

**ДОСЛІДЖЕННЯ ОБЛАСТІ ЗАСТОСУВАННЯ  
УТОЧНЕНИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ДЕФОРМУВАННЯ  
ПОКРИТТІВ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ**

**THE INVESTIGATION OF AREA APPLICATION OF  
REFINED MODELS FOR THE PROBLEMS OF DEFORMATION  
OF COATINGS ON AN RIGID FOUNDATION**

**Тинчук С.О., к.т.н., доц., Гуртовий О.Г., к.т.н., доц.  
(Національний університет водного господарства та  
природокористування, м. Рівне)**

**Tynchuk S.O., Ph.D., associate professor, Gurtovy O.G., Ph.D.,  
associate professor (National University of Water Management and Nature  
Resources Use, Rivne)**

У статті для дослідження напружено-деформованого стану (НДС) покриттів на жорсткій основі застосовано уточнені моделі беззгинового НДС. Розрахунками підтверджено ефективність і точність методики моделювання беззгинового НДС, яка дозволяє отримати розв'язки, що якісно і кількісно близькі до тривимірних.

The article for research of stress-strain state (SSS) of coatings on a rigid foundation are used refined models of unflexural SSS. The design diagram of a transversely loaded plate is formed by supplementing it with a symmetric one about the contact surface of the foundation. The double-thickness plate obtained becomes loaded bilaterally symmetrically about its median surface. Therefore the SSS of a plate is unflexural. Borders of application of the refined models depending on the physical mechanical characteristics of the plate of coating are investigated. Calculations confirm the efficiency and accuracy of such approach, which allows one to obtain solutions qualitative and quantitatively close to three-dimensional ones.

Ключові слова: уточнена модель, жорстка основа, поперечний зсув, поперечне обтиснення.

Keywords: refined model, rigid foundation, transverse shear, transverse compression.

Оцінка міцності та жорсткості різного роду однорідних та неоднорідних композитних, особливо багат шарових, покриттів зводяться до оцінки їх НДС як плит, що контактують із основою. Це стосується розрахунку дорожнього багат шарового одягу на достатньо жорстких мостових, тунельних та інших конструкціях транспортних споруд, захисних багат шарових покриттів плоских елементів конструкцій та деталей, функціональних покриттів робочих поверхонь різного обладнання, тощо. Тому достовірне визначення НДС багат шарових плит на жорстких основах при дії поперечного навантаження є актуальною задачею.

НДС таких покриттів, зважаючи на їх структурну неоднорідність та відносно низьку поперечну жорсткість окремих шарів, суттєво пов'язаний з впливом деформацій поперечного зсуву та деформацій поперечного обтиснення. Тому актуальною є задача уточненого моделювання НДС плит, яка б враховувала ці види деформацій. Необхідною є також і оцінка точності НДС, отриманого за уточненою моделлю.

Відомі уточнені моделі НДС [1, 2 та ін.], що враховують поперечні зсуви та поперечне обтиснення, зорієнтовані переважно на описання згинового НДС, тоді як у плитах на жорсткій основі переважає беззгинова складова НДС. Отже, потрібна розробка уточненої моделі, яка б з високою точністю описувала беззгинову складову НДС плити на жорсткій основі.

В роботі [3] запропоновано гіпотези та побудована модель беззгинового деформування однорідної та шаруватої плити, яка в поєднанні з моделлю згинового деформування дає результати, що близькі до точного тривимірного розв'язку. В роботах [4, 5] розглянуто структурно-континуальні моделі НДС поперечно навантажених плит, в яких ідея ітераційного моделювання [3] застосована для плит на жорсткій основі.

Метою даної роботи є оцінка точності та доцільності підходів [3-5] до моделювання НДС плит на жорсткій основі в залежності від фізико-геометричних характеристик плит.

У лінійно-пружній постановці розглядається деформування прямокутної багат шарової плити, яка опирається на жорстку основу. Шари плити – ізотропні та трансверсально-ізотропні, довільної, але сталої товщини. Замість реальної конструкції багат шарової плити (рис. 1а) пропонується розглядати

розрахункову схему плити, яка утворена симетричною добудовою відносно поверхні контакту даної плити з основою. Плита буде у цьому випадку двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє  $H = 2b_n$  (рис. 1б). При цьому контакт плити з основою відповідає умовам проковзування без тертя (рис. 1б). Жорсткий контакт плити з основою пропонується моделювати введенням додаткового абсолютно жорсткого тонкого прошарку  $h_0$  (рис. 1в).

Між шарами плити виконуються умови жорсткого контакту без проковзування. Проте, вводючи тонкі прошарки малої відносної жорсткості, можна без змін у постановці задачі розглядати і інші умови міжшарового контакту.

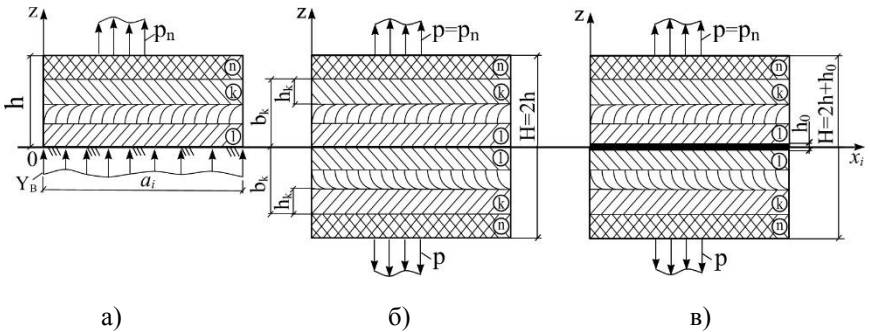


Рис.1. Варіанти оптимізації розрахункової схеми плити

Запропонований підхід дозволяє оптимізувати розглянуту в [4] уточнену модель НДС плити, яка складалася з двох якісно відмінних НДС – згинового і беззгинового. Згинова складова НДС зникає, оскільки НДС в симетричній за структурою плиті при двосторонньому симетричному навантаженні повністю описується беззгиновим НДС. Як наслідок, кількість невідомих функцій і, відповідно, порядок диференціювання розрахункової системи рівнянь в задачі істотно зменшується.

В континуальній моделі [5] компоненти вектора нормальних  $u_3^{(k)}$  та тангенціальних  $u_i^{(k)}$  зміщень до координатної поверхні  $x_1 x_2$  (рис. 1) представлені сумами добутоків гіпотетично заданих степеневих функцій  $\psi_t^{(k)}, \psi_{ir}^{(k)}$  поперечної координати  $z$  та шуканих функцій  $\gamma_t, \beta_{ir}$  і  $v_i$  координатної поверхні  $x_1 x_2$ :

$$u_3^{(k)} = \psi_{3t,3}^{(k)}(z)\gamma_t + \psi_{33,3}^{(k)}(z)p; \quad t = \overline{1, 2}; \quad i = \overline{1, 2};$$

$$u_i^{(k)} = v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,i} - \psi_{33}^{(k)}(z)p_{,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}; \quad r = \overline{1, 4}, \quad (1)$$

де дві функції  $\gamma_t$  моделюють вплив поперечного обтиснення, а вісім функції  $\beta_{ir}$  – вплив поперечного зсуву в четвертому наближенні по кожній змінній  $x_i$ ,  $p$  – функція заданого навантаження. Тут і надалі диференціювання по  $x_\alpha$  позначено нижніми індексами після коми, а також виконується підсумовування за нижніми індексами, що повторюються.

Модель (1) зручна в тих задачах, де функція навантаження  $p(x_i)$  не має розривів першого і другого роду і тим самим не суперечить принципу нерозривності переміщень  $u_\alpha^{(k)}$  і принципом диференціювання функцій. В аналітичних методах розрахунку модель (1) дуже ефективна [5]. Проте в задачах, де функція навантаження має розриви, бажано замінити  $p(x_i)$  в (1) невідомою функцією обтиснення. Таким чином, далі реалізується також модель у вигляді:

$$u_3^{(k)} = \psi_{3t,3}^{(k)}(z)\gamma_t; \quad t = \overline{1, 3};$$

$$u_i^{(k)} = v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}. \quad (2)$$

Шукана функція  $\gamma_3(x_i)$  – гладка і відповідає умовам нерозривності, як і функції  $v_i, \gamma_1, \gamma_2, \beta_{ir}$ .

Функції  $\psi_{3t}^{(k)}, \psi_{ir}^{(k)}$ , що моделюють розподіл зміщень за координатою  $z$ , мають вигляд [5]:

$$\psi_{3t,3}^{(k)} = \int_0^z a_{3333}^{(s)} F_t^{(s)} dz; \quad \psi_{33,3}^{(k)} = \int_0^z a_{3333}^{(s)} dz; \quad t = \overline{1, 2}; \quad r = \overline{1, 4};$$

$$\psi_{ir}^{(k)} = -\int_0^z a_{i3i3}^{(s)} f_{ir}^{(s)} dz; \quad \psi_l^{(k)} = \int_0^z \psi_{l,3}^{(s)} dz; \quad s = \overline{1, k}; \quad l = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

У виразах (3) функції  $F_t^{(k)}(z)$  апроксимують розподіл напруг поперечного обтиснення  $\sigma_{33}$ , а функції  $f_{ir}^{(k)}(z)$  – напруг поперечного зсуву  $\sigma_{i3}$  по висоті плити. Вони детально описані в [5].

Для обґрунтування області застосування запропонованих моделей в залежності від розмірів плити досліджено точність розв'язків задачі плоскої деформації однорідної ізотропної плити

( $\nu=0,3$ ) на жорсткій основі (рис. 2) під дією синусоїдального навантаження  $p = p_0 \sin(\pi x_1 / a_1)$ . Плита розраховувалась за допомогою чотирьох варіантів уточнених запропонованих моделей, які позначено на рис. 2, 3 і в табл. 1 як  $M(C,S)$ . Відповідно,  $M_1(1,1)$  – оптимізована модель з заданою функцією навантаження (1), в якій утримувалось одна невідома функція поперечного обтиснення  $C=1$ , та одна функція поперечного зсуву  $S=1$ ;  $M_1(2,2)$  – модель (1) з  $C=2$ ,  $S=2$ ;  $M_2(2,2)$  – оптимізована модель (2) без явної функції навантаження при  $C=2$ ,  $S=2$ .  $M_3(3,3)$  – загальна модель [4] для схеми на рис. 1а з  $C=3$  та  $S=3$ .

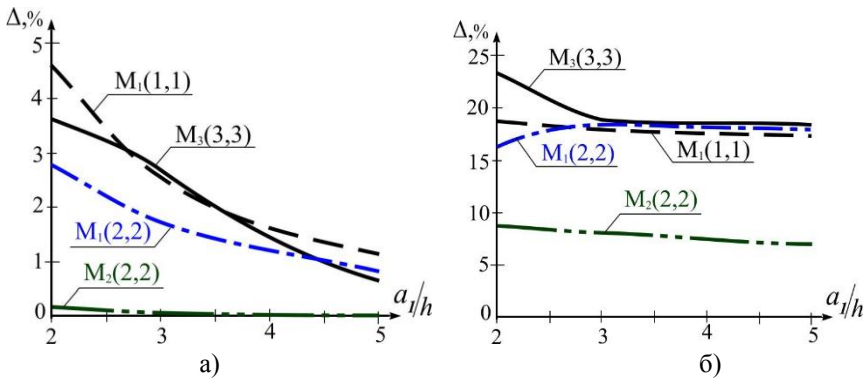


Рис. 2. Відносні похибки в уточнених розв'язках для НДС однорідної ізотропної плити:

а) в нормальних зміщеннях  $u_3^\#$ ; б) в максимальних напругах  $\sigma_{11}^\#$

Виконано порівняння з тривимірними розв'язками ( $T$ ), які отримано за методикою [6]. Введено позначення максимальних відносних зміщень  $u_\alpha^\# = u_\alpha^{\max} E / p_0 h$  та максимальних відносних напруг  $\sigma_{ii}^\# = \sigma_{ii}^{\max} / p_0$ .

Як видно з результатів розрахунку для ізотропної плити (рис. 2) похибки в розрахунках зменшуються із зменшенням відносної товщини  $h/a_1$ . Для максимальних напруг точність моделей дещо гірша, ніж для зміщень (рис. 2). Найкращі результати для ізотропної плити отримані за  $M_2(2,2)$  за оптимізованою моделлю (2) з невідомою функцією навантаження, яка дозволяє розраховувати суттєво товсті плити, майже масиви.

Для обґрунтування області застосування уточнених моделей в залежності від фізичних параметрів досліджувався вплив співвідношень пружних характеристик плити на точність розв'язків за моделями (рис.3). Аналізувались розв'язки для квадратної плити на жорсткій основі з крайовими умовами Нав'є під дією синусоїдального навантаження при ковзкому контакті (рис. 3., табл. 1). Матеріал плити трансверсально-ізотропний з  $\nu=0,3$ ;  $\nu''=0,1$ ;  $\nu''/E=\nu'/E'$ ;  $a=3h$  ( $a=1,5H$ ). Модулі пружності та зсуву в площині ізоотропії  $E, G$ , а в перпендикулярному напрямку –  $E', G'$ .

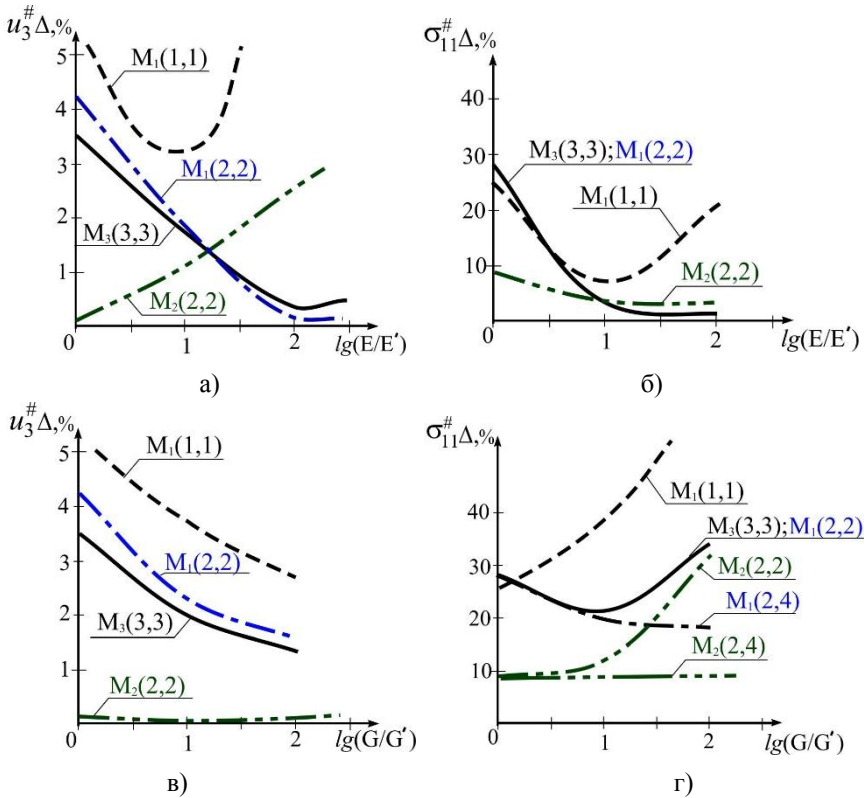


Рис. 3. Відносні похибки в НДС однорідної трансропної плити:  
 а), в) для нормальних зміщень  $u_3^{\#}$ ; б), г) для максимальних напруг  $\sigma_{11}^{\#}$

Таблиця 1

Порівняння максимальних зміщень  $u_3^{\#}$  та максимальних напруг  $\sigma_{11}^{\#}$  в квадратній плиті з тривимірним розв'язком

Модель	$B1=0;$ $B2=0$		$B1=1;$ $B2=0$		$B1=2;$ $B2=0$		$B1=0;$ $B2=2$	
	$u_3^{\#}$	$\sigma_{11}^{\#}$	$u_3^{\#}$	$\sigma_{11}^{\#}$	$u_3^{\#}$	$\sigma_{11}^{\#}$	$u_3^{\#}$	$\sigma_{11}^{\#}$
$M_1(1,1)$ ( $\Delta, \%$ )	0,906 (6,95)	0,629 (27,2)	6,406 (3,12)	2,245 (6,5)	35,97 (15)	8,40 (22,4)	0,933 (2,73)	0,390 (90)
$M_1(2,2)$ ( $\Delta, \%$ )	0,883 (4,2)	0,631 (27,5)	6,327 (1,85)	2,190 (3,9)	31,43 (0,74)	6,898 (0,52)	0,922 (1,57)	0,289 (41,2)
$M_2(2,2)$ ( $\Delta, \%$ )	0,847 (0,08)	0,540 (9,1)	6,279 (1,08)	2,183 (3,55)	30,40 (2,5)	7,069 (3,0)	0,907 (0,07)	0,270 (32)
$M_3(3,3)$ ( $\Delta, \%$ )	0,877 (3,5)	0,635 (28,4)	6,320 (1,74)	2,189 (3,89)	31,37 (0,54)	6,885 (0,34)	0,920 (1,3)	0,274 (34)
$T$	0,848	0,495	6,212	2,108	31,98	6,862	0,908	0,205

В таблиці 1 введено позначення:  $\lg(E/E') = B1$ ,  $\lg(G/G') = B2$  і для трансверсальної-ізотропії виконується співвідношення  $\nu''/E = \nu'/E'$  при  $\nu'' = 0,1$ . Приймалось  $\nu = 0,3$ ;  $\nu' = 0,3$  для  $B1 = 0$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\nu' = 0,01$  для  $B1 = 1$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\nu' = 0,001$  для  $B1 = 2$ .

В табл. 1 в дужках показано похибки наближених розв'язків порівняно з тривимірними розв'язками ( $T$ ). Показано, що в суттєво товстих квадратних плитах, наприклад, з  $a/h = 2,5$  чи  $a/h = 3$  (табл. 1), при зростанні  $G/G'$  необхідно збільшувати кількість функцій поперечного зсуву: при  $G/G' < 100$  необхідно дві функції зсуву  $S = 2$  у кожному з ортогональних напрямків  $x_i$ ; при  $100 \leq G/G' \leq 500$  –  $S = 3 \div 4$ . При зростанні співвідношення  $E/E'$  необхідне збільшення кількості функцій поперечного обтиснення: при  $E/E' \leq 10$  достатньо використання однієї функції  $C = 1$ , при  $10 \leq E/E' \leq 1000$  потрібно дві функції обтиснення  $C = 2$ . В плиті з  $a/h = 5$  є можливість зменшення кількості невідомих функцій. Відмітимо, що похибки для напруг  $\sigma_{11}$  більші, ніж для зміщень  $u_\alpha$  (рис. 3).

Як видно з наведених результатів розрахунку тестових задач, побудована математична модель дозволяє отримувати результати, що якісно і кількісно наближаються до тривимірних розв'язків. Модель можна застосовувати для розрахунку НДС суттєво товстих плит ( $a/h = 3$ ), при широкому діапазоні зміни параметрів відносної трансропії в шарі ( $1 \leq E/E' \leq 500$ ,  $1 \leq G/G' \leq 500$ ).

Потрібно відзначити, що результати розрахунків при використанні оптимізованого підходу до формування розрахункової схеми плити з використанням моделей беззгинового НДС ( $M_1$ ,  $M_2$ ) та за загальною моделлю  $M_3$ , що описує як беззгиновий, так і згиновий НДС в заданій плиті, є досить близькими. Проте оптимізований підхід з моделями  $M_1$ ,  $M_2$  дозволяє отримувати достовірні результати при меншій кількості шуканих функцій та при меншому загальному порядку диференціювання розрахункової системи рівнянь.

1. Пискунов В.Г. Об одном варианте неклассической теории многослойных пологих оболочек и пластин / В.Г. Пискунов // Прикладная механика. – 1979. – Т. 15, № 11. – С.76–81.

2. Рассказов А.О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек / А.О. Рассказов // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 11. – С. 50 – 56.

3. Гуртовий А.Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур / А.Г. Гуртовий // Механика композитных материалов. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 13–28.

4. Гуртовий О.Г. Задача поперечного деформування трансверсально-ізотропної плити при контакті з абсолютно жорсткою основою / О.Г. Гуртовий, С.О. Тинчук // Зб. наук. праць – Вісник УДУВГП – Рівне: УДУВГП. – 2004. – Випуск 2 (26). – с.222-229.

5. Гуртовий А.Г. Безыгибная уточненная модель деформирования многослойных плит на недеформируемом основании / А.Г. Гуртовий, С.А. Тынчук // Механика композитных материалов. – 2006. – Т. 42, № 5. – С. 643–654.

6. Пискунов В.Г. Решение задач статики для слоистых ортотропных плит в пространственной постановке / В.Г. Пискунов, В.С. Сипетов, Ш.Ш. Туйметов // Прикладная механика. – 1990. – Т. 26, № 2. – С.41–49.