

УДК 539.3

## **ВИЗНАЧЕННЯ НДС ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗА ДІЇ ЛОКАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

### **DETERMINATION OF STRESS-DEFORMED CONDITION CYLINDRICAL SHELLS UNDER THE INFLUENCE OF LOCAL LOADS**

**Ротко С.В., к.т.н., доцент, Шваб'юк В.І., д.т.н., професор, Ротко В.О.,  
аспірант** (Луцький національний технічний університет, м. Луцьк)

**Ротко С.В., к.т.н., доцент, Шваб'юк В.І., д.т.н., професор, Ротко В.А.,  
аспірант** (Луцкий национальный технический университет, г. Луцк)

**Одержано формули для радіальних переміщень серединної та внутрішньої поверхонь циліндричної оболонки за дії кільцевих зосереджених зусиль. Досліджено вплив деформацій поперечного зсуву та обтиснення на величину цих переміщень залежно від поперечної анізотропії оболонки.**

**Получены формулы для радиальных перемещений срединной и внутренней поверхности цилиндрической оболочки при действии кольцевых сосредоточенных усилий. Исследовано влияние деформаций поперечного сдвига и обжатия на величину этих перемещений в зависимости от поперечной анизотропии оболочки.**

**Formulas for radial displacement of median and inner surfaces of cylindrical shell at ring concentrated forces action were obtained. The effect of transversal shear and reduction deformations on the value of these displacements in dependence of transversal shell anisotropy were investigated.**

**Вступ.** Задача згину циліндричних оболонок за дії локальних навантажень у постановці рівнянь класичної теорії оболонок Кірхгофа-Лява була розв'язана С.П.Тимошенком [1]. У постановці неklasичної теорії оболонок, що враховує деформацію поперечного зсуву, розв'язок даної задачі отримано у монографіях Б.Л.Пелеха [2] та В.В.Васильєва [3], а для випадку ортотропної оболонки - у роботі [4].

**Постановка задачі.** Розглядається згин циліндричної оболонки кільцевими зосередженими зусиллями  $P$  у перерізі, що знаходиться досить далеко від торців циліндра (рис.1). За розрахункові рівняння цієї задачі взято диференціальні рівняння моделі [5], які, крім деформації поперечного зсуву, враховують ще й деформацію поперечного обтиснення та ефект Пуассона:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - 2g_0^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda^4 w = 0;$$

$$K_x \frac{d^2 \tilde{w}_\tau}{dx^2} = 2 \frac{E_2 h}{R^2} w; \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\nu_{12}}{R} \frac{dw}{dx} = 0, \quad (1)$$

де  $D_1 = \frac{2}{3} \tilde{E}_1 h^3$ ;  $2g_0^2 = \tilde{\varepsilon} \lambda^4$ ;  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_x (1 - \nu^*)$ ;  $\varepsilon_1 = \varepsilon_x - 0.4 A_1 h^2$ ;

$$\tilde{E}_1 = E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}); \quad \lambda^4 = 2E_2 h / (D_1 R^2); \quad \nu^* = \tilde{\nu}_{12} \frac{5 G_{13}}{6 E_2};$$

$$\tilde{\nu}_{12} = \nu_{12} (1 + \tilde{A}_2); \quad \tilde{w}_\tau = w_\tau - 0,5 A_1 h^2 \left( \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{6 E_2}{5 G'} \frac{w}{R^2} \right);$$

$$\tilde{A}_2 = A_2 - \nu_{12} A_1;$$

$$\lambda^4 = 2E_2 h / (D_1 R^2); \quad A_1 = (\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}) (1 - \nu_{12} \nu_{21})^{-1}, \quad (1 \rightarrow 2).$$

Якщо довжина оболонки така, що впливом крайового ефекту можна знехтувати, то загальний розв'язок першого рівняння системи (1), праворуч від місця прикладання навантаження ( $x > 0$ ), можна записати у вигляді:

при  $g_0 < \lambda^2$

$$w = e^{-\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x); \quad (2)$$

при  $g_0 > \lambda^2$

$$w = e^{-\alpha x} (C_1 \operatorname{ch} \beta x + C_2 \operatorname{sh} \beta x); \quad (3)$$

при  $g_0 = \lambda^2$

$$w = C_1 e^{-\alpha x} + C_2 x e^{-\alpha x}; \quad (4)$$

де  $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda^2 + g_0^2}{2}}$ ;  $\beta = \sqrt{\frac{\lambda^2 - g_0^2}{2}}$ ;  $C_1, C_2$  – довільні сталі, що знаходяться з граничних умов на краях оболонки.

**Методика дослідження.** Для розв'язання цієї задачі необхідно вирішити допоміжну задачу про визначення напружено-деформованого стану півнескінченної циліндричної оболонки, навантаженої у перерізі  $x = 0$  розподіленим згинальним моментом  $\dot{I}_0$  та поперечною силою  $Q_0$  (рис.2).

У подальшому, без зменшення загальності, використовується розв'язок (3), коли параметр  $g_0^2 < \lambda^2$ . Для більшої зручності його можна записати через фундаментальні функції типу функцій Крилова у вигляді

$$w = C_1 K_1(x) + C_2 K_2(x). \quad (5)$$

Тут  $K_1(x) = e^{-\alpha x} \cos \beta x$ ,  $K_2(x) = e^{-\alpha x} \sin \beta x$ .

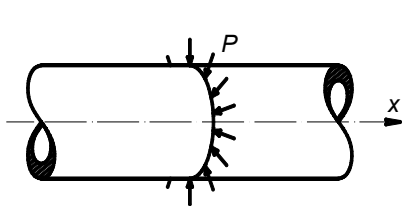


Рис.1. Схема навантаження оболонки

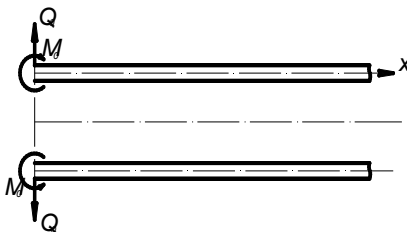


Рис.2. Схема навантаження оболонки у допоміжній задачі

При диференціюванні та інтегруванні таких функцій використано такі рекурентні формули:

$$\begin{aligned} K_1'(x) &= -\alpha K_1 - \beta K_2; & K_2'(x) &= -\alpha K_2 + \beta K_1; \\ K_1''(x) &= (\alpha^2 - \beta^2) K_1 + 2\alpha\beta K_2; & K_2''(x) &= (\alpha^2 - \beta^2) K_2 - 2\alpha\beta K_1; \\ K_1'''(x) &= \alpha(3\beta^2 - \alpha^2) K_1 - \beta(3\alpha^2 - \beta^2) K_2; \\ K_2'''(x) &= \alpha(3\beta^2 - \alpha^2) K_2 + \beta(3\alpha^2 - \beta^2) K_1; \\ (\alpha^2 + \beta^2) \int K_1(x) dx &= -\alpha K_1 + \beta K_2 + C; & (6) \\ (\alpha^2 + \beta^2) \int K_2(x) dx &= -\alpha K_2 - \beta K_1 + C. \end{aligned}$$

Функції  $K_i(x)$  дорівнюють нулю на нескінченності, а при  $x = 0$  приймають такі значення:

$$K_1(0) = 1; \quad K_2(0) = 0.$$

Для знаходження сталих  $C_1, C_2$  використано граничні умови на завантаженому торці оболонки:

$$\dot{I}_x = \dot{I}_0; \quad Q_x = Q_0 \quad \text{при } x = 0. \quad (7)$$

Після підстановки значень згинального моменту  $\dot{I}_x$  та поперечної сили  $Q_x$  (за умови симетричності задачі), одержані граничні умови у переміщеннях (при  $x = 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + \tilde{\nu}_{12} \frac{w}{R^2} &= -\frac{M_0}{D_1}; \\ \frac{d\tilde{w}_\tau}{dx} &= \frac{Q_0}{K_x}, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\bar{w} = w - 0.8w_\tau + h^2w_2$ ;  $\tilde{w}_\tau = w_\tau - h^2w_2$ ;  $\tilde{\nu}_{12} = \nu_{12}(1 + \tilde{A}_2)$ ;

$$\tilde{A}_2 = A_2 - \nu_{12}A_1; \quad w_2 = \frac{A_1}{2} \left( \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{6E_2}{5G'} \cdot \frac{w}{R^2} \right).$$

З другого рівняння системи (1), знайдено вираз для величини  $\tilde{w}_\tau$

$$\tilde{w}_\tau = \frac{D_1}{K_x} \left\{ C_1 \left[ (\alpha^2 - \beta^2)K_1 - 2\alpha\beta K_2 \right] + C_2 \left[ (\alpha^2 - \beta^2)K_2 + 2\alpha\beta K_1 \right] \right\} \quad (9)$$

Використавши вирази (5) та (9) та граничні умови (8), після певних перетворень одержано систему рівнянь для визначення сталих  $C_1, C_2$

$$g_0^2 C_1 + 2\alpha\beta C_2 = \frac{M_0}{D_1}; \quad \alpha C_1 + \beta C_2 = -\frac{Q_0}{\lambda^2 D_1} \quad (10)$$

Розв'язуючи систему (10), одержано вирази для сталих  $C_1, C_2$ :

$$C_1 = -\frac{M_0}{\lambda^2 D_1} - \frac{2\alpha Q_0}{\lambda^4 D_1}; \quad C_2 = \frac{\alpha M_0}{\beta \lambda^2 D_1} + \frac{g_0^2 Q_0}{\beta \lambda^4 D_1} \quad (11)$$

Таким чином, допоміжна задача розв'язана. Вираз для радіального переміщення середньої поверхні оболонки записується у вигляді

$$w = -\frac{K_1(x)}{D_1 \lambda^4} (\lambda^2 M_0 + 2\alpha Q_0) + \frac{K_2(x)}{\beta D_1 \lambda^4} (\alpha \lambda^2 M_0 + g_0^2 Q_0) \quad (12)$$

Для того, щоб знайти напружено-деформований стан оболонки, навантаженої кільцевими зосередженими зусиллями  $P$ , достатньо застосувати одержані розв'язки для кожної із половин циліндричної

оболонки (при цьому вважаючи її досить довгою). У такому випадку величина  $Q_0 = -P/2$ , а величину згинального моменту  $M_0$  у перерізі  $x = 0$  визначається із граничних умов жорсткого закріплення оболонки:

$$u = \gamma_x = w = 0, \quad (13)$$

У переміщеннях  $w, \tilde{w}_\tau$  ця умова має вигляд

$$\frac{dw}{dx} = \frac{4}{5} \frac{d\tilde{w}_\tau}{dx} \quad \text{при } x = 0. \quad (14)$$

Використовуючи рівність (12) і другу умову (8), одержано

$$\alpha C_1 - \beta C_2 = \frac{4}{5} \frac{P}{K_x}. \quad (15)$$

Після підстановки в умову (15) значень сталих  $C_1, C_2$  зі співвідношень (11) одержано величину згинального моменту  $M_0$  у перерізі  $x = 0$

$$M_0 = \frac{P}{4\alpha} \left( 1 - \tilde{\nu}_{12} \lambda^2 h^2 / 3 \right). \quad (16)$$

Таким чином, переміщення серединної поверхні оболонки, навантаженої кільцевими зосередженими зусиллями  $P$ , можна записати у вигляді

$$w = \frac{Pe^{-\alpha x}}{4D_1\alpha\lambda^4} \left( \lambda^2 \left( 1 + \tilde{\nu}_{12} \lambda^2 h^2 / 3 \right) + 2g_0^2 \right) \cos \beta x + \frac{Pe^{-\alpha x}}{4\beta D_1\lambda^4} \left( \lambda^2 \left( 1 - \tilde{\nu}_{12} \lambda^2 h^2 / 3 \right) - 2g_0^2 \right) \sin \beta x. \quad (17)$$

Поклавши у формулі (17)  $g_0^2 = \tilde{\nu}_{12} = 0$ ;  $\alpha = \beta = \lambda / \sqrt{2}$ , одержимо результат С.П.Тимошенка [1] для класичної теорії оболонок. Випадок  $g_0^2 \neq 0$  відповідає некласичній теорії типу Тимошенка [2,3]. Максимальний прогин серединної поверхні в оболонці  $W_0$  припадає вздовж лінії дії зосереджених зусиль  $P$ . Його значення визначається з формули (17)

$$w_0 = \frac{PR^2}{8E_2\alpha h} \left( \lambda^2 \left( 1 + \tilde{\nu}_{12} \lambda^2 h^2 / 3 \right) + 2g_0^2 \right) \quad (18)$$

Формули (17), (18) визначають переміщення серединної поверхні оболонки. Разом з тим, на основі рівнянь даної моделі існує можливість визначення переміщень зовнішніх поверхонь оболонки  $W(\pm h)$ . Знайти

переміщення безпосередньо у місці прикладання навантаження можна, якщо представити зусилля  $P$  через дельта- функцію, яка є невизначеною у точці прикладання.

Переміщення внутрішньої поверхні оболонки  $W(-h)$  на основі формул [5] буде дорівнювати

$$W(-h) = w(x) + (A_1 \varepsilon_x + A_2 \varepsilon_\varphi) h - 0.5 A_1 \kappa_x^T h^2, \quad (19)$$

$$\text{де } \varepsilon_x = -\nu_{12} \frac{w}{R}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{w}{R}; \quad \kappa_x^T = -\left( \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{6 E_2}{5 G_{13}} \frac{w}{R^2} \right).$$

Після підстановки у формулу (19) значень відповідних параметрів, одержано вираз для переміщення внутрішньої поверхні оболонки  $W(-h)$  через переміщення серединної поверхні оболонки  $w(x)$ :

$$W(x, -h) = \left( 1 + \tilde{A}_2 \frac{h}{R} - \frac{3 A_1 E_2 h^2}{5 G_{13} R^2} \right) w(x) + \frac{1}{2} A_1 h^2 \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (20)$$

Застосовуючи до формули (20) розв'язок (17), шляхом нескладних перетворень, отримано розрахункову формулу для переміщення внутрішньої поверхні оболонки в перерізі  $x = 0$

$$W(-h) = \frac{PR^2}{8E_2\alpha h} \left( \lambda^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \tilde{\nu}_{12} \lambda^2 h^2 \right) + 2g_0^2 \right) \left( 1 + \tilde{A}_2 \frac{h}{R} - \frac{3A_1 E_2 h^2}{10 G_{13} R^2} \right) - \frac{A_1 PR^2}{16E_2\beta h} \left( \lambda^2 \left( 1 - \tilde{\nu}_{12} \lambda^2 h^2 / 3 \right) - 2g_0^2 \right) \sqrt{\lambda^4 h^4 - g_0^4 h^4}. \quad (21)$$

**Результати та їхній аналіз.** Для дослідження впливу ефекту поперечного зсуву та ефекту Пуассона за формулами (18) та (21) обчислено значення відносного переміщення  $\tilde{w} = w / w_{\tilde{e}\tilde{e}}$ ,  $W(-h) / w_{\tilde{e}\tilde{e}}$  на серединній і внутрішній поверхнях циліндричної оболонки залежно від відносної товщини оболонки  $(h / R)$  та відношення модулів пружності  $E_2 / G_{13}$ , коли  $\nu_{12} = \nu'' = 0.3$ .

Дані розрахунків наведені в таблиці, де числа у знаменнику відповідають значенням переміщень внутрішньої поверхні оболонки. Прочерки в таблиці відповідають випадку, коли  $\lambda^2 > g_0^2$ . У другій колонці розміщені результати класичної теорії Кірхгофа-Лява, де  $E_2 / G_{13} = 0$ ,  $\tilde{\nu}_{12} = 0$ .

Таблиця 1

Значення відносних переміщень  $\tilde{W}$  у перерізі за дії кільцевого навантаження

$E_2 / G_{13}$	0	2.6	10	20	40
$\frac{h}{R} = \frac{1}{5}$	1	$\frac{1,272}{1,284}$	$\frac{1,876}{1,934}$	$\frac{2,503}{-}$	$\frac{3,455}{-}$
$\frac{h}{R} = \frac{1}{10}$	1	$\frac{1,141}{1,141}$	$\frac{1,483}{1,497}$	$\frac{1,871}{1,900}$	$\frac{2,498}{-}$
$\frac{h}{R} = \frac{1}{20}$	1	$\frac{1,071}{1,070}$	$\frac{1,256}{1,259}$	$\frac{1,481}{1,488}$	$\frac{1,869}{1,884}$

З аналізу даних таблиці видно, що на переміщення в оболонці (у порівнянні із класичною теорією оболонок) дуже сильно впливає ефект деформації поперечного зсуву ( $E_2 / G_{13}$ ). Особливо це стосується композитного матеріалу ( $E_2 / G_{13} = 40$ ) для товстостінного циліндра ( $h / R = 1 / 5$ ), де радіальні переміщення збільшуються майже у 3,5 рази. Вплив ефекту Пуассона (параметр  $\tilde{\nu}_{12}$ ) та поперечного обтиснення на радіальні переміщення у даній задачі незначний, про що свідчать майже однакові значення радіальних переміщень на серединній та внутрішній поверхнях оболонки.

**Висновки.** Одержано розв'язок задачі про напружено - деформований стан циліндричної оболонки за дії кільцевих зосереджених зусиль, а також формули для радіальних переміщень серединної та внутрішньої поверхонь циліндричної оболонки. Досліджено вплив деформацій поперечного зсуву та обтиснення на величину цих переміщень залежно від поперечної анізотропії оболонки. Показано, що вплив поперечного обтиснення у цьому випадку є незначним, тоді як вплив поперечного зсуву веде до збільшення переміщень

у 2-3 рази при  $\frac{h}{R} = \frac{1}{10} \div \frac{1}{20}$  для  $E_2 / G_{13} = 20 \div 40$ .

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Физматгиз, 1963. - 635с. 2. Пелех Б.Л. Теория оболочек с низкой сдвиговой жесткостью. - К.: Наукова думка, 1973. - 246 с. 3. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. - М.: Машиностроение, 1988. - 272 с. 4. Василенко А.Т., Урусова Г.П. Исследование влияния локальности нагружения на распределение напряжений в анизотропных оболочках вращения // Прикл. механика. – 2004. - Т. 40, № 2. - С. 114-119. 5. Шваб'юк В.І., Ротко С.В. Розрахунок ортотропної циліндричної оболонки в уточненій постановці // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник. – Луцьк: Луцьк. держ. техн. ун-т, 2002. - Вип.11. - С. 284-288.