

**ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ  
КОЛИВАНЬ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН**

**EXPERIMENTAL STUDIES OF NATURAL OSCILLATIONS OF  
MULTILAYERED PLATES**

**Рассказов О.О., доктор технічних наук (Національний транспортний університет, Київ, Україна)**

**Бондарський О.Г., кандидат технічних наук (Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна)**

**Rasskazov Oleksandr O., Doctor of Science (Engineering) (National Transport University, Kyiv, Ukraine)**

**Bondarskyi Oleksandr H., Ph.D. in Technical Sciences (Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine)**

В статті наведені результати експериментальних досліджень багатошарових пластин.

Об'єкт дослідження – прямокутні багатошарові пластини які складаються з різної кількості шарів та мають різне їх розміщення.

Мета дослідження – статистичний аналіз характеристик власних частот коливань пластин.

The paper proposes the results of experimental studies of multilayered plates.

Object of the study is rectangular laminated plate consisting of different number of layers and having different placement.

The purpose of the study is a statistical analysis of natural frequencies of oscillations of plates.

For calculations of thin layered structures, which are made of composite materials are used theories that take into account the influence of transverse shear and normal compression layers and orthotropy. To establish the boundaries of application of applied theory there were experimental investigations of the natural oscillations of multilayer plates of different thickness and structure in different variants of resistance conditions. Experimentally obtained values of normal frequencies of oscillations were compared with the results calculated from equations based on versions of the specified theory.

It was decided that this specified version of the theory can be applied for practical calculations of multilayer plates and shells.

The results can be implemented in engineering practice in the design and construction of layered structures.

Expected assumptions about the object development are a search for the optimal structure of multilayer plate package.

Ключові слова: багатошарові пластини, експеримент, теорія, задачі динаміки.

Keywords: multilayered plates, experiment, theory, problems of dynamics.

Постановка проблеми.

В останній час тонкостінні шаруваті конструкції знайшли широке застосування в різних галузях сучасної техніки. Розрахунок таких конструкцій є досить складною задачею, основу розв'язку якої повинні складати теорії, що враховують низький опір матеріалу поперечному зсуву та нормальному обтисненню, а також ортотропію шарів [1-3].

В роботах [4-6] використовується варіант уточненої теорії шаруватих оболонок, який враховує вплив поперечного зсуву та нормального обтиснення шарів, їх ортотропію, довільну кількість і взаємне розташування при суттєвих відмінностях у товщинах і пружних властивостях. В основу уточненої теорії покладені гіпотези про розподіл за товщиною поперечних дотичних напружень, нормальних поперечних деформацій і поперечного нормального напруження для всього пакету в цілому.

В статті, з метою встановлення меж застосування наближених прикладних теорій для їх використання в практичних інженерних розрахунках, проведені експериментальні дослідження частот власних коливань багатошарових пластин і отримані результати співставленні з теоретичними розв'язками.

Досліджуються багатошарові пластини розміром 50x64 см різної структури за товщиною [7]. При компоновці пластин несучі шари і шари заповнювача склеювалися смолою холодного затвердіння ЕД-20 і витримувалися під тиском протягом доби. В кожному із восьми типів випробувалися по дві однакові пластини. Всього було 8 пластин несиметричної структури і 8 пластин симетричної структури.

Дослідження проводились на спеціальному стенді для вібраційних досліджень пластин на якому можна забезпечити різні умови опирання. Динамічні випробування пластин проводилися при защемленні та шарнірному опиранні по контуру, а також при защемленні та шарнірному опиранні по двом протилежним сторонам.

Визначення власних частот коливань багат шарових пластин проводилося резонансним методом. Для збудження багат шарової пластини за допомогою електромагніта верхнім зовнішнім шаром був сталевий лист. Загальна схема розташування приладів при дослідженні динаміки багат шарових пластин наведена на рис. 1. Частота збудження задавалася генератором звукових частот типу ГЗ-1, який працює в діапазоні 10-5000 Гц.

**Вимірювач виходу ВЗ-10**

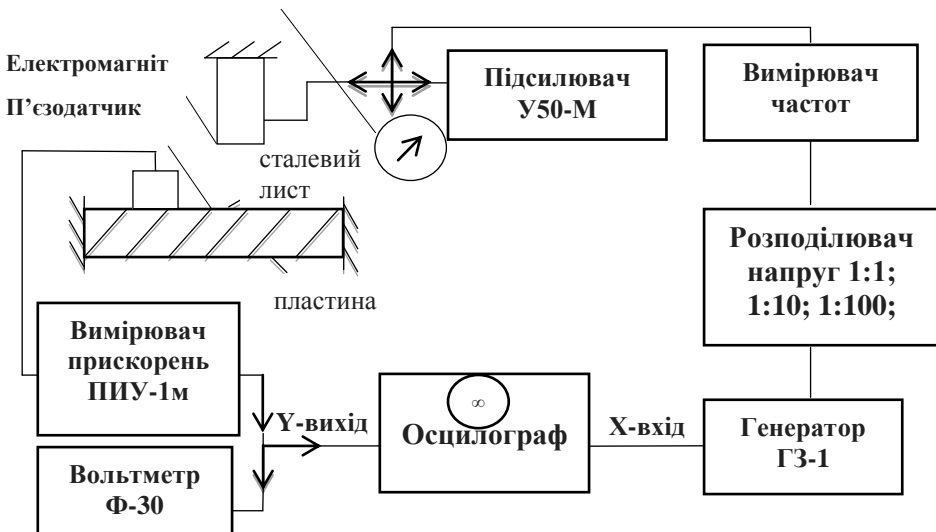


Рис. 1. Схема розташування приладів

Напруга з виходу генератора через розподільвач напруг подається на вхід підсилювача У50-М, який створює вихідну потужність до 50 Вт при напрузі 120 В. До виходу підсилювача підключена обмотка електромагніта який розрахований спеціально під цей підсилювач. Контроль напруги звукової частоти на електромагніті виконується за допомогою вимірювача виходу ВЗ-

10. Реєстрація коливань пластини здійснюється п'єзодатчиком який закріплений на пластині і увімкнений на вхід п'єзовимірювача прискорень ПИУ-1м. Враховуючи, що ПИУ-1м має інерційний стрілочний індикатор прискорень, при обертанні лімба генератора навіть з невеликою швидкістю можливі пропуски оператором резонансних піків. Щоб уникнути цього, з «шлейфного» виходу ПИУ підсилена напруга (пропорціональна прискоренню) подається на Y-вхід електронного осцилографа покази якого на екрані практично безінерційні. Ці коливання можуть спостерігатися як синусоїдальні за допомогою тимчасової розгортки осцилографа, так і у вигляді фігур Лісажу, коли до X-входу осцилографа підводиться напруга безпосередньо від генератора. Таке дублювання індикації резонансних піків дозволило надійно дослідити спектри частот пластин. Аналіз фігур Лісажу дозволив розшифрувати співвідношення між частотою коливань і частотою збудження підсилювача.

Вибір для індикації інтенсивності коливань пластини п'єзодатчика з інерційною масою, тобто датчика прискорень, цілком виправданий для дослідження широкого спектру частот. Відомо, що напружені системи з розподіленими параметрами при постійній збуджуючій силі мають спектри власних частот, амплітуди яких зі збільшенням частоти зменшуються. Якщо в експерименті проводиться вимірювання не амплітуди переміщення, а амплітуди прискорення, то рівні з ростом частоти зменшуються значно повільніше, оскільки амплітуда прискорення пропорційна квадрату частоти ( $\ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t$ ).

Особливістю вибраної методики є подвоєння частоти коливань генератора електромагнітом. Причина подвоєння полягає в тому, що електромагніт притягує феромагнітну пластину кожного півперіоду струму, який протікає по обмотці, незалежно від напрямку струму. Щоб уникнути цього, можна ввести постійне підмагнічування, яке поляризує електромагніт. Проте цей спосіб привів би до ускладнення експерименту.

Визначимо вплив несинусоїдальності збуджуючої сили, яка отримана внаслідок подвоєння частоти, на рух пластини при резонансі.

Поклавши, що сила з якою електромагніт притягує сталеву пластину, пропорційна струму який проходить через обмотку електромагніта, а також враховуючи, що ця сила завжди направлена

в одну сторону (вона є тільки притягуючою), визначимо цю силу  $P(t)$  як послідовність косинусоїдальних імпульсів одного знаку (рис. 2).

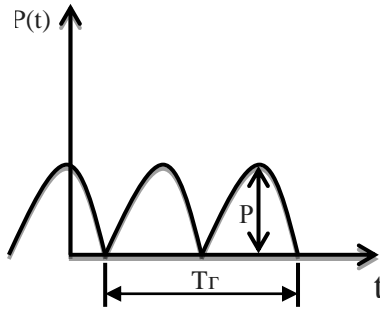


Рис. 2. Графік зміни змушуючої сили  $P(t)$

Тут  $T_r$  - період струму який збуджує електромагніт, частота якого зчитується зі шкали генератора або визначається за показами частотометра.

Періодична змушуюча полігармонічна сила розкладається в ряд Фур'є:

$$P(t) = \frac{4Pm}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos 2\omega_r t - \frac{1}{15} \cos 4\omega_r t + \frac{1}{35} \cos 6\omega_r t - \dots (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^2 - 1} \cos n\omega_r t \right] \quad (1)$$

при парних  $n$ .

Позначимо складові цієї сили

$$P_0 = \frac{2Pm}{\pi}; \quad P_2 = \frac{4Pm}{3\pi} \cos 2\omega_r t; \quad P_4 = \frac{4Pm}{15\pi} \cos 4\omega_r t; \dots$$

Складова  $P_0$  не викликає коливань пластини, а тільки не значно зменшує проміжок між магнітом і пластиною. Найбільша за амплітудою гармонічна складова  $P_2$  має частоту яка подвоєна в порівнянні з частотою генератора, що і спостерігаються в дослідах. При цьому під час резонансу на екрані осцилографа зображуються фігури Лісажу виду, який характерний для співвідношення частот 2:1 (рис. 3).



Рис. 3. Фігури Лісажу

Із (1) випливає, що в наведеній схемі експерименту повинні бути збудження тільки на парних гармоніках генератора. Інколи в самій низькочастотній частині спектра спостерігаються випадки потроєння частоти генератора. Це пояснюється асиметрією вихідного напруження підсилювача на початку діапазону. Проте контроль за фігурами Лісажу дозволив надійно відсіяти ці резонансні випадки із досліджуваного спектру.

Визначимо вплив вищих складових ряду Фур'є (1) на рух пластини при резонансі її на частоті  $2\omega_r$ .

Амплітуду стаціонарних незатихаючих коливань знаходимо за рівнянням резонансної кривої [8]:

$$A = \frac{P_{\max}}{C \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\omega_r^2 \beta_1^2}{\omega_0^4}}}, \quad (2)$$

Де  $C$  – жорсткість системи;  $\omega_0$  - власна частота;  $\beta_1 = \frac{\delta\omega_r}{2\pi}$  - показник затухання;  $\delta$  - логарифмічний декремент. Звідси отримуємо відношення амплітуди руху пластини при резонансі за четвертою гармонікою до амплітуди за другою гармонікою:

$$\frac{A_4}{A_2} = \frac{P_{4\max}}{P_{2\max}} \sqrt{\frac{\beta_1^2 / \omega_r^2}{9 + 4\beta_1^2 / \omega_r^2}}. \quad (3)$$

Із (3) випливає, що  $\frac{P_{4\max}}{P_{2\max}} = 0,2$ . Для логарифмічного декременту прийемо найвище із значень які отримані в досліді,  $\delta = 0,29$ . При цьому  $\frac{A_4}{A_2} = 0,002$ . Відношення  $\frac{A_6}{A_2}$  і всі наступні будуть ще меншими. Таким чином, вплив вищих складових виявляється незначним.

Результати експериментальних досліджень власних коливань багатопарових пластин які отримані за допомогою вище описаної методики, порівняні з результатами, отриманими з рівнянь першого варіанту уточненої теорії багатопарових оболонок [4], які записуються для випадку вільних коливань у вигляді:

$$(\mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{L} + \omega^2 \mathbf{J}) \vec{\mathbf{S}} = 0, \quad (4)$$

де матриця  $L^T \Lambda L$  та інерційна матриця  $J$  є симетричними [4], а  $\vec{\hat{S}}(\alpha_1, \alpha_2) = [\hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{W}, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3]^T$  - вектор - стовбець.

Наводяться також результати одержані на основі спрощених рівнянь варіанту теорії багат шарових оболонок при незалежній апроксимації переміщень і поперечних дотичних напружень [4].

Результати співставлення наведені у таблиці 1.

Таблиця 1  
Значення власних частот пластин I – IV типів

Типи пластин	$\omega$ , Гц					Хвильове число	
	Експеримент	Рівняння (4)	$\Delta$ , %	Рівняння спрощеного варіанту [4]	$\Delta$ , %	m	n
I	73	70	4	69	5	1	1
	115	112	3	111	4	1	2
	137	135	1	132	4	2	1
	170	166	2	158	7	2	2
II	88	82	7	82	7	1	1
	128	128	0	129	1	1	2
	151	152	0	152	0	2	1
	186	185	0	176	5	2	2
III	75	70	7	71	5	1	1
	118	112	5	112	5	1	2
	141	135	4	133	6	2	1
	174	166	5	158	9	2	2
IV	101	103	2	103	2	1	1
	172	176	2	179	4	1	2
	205	213	4	211	3	2	1
	256	263	3	258	1	2	2

У цій таблиці наведені початкові частини спектрів власних частот, які отримані експериментально (другий стовбець) і які порашовані за допомогою рівнянь (4) за припущенням, що  $\Psi_3 = 0$ ,

тобто без врахування обтиснення, а також результати отримані на основі рівнянь спрощеного варіанту теорії багатошарових оболонок [4].

Порівняння результатів показує, що у випадку несиметричної побудови пакету застосування більш простого варіанту теорії багатошарових пластин є достатньо ефективним.

1. Александров А.Я. Расчет трёхслойных панелей / А.Я.Александров, А.Э.Брюккер, А.М.Куршин, А.П.Прусаков // - М.: Оборонгиз. – 1960. – 270 с.

2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.

3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Методы расчета оболочек. – К.: Наукова думка, 1982. – Т.4. – 544 с.

4. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. – 191 с.

5. Рассказов О.О. Стійкість шаруватої замкненої сферичної оболонки під дією рівномірного зовнішнього тиску /О.О.Рассказов, О.Г.Бондарський // Вісник Національного транспортного університету. – 2010. – №21. – С.375-378.

6. Рассказов О.О. Порівняльний аналіз ефективності застосування деяких варіантів уточненої теорії пластин та оболонок на основі співставлення з точним розв'язком /О.О.Рассказов, О.Г.Бондарський // Вісник Національного транспортного університету. – 2012. – №26. – С.453-457.

7. Рассказов О.О. Експериментальні дослідження напружено-деформованого стану багатошарових пластин / О.О.Рассказов, О.Г.Бондарський // Вісник Національного транспортного університету. – 2014. - №29. – С.351-356.

8. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник /Под ред. Биргера И.А., Пановко Я.Г. – М.: Машиностроение, 1968. – т. 1-3.