах [5-7]. Використання цього методу для згину анізотропних пластин пов’язане із значними труднощами як у записах через комплексні потенціали виразів для згинальних моментів та поперечних сил, так і в постановці крайових задач. Тому, у випадках ортотропних пластин, ним зручно користуватися, коли маємо чисто уявні корені характеристичного рівняння, за методикою, яку раніше використано у роботах І.О. Прусова та інших авторів [4,6].

1. Інтегральні рівняння першої основної задачі для багатозв’язної анізотропної пластини за дії зосереджених сил. Розглянемо багатозв’язну анізотропну пластинку (область S), навантажену векторами зусиль $X+iY$ на її межі, зусиллями на нескінченності (для пластинок нескінченних розмірів) і прикладеними до точок $z_{*p}=x_{*p}+iy_{*p}$ зосередженими силами $X_{*p}+iY_{*p}$ $(p=1...P)$. Вектор зусиль $X+iY$ на довільній кривій $\Gamma\in S$ визначається за формулою [2]:

$$\begin{aligned} i(X+iY) &= (1+is_1)z_1'\Phi_1(z_1)+(1+i\overline{s_1})\overline{z_1'}\overline{\Phi_1(z_1)}+ \\ &+(1+is_2)z_2'\Phi_2(z_2)+(1+i\overline{s_2})\overline{z_2'}\overline{\Phi_2(z_2)}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $z_j'=dz_j/ds$; ds - диференціал дуги на Γ; $s_j=\alpha_j+i\beta_j$ ($\mathrm{Im}s_j>0$; $j=1,2$) – корені характеристичного рівняння :

$$a_{11}s^4-2a_{16}s^3+\left(2a_{12}+a_{66}\right)s^2-2a_{26}s+a_{22}=0,$$

a_{ij} – пружні характеристики матеріалів у законі Гука [8] для плоского напруженого стану.

Комплексні потенціали $\Phi_j(z_j)\left(j=1,2\right)$ подамо у вигляді

$$\Phi_j(z_j)=\Phi_{jR}(z_j)+\Phi_{jS}(z_j)\ \left(j=1,2\right), \tag{2}$$

де $\Phi_{jR}(z_j)$ - аналітичні, однозначні функції в областях S_j, відповідно:

$$\Phi_{1S}(z_1)=\sum_{p=1}^{P}\frac{A_p}{z_1-z_{1*p}}+B_*+iC_*,$$

$$\Phi_{2S}(z_2)=\sum_{p=1}^{P}\frac{B_p}{z_2-z_{2*p}}+B_*^{'}+iC_*^{'},\ z_{j*p}=x_{*p}+s_jy_{*p}.$$

Залежність сталих $A_p, B_p, B_*, C_*, B'_*, C'_*$ від заданих зусиль добре відома [6].

Використовуючи теорему Коші та формули (1), маємо

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(1)}}\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-z_1}+\Phi_{1S}(z_1),\\
&\tilde{S}_1=-\frac{s_1-\bar{s}_2}{s_2-\bar{s}_2},\tilde{S}_2=\frac{\bar{s}_1-\bar{s}_2}{s_2-\bar{s}_2},t_j=\xi+s_j\eta,\xi+i\eta\in L\\
&\Phi_2(z_2)=\frac{1}{2\pi i(s_2-\bar{s}_2)}\int_L\frac{X+\bar{s}_2Y}{t_2-z_2}ds+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(1)}}\frac{\tilde{S}_1f(t_1)dt_1-\overline{\tilde{S}_2f(t_1)dt_1}}{t_2-z_2}+\Phi_{2S}(z_2).
\end{aligned} \tag{3}$$

Модифіковане інтегральне подання загального розв’язку задачі, яке виявляється зручним при розробці числового алгоритму, перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(1)}}\frac{Q(\tau)d\tau}{\tau-z_1}+\Phi_{1S}(z_1),\ Q\left(t_1\right)=\Phi_1\left(t_1\right)-A_k\ \text{ ïðè }\ t_1\in L_k^{(1)},\\
&\Phi_2(z_2)=\frac{1}{2\pi i(s_2-\bar{s}_2)}\int_L\frac{X+\bar{s}_2Y}{t_2-z_2}ds+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(2)}}\frac{\tilde{S}_1Q(t_1)dt_1-\overline{\tilde{S}_2Q(t_1)dt_1}}{t_2-z_2}+\Phi_{2S}(z_2),
\end{aligned} \tag{4}$$

де сталі $A_k, B_k\ \left(k=1...m+1\right)$ визначаються із умов:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(A_k+B_k\right)=0,\ \operatorname{Re}\left(s_1A_k+s_2B_k\right)=0,\\
&\operatorname{Re}\left(s_1^2A_k+s_2^2B_k\right)=0\ \left(k=1...m+1\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

а комплексні потенціали задовольняють додатковим умовам

$$\int_{L_k^{(j)}} \Phi_j\left(z_j\right) dz_j = -\frac{D_1^{(j)} Y_k + D_2^{(j)} X_k}{D}, \tag{5a}$$

$$\left(j = 1,2; k = 1...m+1\right),$$

які забезпечують однозначність переміщень. Сталі $D_1^{(j)}$ такі самі, як і в [3].

Для знаходження функції Q, через яку записаний загальний розв'язок задачі, використаємо формулу (1) для визначення вектора зусиль на довільній кривій Γ. Підставивши у (1) потенціали (4) і спрямувавши точку $x+iy \to L$, отримаємо систему інтегральних рівнянь стосовно Q.

Врахувавши формули Племелі - Сохоцького [1]:

$$\lim_{(x,y)\to L} \Phi_1\left(z_1\right) = \hat{\Phi}_1\left(z_1\right) + Q\left(z_1\right)/2,$$

$$\lim_{(x,y)\to L} \Phi_2\left(z_2\right) = \hat{\Phi}_2\left(z_2\right) + \frac{1}{2\left(s_2 - \overline{s}_2\right)}\left[\frac{X_n + \overline{s}_2 Y_n}{z_2'} - \right. \tag{6}$$

$$\left. -\left(s_1 - \overline{s}_2\right)\frac{z_1'}{z_2'} Q\left(z_1\right) - \left(\overline{s}_1 - \overline{s}_2\right)\frac{\overline{z}_1'}{\overline{z}_2'}\overline{Q\left(z_1\right)}\right],$$

де відзначені дашком функції визначаються за формулами

$$\hat{\Phi}_1\left(z_1\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(1)}} \frac{Q(\tau)d\tau}{\tau - z_1} + A_0 . \tag{7}$$

Тут $Q\left(t_1\right) = f\left(t_1\right) - A_k$ при $t_k \in L_k^{(1)}$, A_k – комплексні сталі. Підставивши в (7) $f\left(t_1\right) = Q\left(t_1\right) + A_k$, знаходимо

$$\hat{\Phi}_2\left(z_2\right) = \frac{1}{2\pi i(s_2 - \overline{s}_2)}\left[\int_{L^{(2)}} \frac{X + \overline{s}_2 Y}{t_2 - z_2} ds - \left(s_1 - \overline{s}_2\right)\int_{L^{(2)}} \frac{Q(t_1)dt_1}{t_2 - z_2} - \right. \tag{8}$$

$$\left. -\left(\overline{s}_1 - \overline{s}_2\right)\int_{L^{(2)}} \frac{\overline{Q}(t_1)d\overline{t}_1}{t_2 - z_2}\right] + \Delta.$$

Тут $Q\left(t_1\right) = f\left(t_1\right) - A_k$ при $t_k \in L_k^{(1)}$, A_k – комплексні сталі;

$$\Delta = \frac{1}{2\pi i(s_2 - \overline{s}_2)}\sum_{k=1}^{m+1}\int_{L^{(2)}} \frac{1}{t_2 - z_2}\left\{\left[[(\overline{s}_2 - s_1)A_k - (\overline{s}_1 - \overline{s}_2)\overline{A}_k\right]d\xi + \right.$$

$$\left. + \left[(\overline{s}_2 - s_1)A_k s_1 - (\overline{s}_1 - \overline{s}_2)\overline{A}_k \overline{s}_1\right]d\eta\right\},$$

у яких особливі інтеграли розглядаються в сенсі головного значення за Коші [1].

Граничні інтегральні рівняння набудуть вигляду

$$i(X+iY)/2=(1+is_1)z_1'\hat{\Phi}_1(z_1)+(1+i\overline{s_1})\overline{z_1'}\overline{\hat{\Phi}_1(z_1)}+ \\ +(1+is_2)z_2'\hat{\Phi}_2(z_2)+(1+i\overline{s_2})\overline{z_2'}\overline{\hat{\Phi}_2(z_2)}, \tag{9}$$

2. Інтегральні рівняння другої основної задачі для багатозв'язної анізотропної пластини. Нехай на отворах пластинки задані переміщення g_1, g_2 або в отвори впаяно жорсткі включення; на пластинку діють зусилля на нескінченності (для пластинок нескінченних розмірів), зосереджені сили. На основі теореми Коші можна записати інтегральні подання для комплексних потенціалів:

$$\Phi_1(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(1)}}\frac{Q(\tau)d\tau}{\tau-z_1}+\Phi_{1S}(z_1)\ , \qquad \Phi_2(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(2)}}\frac{P(\tau)d\tau}{\tau-z_2}+\Phi_{2S}(z_2), \tag{10}$$

$$P(z_2)=(dw/ds+\alpha Qz_1'+\beta\overline{Q}\overline{z_1'})/z_2',$$

$$w=\frac{\overline{q_2}g_1-\overline{p_2}g_2}{d},\ \alpha=\frac{\overline{p_2}q_1-\overline{q_2}p_1}{d},$$

$$\beta=\frac{\overline{p_2q_1}-\overline{q_2p_1}}{d},\ d=p_2\overline{q_2}-q_2\overline{p_2}.$$

Невідома функція Q, яку означає загальний розв'язок задачі, визначається із СІР

$$(g_1'+ig_2')/2=(p_1+iq_1)z_1'\Phi_1(z_1)++(\overline{p}_1+i\overline{q}_1)\overline{z}_1'\overline{\Phi_1(z_1)}+ \\ +(p_2+iq_2)z_2'\Phi_2(z_2)+(\overline{p}_2+i\overline{q}_2)\overline{z}_2'\overline{\Phi_2(z_2)}, \tag{11}$$

Тут, у комплексних потенціалах, що визначаються формулами (10), інтеграли Коші мають сенс головного значення. Аналогічно до [3], якщо нескінченна пластинка, на яку діють зосереджені сили, ослаблена тріщинами $T_r\ \left(r=1...m-M\right)$ із прикладеними до їх берегів напруженнями $X+iY$, то комплексні потенціали можна подати у вигляді:

$$\Phi_1(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{T^{(1)}}\frac{Q(\tau)d\tau}{\tau-z_1},$$

$$\Phi_2(z_2)=\frac{1}{2\pi i(s_2-\overline{s}_2)}\int_T\frac{[X]+\overline{s}_2[Y]}{t_2-z_2}ds+ \\ +\frac{\tilde{S}_1}{2\pi i}\int_{T^{(2)}}\frac{Q(t_1)dt_1}{t_2-z_2}+\frac{\tilde{S}_2}{2\pi i}\int_{T^{(2)}}\frac{\overline{Q}(t_1)d\overline{t_1}}{t_2-z_2}, \tag{12}$$

де $\left[f\right]$ – різниця величини f на правому і лівому берегах тріщин; Q - невідома функція.

Підстановка потенціалів (12) у вираз для вектора зусиль на правому березі тріщини та використання формул Племелі – Сохоцького дає систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно функції Q. Додаткові рівняння отримують із умов (5а) однозначності переміщень.

Визначивши величини комплексних потенціалів $\Phi_j(z_j)$, легко знайти вирази для напружень у пластині за формулами [2]:

$$\sigma_{xx} = 2\operatorname{Re}[s_1^2\Phi_1(z_1) + s_2^2\Phi_2(z_2)]; \quad \sigma_{yy} = 2\operatorname{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)]; \\ \sigma_{xy} = -2\operatorname{Re}[s_1\Phi_1(z_1) + s_2\Phi_2(z_2)]. \tag{13}$$

Переміщення $u\left(z\right), v\left(z\right)$ точок пластини у відповідних напрямках Ox , Oy декартової системи координат можна записати у такому вигляді:

$$u\left(z\right) = 2\operatorname{Re}\left[p_1\varphi_1\left(z_1\right) + p_2\varphi_2\left(z_2\right)\right] - \omega y + u_0, \\ v\left(z\right) = 2\operatorname{Re}\left[q_1\varphi_1\left(z_1\right) + q_2\varphi_2\left(z_2\right)\right] + \omega x + v_0, \tag{14}$$

де ω, u_0, v_0 — кут повороту та переміщення пластинки як жорсткого цілого;

$$p_j = a_{11}s_j^2 + a_{12} - a_{16}s_j;\ q_j = a_{12}s_j^2 + a_{22}/s_j - a_{26}\ \left(j = 1,2\right).$$

У випадку ортотропного матеріалу коефіцієнти $\boldsymbol{a_{ij}}$ можна записати у вигляді загальновідомих фізичних сталих матеріалу — модулів пружності та коефіцієнтів Пуассона біля відповідних осей координат. Вважається, що головні напрямки пружності співпадають із напрямками осей координат.

Висновки. Побудовано інтегральні рівняння першої та другої основних задач плоскої задачі теорії пружності для багатозв'язної анізотропної пластини за дії зосереджених сил**.** Вирази для напружень і переміщень записуються через знайдені комплексні потенціали та загальновідомі фізичні сталі матеріалу пластин.

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. **2.** Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. **3.** Божидарник В.В., Максимович О.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. **4.** Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1975. **5.** Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія. – Львів: ДВЦ НТШ. 2007. **6.** Шваб'юк В.І. Комплексне подання уточнених рівнянь згину ортотропних пластин з тріщинами. // Машинознавство. Львів: 1999, № 4. – С.51-55. **7.** Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1979. **8.** Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд.2-е. – М.: Наука,1977.