

## **МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЕЛЕМЕНТІВ ВЕНТИЛЬОВАНИХ ФАСАДІВ**

### **MODELING OF THE DYNAMIC STRESSES OF THE ELEMENTS OF VENTILATION FACADES**

**Мікуліч О.А., к.т.н., доц. (Луцький НТУ, м. Луцьк)**

**Mikulich O.A., Ph.D., senior lecturer (Lutsk National Technical University, Lutsk)**

У статті описано моделювання динамічного напруженого стану елементів вентиляованих фасадів та досліджено вплив відстані між отворами у пластинчастих елементах конструкцій на розподіл напружень за усталених коливань.

The article describes the modeling of the dynamic stress state of the elements of ventilated facades. The integral equations of the task are built. These equations contain the Cauchy integrals and the regular functions. Method of numerical calculation of dynamic stresses is developed. It is based on the method of the integral equations and the method of mechanical quadratures. The dynamic stresses at the plate elements of the constructions of the ventilation facades are calculated. Distributions of the maximal dynamic stresses on the boundary of the plate, which is under the influence of the not axially symmetric oscillation forces, are determined. The influence of the distance between the holes in the facade elements for dynamic stresses concentration is investigated. The effects of the interference of the holes at the plate elements of the constructions of ventilation facades under the steady-state oscillation forces are investigated.

**Ключові слова:** пластини, напруження, вібраційне навантаження.

**Keywords:** plates, stresses, vibration loads.

Сучасний ринок будівельних матеріалів стрімко розвивається. Фірми-виробники постійно пропонують щось нове, роблячи при цьому акцент на товар, що є більш вигідним, якісним і екологічним.

У сучасному будівництві почали широко використовуватися матеріали та елементи конструкцій, що є одночасно легкими та мають велику міцність.

До таких слід віднести елементи вентиляованих фасадів. Для їх монтажу використовуються витяжні заклепки. З допомогою заклепок з'єднуються облицювальні матеріали між собою. Також їх використовують при монтажі віконних примикань: зливів, відкосів, та при встановленні інших додаткових елементів.

Елементи таких фасадів можна змодельювати з допомогою пластин, що послаблені системами отворів. Вони зазнають вібраційного навантаження. Через системи заклепок, що є істотними концентраторами напружень, відбувається передача динамічного навантаження на пластину.

Для забезпечення міцності таких елементів фасадів необхідно використовувати уточнені методики розрахунку їх напруженого стану з врахуванням динамічної концентрації напружень біля отворів.

Аналіз останніх досліджень. Загальні підходи до дослідження напруженого стану пластинок, що послаблені одним або системою кругових отворів та зазнають впливу динамічних навантажень, розроблені у працях О. М. Гузя [1], Г. М. Савіна [2], В. Д. Кубенка та ін. Розв'язки таких задач отримані у формі рядів для випадку осесиметричного осцилюючого навантаження. У роботах Рао Y.H., Мов С.С. та ін. для розв'язання такого класу задач застосовується метод багатократних відображень.

У працях П. Бенерджі, Р. Баттерфілда, К. Бреббія та ін. [3] розв'язання задач зведено до сингулярних та регулярних інтегральних рівнянь. Визначення напружень на границі проводилося чисельним диференціюванням, що при швидкозмінному напруженому стані, який має місце при високих частотах, може призвести до значних похибок.

У [4] запропоновано методику дослідження динамічного напруженого стану багатозв'язних нескінченних пластинок за усталених коливань, що ґрунтується на методі граничних інтегральних рівнянь (МГІР) та апараті теорії функції комплексної змінної (ТФКЗ) для випадку осесиметричного навантаження, прикладеного до границі отвору. Основна перевага такого підходу полягає в його універсальності та високій точності для випадку багатозв'язних пластинок складної форми, нескінчених пластинок з

отворами та системами отворів.

Постановка мети і задач досліджень. У роботі розглядається задача про дослідження напружено-деформованого стану елементів вентильованих фасадів, що перебувають під дією вібраційних навантажень. Елементи фасадів у статті моделюються як пружні ізотропні нескінченні пластинки, що послаблені системами кругових отворів. Досліджувані пластинчасті елементи конструкцій перебувають під дією неосесиметричного навантаження, яке прикладене до границь отворів і передається через системи витяжних заклепок.

Методика досліджень. Розглянемо пружну пластинку, що послаблена системою отворів, обмежених контурами  $L_1, L_2, \dots, L_K$ . Віднесемо її до декартової системи координат  $x_1 O x_2$ . Позначимо через  $D$  — область, яку займає пластинка.

Дослідимо динамічний напружений стан пластинки при поздовжніх коливаннях, які виникають від дії навантажень, що прикладені до границь отворів  $S^{(k)}(x_1, x_2)e^{i\omega\tau}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Тут позначено  $\omega$  — частота,  $\tau$  — час.

Для випадку плоского напруженого стану використаємо інтегральне зображення загального розв'язку для переміщень у вигляді [5]:

$$u_i(x_1, x_2) = \int_L p_j U_{ij}^*(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0) ds, \quad (1)$$

де  $L = \bigcup_{k=1}^K L_k$ ,  $U_{ij}^*(z, t) = \frac{1}{2\pi r c_2^2} (\psi \delta_{ij} - \chi r_i r_j)$ ,  $r = \sqrt{(z-t)(\bar{z}-\bar{t})}$ ;  $z = x_1 + ix_2$ ,  $t = x_1^0 + ix_2^0$ ,  $r_i = \partial r / \partial x_i$ ,  $p_j$  — невідомі потенціальні функції,  $i, j = \overline{1, 2}$ ;  $\psi, \chi$  — відомі функції, що містять функції Ганкеля другого роду [3], інтегрування по області та вздовж границі проводиться за змінною  $t$ . Тут і далі біля переміщень та напружень опущений часовий множник  $e^{i\omega\tau}$ .

Для визначення напружень в довільній точці пластинки використано формулу [2]:

$$2(\sigma_n - i\tau_{sn}) = \frac{2E}{1-\nu} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u_1 - iu_2) \right) + e^{2i\alpha} \frac{2E}{1+\nu} \left( \frac{\partial}{\partial z} (u_1 - iu_2) \right), \quad (2)$$

де  $\alpha$  - кут між нормаллю  $\vec{n}$  до площинки і віссю  $Ox_1$ ,  $E$  -

модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Підставляючи представлення для переміщень (1) у формули визначення напружень (2) отримаємо:

$$2(\sigma_n - i\tau_{sn}) = \int_L \frac{f_1(t; z)}{z-t} qdt + \int_L \frac{f_2(t; z)}{z-t} \bar{q}d\bar{t}$$

$$f_1(t, z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \zeta \Phi - \frac{dz}{d\bar{z}} \chi_1 \frac{\bar{z} - \bar{t}}{z-t} \right), f_2(t, z) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \zeta \Phi - \frac{dz}{d\bar{z}} \chi_2 \right)$$

де  $\Phi = \Phi(r)$ ,  $\psi_1 = \psi(r)$ ,  $\chi_1 = \chi_1(r)$ ,  $\chi_2 = \chi_2(r)$  — відомі функції,  $dz$  – диференціал змінної  $z$  вздовж дотичної до границі  $L$ ,  $\zeta = (1+\nu)/(1-\nu)$ ,  $qdt = i(p_1 + ip_2)ds$  — невідома функція.

Спрямовуючи точку  $(x_1, x_2)$  до границі пластинки, використовуючи представлення для функцій Ганкеля при малих значеннях аргументу [6] та формули Племеля-Сохоцького для інтегралів типу Коші [2], отримаємо інтегральні рівняння для знаходження невідомої функції  $q$ :

$$\frac{2\bar{q}}{1+\nu} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left( \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z} - \bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{qdt}{z-t} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left( 1 - \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-\nu}{1+\nu} \frac{\bar{z} - \bar{t}}{z-t} \right) \frac{\bar{q}d\bar{t}}{\bar{z} - \bar{t}} +$$

$$+ \int_L G_1(t, z) qdt + \int_L G_2(t, z) \bar{q}d\bar{t} = S,$$

де  $S = 4 \frac{(S_1 + iS_2)}{1+\nu} e^{-i\alpha}$ ;  $G_1 = G_1(z, t)$ ,  $G_2 = G_2(z, t)$  — обмежені і

неперервні на граничних контурах функції.

Методика досліджень. Для визначення невідомих на границі функцій  $q$  використаємо метод механічних квадратур сумісно з методом колокації [7]. Запишемо рівняння контуру пластинки параметричній формі:  $x^{(k)} = \varphi_k(\theta)$ ;  $y^{(k)} = \psi_k(\theta)$ ,  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $(x^{(k)}, y^{(k)}) \in L_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Причому ці функції виберемо так, щоб при обході границі область залишалася зліва. Тоді на границі  $t^{(k)} = \varphi_k(\theta) + i\psi_k(\theta) = g_k(\theta)$ .

Для інтегралів, які мають особливість типу Коші, використаємо наступні квадратурні формули [7]:

$$\int_{L_k} \frac{q}{t - z_v} dt = h \sum_{n=1}^N q_n \frac{g'_{kn}}{t_n - z_v}, \quad t_n = g_j(\theta_n),$$

$$g'_{kn} = g'_k(\theta_n), \quad \theta_n = hn, \quad z_v = z(\tilde{\theta}_v), \quad \tilde{\theta}_v = \theta_v + h/2,$$

$N$  — кількість точок колокації,  $h$  — крок розрахунку. Для решти інтегралів, які мають обмежені підінтегральні функції, використаємо квадратурні формули [7]:

$$\int_{L_k} qf(t, z) dt = h \sum_{n=1}^N q_n f(z, t_n) g'_{kn},$$

причому тут  $z$  може бути довільним.

Замінивши інтеграли вказаними квадратурними формулами, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$\bar{q}_v^{(k)} + h \sum_{l=1}^K \sum_{n=1}^N \left( f_{1vn}^{(l,k)} q_n^{(l)} g'_{ln} + f_{2vn}^{(l,k)} \bar{q}_n^{(l)} \bar{g}'_{ln} \right) = S_v^{(k)},$$

де  $f_{1vn}^{(l,k)} = f_1(z_v^{(k)}, t_n^{(l)})$ ,  $f_{2vn}^{(l,k)} = f_2(z_v^{(k)}, t_n^{(l)})$ ,  $v = \overline{1, N}$ .

Після розв'язування системи кільцеві напруження на границі знаходимо чисельно на основі співвідношення [2]:

$$2(\sigma_\theta - i\tau_{s\theta}) = \frac{2E}{1-\nu} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u_1 - iu_2) \right) - e^{2i\alpha} \frac{2E}{1+\nu} \left( \frac{\partial}{\partial z} (u_1 - iu_2) \right),$$

виділивши нерегулярні складові у підінтегральних функціях та застосувавши формули Племеля-Сохоцького [2].

Результати досліджень. Використаємо описаний вище алгоритм для дослідження динамічного напруженого стану пластинчастих елементів вентильованих фасадів, які змодельємо ізотропними пружними пластинками, що послаблені отворами кругової форми. До границь отворів через системи заклепок передається осцилююче неосесиметричне навантаження (рис. 1). У випадку, коли пластини послаблені системами отворів, розподіл динамічних напружень залежить також від взаємовпливу отворів та відбиття хвиль від їх границь.

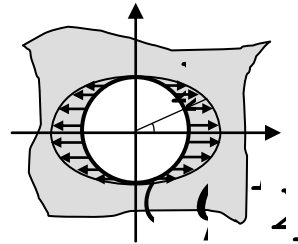


Рис. 1. Розподіл навантаження на границі отвору

Віднесемо пластинку до декартової системи координат  $x_1Ox_2$  так, щоб центр ваги пластинки співпадав з початком координат. Враховуватимемо при розрахунках, що осцилююче навантаження, прикладене до границі отвору змінюється за законом  $S = P \cos^2 \phi e^{i\omega\tau}$ , де  $\phi$  — кут у радіанах.

Дослідимо на основі розробленого алгоритму залежність концентрації максимальних динамічних напружень  $\tilde{\sigma}_\theta^{\max} / D$  (віднесених до  $P$ ) від зведеної частоти  $\omega_2' = \omega \cdot a / c_2$  ( $c_2$  — швидкість хвиль зсуву [2]) для пластинки, що послаблена одним круговим отвором радіусу  $a$  (рис. 2). Граничні умови задамо у вигляді [2]:

$$\sigma_n|_\Gamma = -P \cos^2 \phi e^{i\omega\tau}, \quad \tau_{sn}|_\Gamma = 0.$$

Числовий розрахунок здійснено для 80 вузлових точок і значенні коефіцієнта Пуассона  $\nu=0,25$ .

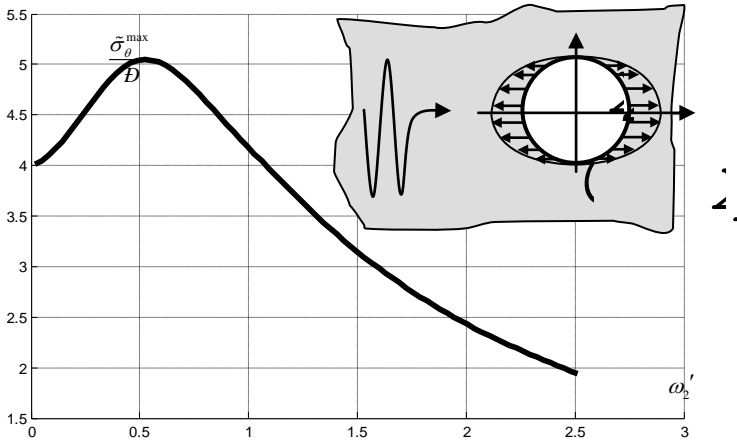


Рис.2. Залежність максимальних динамічних напружень від частоти прикладеного навантаження

З рис. 2 видно, що розподіл максимальних динамічних напружень має коливний характер. Максимальні значення динамічних напружень перевищують статичні у 1,26 рази при значенні зведеної частоти  $\omega_2'=0,52$ . При зростанні частоти

спостерігається зменшення динамічних напружень. Це пояснюється відбиттям хвиль від границі отвору та їх накладанням, що і послаблює динамічний ефект у пластинці.

Дослідимо ефект взаємовпливу отворів при усталених коливаннях, визначивши динамічну концентрацію напружень у пластинці, що послаблена системою двох отворів радіусу  $a$ . На рис. 3. наведено результати числового розрахунку для випадку різної відстані між отворами: крива 1 відповідає випадку  $\delta = 3a$ , крива 2 —  $\delta = 4a$ , крива 3 —  $\delta = 6a$ . Обчислення здійснені для 120 вузлових точок і значенні коефіцієнта Пуассона  $\nu=0,25$ . Аналогічно о попереднього, граничні умови задамо у вигляді [2]:

$$\sigma_n^{(k)} \Big|_{\Gamma} = -P \cos^2 \phi e^{i\omega\tau}, \quad \tau_{sn}^{(k)} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad k = \overline{1, K}.$$

З рис. 3 видно, що графіки залежності динамічної концентрації напружень від частоти прикладеного навантаження мають складний коливний характер.

За статичних навантажень максимальні напруження на границі отворів зменшуються при збільшенні відстані між отворами.

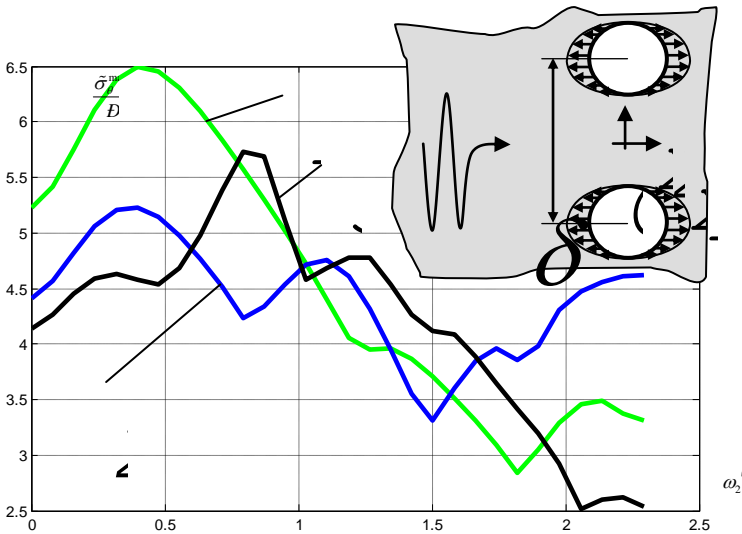


Рис.3. Динамічна концентрація напружень у пластинці з системою отворів

При зростанні частоти прикладеного навантаження максимальні динамічні напруження зростають: так для випадку  $\delta = 3a$  вони перевищують статичні у 1,24 рази, а для випадку  $\delta = 6a$  — у 1,38 раз.

Ефект відбиттям хвиль від границь отворів та їх накладанням істотно впливає на динамічний напружений стан пластинчастих елементів конструкцій вентилязованих фасадів.

Висновки. Як видно із рисунків, за динамічних навантажень напруження істотно залежать від частоти прикладених зусиль. При цьому в пластинчастих елементах з системою отворів динамічна концентрація напружень має більш складний, що пояснюється відбиванням хвиль від точок границі та їх накладанням. Тому при проектуванні та монтажі вентилязованих фасадів слід ретельно враховувати динамічний вплив навантаження.

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн.— К.: Наук. думка, 1978. — 308 с.
2. Савин Н.Г. Распределение напряжений около отверстий. — К.: Наукова думка, 1968. — 888 с.
3. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. Пер. с англ. / Под. ред. Григолоука Э.И. — М.: Мир, 1982. — 248 с.
4. О.А. Мікуліч Концентрація напружень у пластинці з двома отворами від дії осцилюючого тиску // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла.— Дніпропетровськ, 2008, Вип. 9. — С. 138-148.
5. Божидарнік В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності. — Л.: Світ, 1994. — 560с.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1971. — 428с.
7. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. К.: Наук. думка, 1982. — 324 с.