УДК 539.3

РОЗРАХУНОК НЕКЛАСИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗГИНУ ОРТОТРОПНИХ ПЛИТ МЕТОДОМ ЛІНІЙНОГО СПРЯЖЕННЯ ПОВІДОМЛЕННЯ 1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ І ЗАЛЕЖНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИН У КОМПЛЕКСНІЙ ПОСТАНОВЦІ

CALCULATION OF NON-CLASSICAL MODELS OF BENDING PLATES ORTHOTROPIC METHOD LINEAR CONJUGATION MESSAGE 1. BASIC EQUATIONS FOR PLATES IN THE COMPLEX SETTING

Шваб'юк В.І., д.т.н., проф., Ротко С.В., к.т.н., доц., Ужегова О.А., к.т.н., доц., Гуда О.В., к.т.н., доц. (Луцький національний технічний університет, м. Луцьк)

Shvabyuk V.I., doctor of engineerings sciences, professor, Rotko S.V., candidate of technical sciences, associate professor, Uzhegova O.A., candidate of technical sciences, associate professor, Guda O.V., candidate of technical sciences, associate professor (Lutsk National Technical University, Lutsk)

У роботі запропонована методика постановки крайових задач для уточненої моделі ортотропних пластин із застосуванням методу лінійного спряження за такого виду ортотропії, коли корені характеристичного рівняння рівні та уявні.

In this paper we propose a method of setting of boundary value problems for the specified model orthotropic plates using the method of linear conjugation for this kind of orthotropic, when the roots of the characteristic equation are equal and imaginary. Received a convenient relation between bending and torque moments, shear forces and generalized angles of turns, recorded via complex potentials. Considering Hooke's law, expressions for voltages through the internal forces and moments were found.

Ключові слова: ортотропна плита, уточнена модель згину, метод лінійного спряження.

Keywords: orthotropy stove, a refined model of the bending, the method of linear conjugation.

Вступ. Метод лінійного спряження М.І. Мусхелішвілі [3] стосовно теорії згину тонких пластинок Кірхгофа, можливо,вперше, систематично почав використовуватись С.Г. Лехніцьким [2] і Г.М. Савіним [5]. Для ізотропних і трансверсально-ізотропних пластин в уточненій постановці цей метод досить детально розглянуто І.О. Прусовим в його монографії [4], а також у роботах його учнів. Метод лінійного спряження аналітичних функцій зручно використовувати для розв'язку задач зі змішаними граничними умовами на краях [3,4].

Аналіз систем рівнянь уточненої моделі [7] для трансверсально-ізотопних пластин показує, що їх рівняння легко описуються аналітичними функціями Колосова-Мусхелішвілі [3,5] від комплексної змінної $z = x + iy$.

Разом з тим, застосування цього методу для ортотропних пластин пов'язане зі значними труднощами як у записах через комплексні потенціали виразів для згинальних моментів і поперечних сил, так і в постановці крайових задач. Тому у випадках ортотропних пластин ним майже не користуються.

У роботі запропонована методика постановки крайових задач для уточненої моделі ортотропних пластин із застосуванням методу лінійного спряження за такого виду ортотропії, коли корені характеристичного рівняння рівні та уявні.

Основні рівняння згину ортотропних плит. Рівняння моделі згину ортотропних плит середньої товщини в частинних похідних, яка близька до рівнянь С.О. Амбарцумяна [1], мають вигляд [6]:

$$D_1 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + 2\left(2D_{66} + D_{12}\right)\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial y^4} =$$

$$= q_2 + \left(K_y - K_x\right)\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + \left(\bar{A}_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{A}_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) q_2; \qquad (1)$$

$$D_{66}\Delta\Omega + \left(D_1 - \left(2D_{66} + D_{12}\right)\right)\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{5}{4} K_x \cdot \Omega \qquad \begin{pmatrix} x \leftrightarrow y \\ 1 \leftrightarrow 2 \end{pmatrix};$$

$$K_x \frac{\partial^2 w_\tau}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 w_\tau}{\partial y^2} - \left(K_x - K_y\right)\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = -q_2 .$$

Тут $K_x = \frac{4}{3} G_{13} h, \quad K_y = \frac{4}{3} G_{23} h, \quad \bar{A}_1 = 0,4 A_1 h^2,$

$$D_1 = \frac{2}{3} \frac{E_1 h^3}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad D_{16} = D_{12} + 2D_{66}, \quad D_{66} = \frac{2}{3} G_{12} h^3,$$

$$\bar{A}_2 = 0.4 A_2 h^2, \quad D_{12} = \nu_{12} D_1 = \nu_{21} D_2, \quad \tilde{w} = w - \frac{4}{5} w_\tau .$$

Вирази для зусиль і моментів, що діють у поперечних перерізах ортотропної пластини, можна записати у вигляді [7]:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= B_1 (\varepsilon_x + \nu_{12} \varepsilon_y) + N_x^*, \\ M_x &= D_1 \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \nu_{12} \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) + M_x^*, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(x \leftrightarrow y); \\ &(1 \leftrightarrow 2); \end{aligned}$$

$$N_{xy} = 3D_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot h^{-2}; \quad H_{xy} = D_{66} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right); \tag{2}$$

$$Q_x = K_x \psi_x, \qquad Q_y = K_y \psi_y,$$

де $B_1 = 2\tilde{E}_1 h, \quad N_x^* = 2hA_1 \cdot q_1, M_x^* = \bar{A}_1 \cdot q_2, \begin{bmatrix} x \to y \\ 1 \to 2 \end{bmatrix};$

$$D_{66} = \frac{2}{3} G_{12} h^3, \quad D_1 = \frac{2}{3} \tilde{E}_1 h^3 \ ,\{\gamma_x, \gamma_y\} = -\left\{ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right\} + \frac{4}{5} \{\psi_x, \psi_y\}.$$

Формули для напружень у поперечних перерізах плити

можна отримати з формул [6]:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{2h} + \frac{3M_x}{2h^3} \cdot \gamma + \tilde{E}_1 \left(\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \nu_{12} \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} \right) \cdot f(\gamma);$$

$$\sigma_y = \frac{N_y}{2h} + \frac{3M_y}{2h^3} \cdot \gamma + \tilde{E}_2 \left(\frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial_y} + \nu_{21} \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} \right) \cdot f(\gamma); \tag{3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{2h} + \frac{3N_{xy}}{2h^3} \cdot \gamma + G_{12}\left(\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial_y} + \nu_{21}\frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial x}\right) \cdot f(\gamma);$$

$$\tau_{x\gamma} = G_{13}\left(1-\gamma^2/h^2\right)\bar{Q}_x, \quad \tau_{y\gamma} = G_{23}\left(1-\gamma^2/h^2\right)\bar{Q}_y.$$

Тут $\bar{Q}_x = \dfrac{Q_x}{K_x}, \quad \leftrightarrow \quad \left(f\left(\gamma\right) = \dfrac{\gamma}{5}\left(1-\dfrac{5\gamma^2}{3h^2}\right)\right.,$

$\bar{E}_1 = E_1/(1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}), (1 \leftrightarrow 2).$

Необхідно зауважити, що формули (2) для дотичних напружень $\tau_{x\gamma}$, $\tau_{y\gamma}$ у плитах, на відміну від аналогічних формул в оболонках, співпадають із відповідними формулами теорії Амбарцумяна [1].

Комплексне подання основних рівнянь і формул теорії згину ортотропних пластин. Рівняння згину пластин (1) при такому виді ортотропії, коли корені характеристичного рівняння рівні та уявні, мають вигляд:

$$D_1\tilde{\Delta}\tilde{\Delta}\tilde{w} = \tilde{q}_2 + \tilde{A}_1\tilde{\tilde{\Delta}}q_2; \quad K_x\tilde{\Delta}w_\tau = -\tilde{q}_2, \tag{4}$$

$$\Delta\Omega + n_1\left(1-\alpha^2\right)\Omega''_{xx} = k_0^2\Omega, \;\; n_1 = D_1/D_{66};$$

де $\tilde{\Delta} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \tilde{\tilde{\Delta}} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\nu_{13}+\nu_{21}\nu_{23}}{\nu_{23}+\nu_{12}\nu_{13}} \cdot \alpha^4\dfrac{\partial^2}{\partial y^2};$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \;\; \tilde{q}_2 = q_2 + K_x\left(\alpha^2-1\right)\Omega''_{xy}; \;\; K_x = \frac{3}{4}G_{13}h;$$

$$\alpha^2 = \left(2D_{66}+D_{12}\right)/D_1 = \sqrt{D_2/D_1} = K_y/K_x = \lambda^{-2};$$

$$k_0^2 = \frac{5}{4}K_x/D_{66}; \;\; \tilde{A}_1 = 0,4E_1h^2\left(\nu_{13}+\nu_{21}\nu_{23}\right)/\left(1-\nu_{12}\nu_{21}\right)E_3;$$

$\tilde{w} = w - 0,8w_\tau$ – деяка узагальнена функція переміщень, яку можна виразити через комплексні потенціали $\varphi\left(z\right)$ і $\chi\left(z\right)$ у вигляді формули Гурса [3,5,6]:

$$\tilde{w} = \mathrm{Re}\left[\bar{z} \cdot \varphi\left(z\right) + \chi\left(z\right)\right] + \tilde{w}^*; \tag{5}$$

$z = x + i\lambda y$ – комплексна змінна, $\tilde{w}^*$ – частковий розв'язок першого рівняння системи (3), λ – кратний додатній корінь характеристичного рівняння

$$D_2\lambda^4 - 2\left(2D_{66} + D_{12}\right)\lambda^2 + D_1 = 0. \qquad (6)$$

При такому виді ортотропії залежності між згинальними та крутними моментами, поперечними силами та узагальненими кутами поворотів нормалі будуть наступними [6]:

$$M_y + \alpha^2 M_x = -2D_1\left(\alpha^2 + \nu_{12}\right)\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \frac{2}{5}\left(\alpha^2 - 1\right)\Omega''_{xy}\right] + \tilde{M}^*;$$

$$M_y - \alpha^2 M_x + 2i\alpha H_{xy} = 4D_{66}\left[\Psi(z) + \bar{z}\Phi'(z) + \right.$$
$$\left. +0.4i\left(\alpha\bar{R}_2 - i\left(\alpha - 1\right)^2 \Omega''_{xy}\right)\right] + M_y^* - \alpha^2 M_x^* + 2i\alpha H_{xy}^*;$$

$$\alpha^2\left(1 + r\right)M_x - \left(\nu_{21} - r\right)M_y - i\alpha\left(1 + \nu_{21}\right)H_{xy} =$$
$$= -D_1\left(\alpha^2 - \nu_{12}\right)\left(1 + \nu_{21}\right)\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \Psi(z) \quad + \quad \bar{z}\Phi'(z) + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{5}i\left(\alpha\bar{R}_2 + 2i\left(\alpha - 1\right)\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}\right)\right] + M^*;\ R_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Omega;$$

$$Q_x - i\lambda Q_y = -4D_1\Phi(z) - i\alpha K_x\bar{R}_1 + Q_x^* - i\lambda Q_y^*; \qquad (7)$$

$$\gamma_x + i\alpha\gamma_y = -\left[\varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)}\ \right] + 0.8i\alpha R_1 + \gamma_x^* + i\alpha\gamma_y^*;$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i\alpha\frac{\partial w}{\partial y} = -\left(\gamma_x + i\alpha\gamma_y\right) - 4\varepsilon\overline{\Phi'(z)} + \frac{4}{5}i\alpha R_1,$$

де $\qquad R_1 = \Omega'_x + i\lambda\Omega'_y;$

$$\varepsilon = 0,8D_1 / K_x.\ r = \left(\nu_{21}\alpha^2 - \nu_{12}\right)\left(\alpha^2 + \nu_{12}\right)^{-1},$$

$$\Phi(z) = \frac{d}{dz}\varphi(z), \quad \Psi(z) = \frac{d}{dz}\psi(z),$$

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\chi(z).\ \tilde{M}^* = M_y^* + \alpha^2 M_x^*$$

$$M^* = \alpha^2\left(1 + r\right)M_x^* - \left(\nu_{21} - r\right)M_y^* - i\alpha\left(1 + \nu_{21}\right)H_{xy}^*;$$

Між похідними по z, $\overline{z}$ довільних диференційованих функцій і похідними по аргументах "x" і "y" цих функцій існують залежності:

$$\frac{\partial w}{\partial x}+i\alpha\frac{\partial w}{\partial y}=2\frac{\partial w}{\partial \overline{z}};\quad \frac{\partial w}{\partial x}-i\alpha\frac{\partial w}{\partial y}=2\frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\alpha^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \overline{z}}.$$

Величини M_x^*, M_y^*, H_{xy}^*, Q_x^*, Q_y^*, w^*, γ_x^*, γ_y^* визначаються за рахунок часткових розв'язків системи рівнянь (4). Для випадку трансотропного матеріалу ці величини знаходять із співвідношень:

$$M_x^*+M_y^*=-4D\left(1+\nu\right)\frac{\partial w^*}{\partial z\partial \overline{z}}+\frac{4}{5}A' q_2 h^2;$$

$$M_y^*-M_x^*+2iH_{xy}^*=4D\left(1-\nu\right)\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2};$$

$$Q_x^*+iQ_y^*=-8D\frac{\partial^3 w^*}{\partial z^2\partial \overline{z}};$$

$$\frac{\partial \tilde{w}^*}{\partial x}+i\frac{\partial \tilde{w}^*}{\partial y}=2\frac{\partial \tilde{w}^*}{\partial \overline{z}};\quad \gamma_x^*+i\gamma_y^*=-2\frac{\partial \tilde{w}^*}{\partial \overline{z}}.$$

Формулами (7) зручно користуватись, коли пластинка згинається зусиллями, розподіленими по краю, а навантаження на поверхнях $\gamma=\pm h$ відсутнє $\left(q_1\left(z,\overline{z}\right)=q_2\left(z,\overline{z}\right)=0\right)$.

У цьому випадку система рівнянь (3) стає однорідною, а в формулах (6) необхідно покласти

$$M_x^*=M_y^*=H_{xy}^*=Q_x^*=Q_y^*=w^*=\gamma_x^*=\gamma_y^*=0.$$

Виходячи з означень Г.М. Савіна, а також формул даної роботи, запишемо вирази для головного вектора P^0 та головного моменту $M^0=M_x^0+i\alpha M_y^0$, записані через комплексні потенціали

$$P_\gamma^0=\left\{2i\alpha D_1\left[\Phi\left(z\right)-\overline{\Phi\left(z\right)}\right]-K_y\Omega\right\}_L; \tag{8}$$

$$M^0 = \left\{ 2D_{66}\left[z\overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)} - \frac{4}{5}R_1 \right] + 2z\alpha^2 D_1\left[\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} \right] - \right.$$
$$\left. -D_1\left(3\alpha^2 + \nu_{12}\right)\varphi(z) - i\alpha z K_x\left(\alpha^2 - 1\right)\Omega \right\}_L ,$$

де символ L праворуч фігурних дужок означає приріст виразів у дужках при однократному обході контуру L . Обхід контуру L здійснюється шляхом найкоротшого обертання осі Ox до співпадання її з віссю Oy .

Надалі будемо припускати, що функція Ω є однозначною у будь-якій точці однозв'язної чи багатозв'язної області, яку займає пластина, і прямує до нуля при $|z| \to \infty$. Тому вирази та інтеграли, котрі мають функції $\Omega(x, y)$, чи $R_1(x, y)$, можна покласти рівними нулю при будь-якому замкнутому контурі. Тим самим вважається, що головний вектор і головний момент напруженого стану, який описується цією функцією на боковій поверхні, і вирізаного з пластини циліндра, дорівнює нулю. Аналіз формул (7), (8) для ортотропної пластини показує, що функція $\varphi(z)$ визначена з точністю до складових $Cz + \gamma'_0$, а функція $\psi(z)$ – з точністю до сталої γ''_0. Тут C – довільна дійсна стала, а γ' і γ'' – довільні комплексні сталі.

Як показано Г.М. Савіним [5] та І.О. Прусовим [4], наведені добавки відповідають переміщенню пластин як жорсткого цілого. Для ліквідації такої невизначеності достатньо вимагати, щоб у точці $z = 0$, яка належить області, що займає пластина, виконувались умови:

$$\mathrm{Im}\left[\Phi(0)\right] = 0; \quad \varphi(0) = 0; \quad \psi(0) = 0. \tag{9}$$

Якщо ж маємо випадок нескінченної плити з довільним отвором, де розміщений початок координат, то при нульових значеннях головного вектора P_γ^0 і головного моменту M^0 зовнішнього навантаження відносно початку координат, досить покласти

$$\operatorname{Im}\left[\Phi(\infty)\right]=0;\quad \varphi\;(\infty)=0;\quad \psi(\infty)=0. \tag{10}$$

Таким чином, за заданих навантажень чи переміщень, завжди можна одержати вирази для комплексних потенціалів, які б задовольняли умовам (9), (10).

Висновки. Використано метод лінійного спряження для уточненої моделі згину ортотропних плит середньої товщини, що враховує поперечний зсув та обтиснення. За методикою І.О. Прусова, коли корені характеристичного рівняння можуть бути рівні та уявні, отримано зручні залежності між згинальними і крутними моментами, поперечними силами та узагальненими кутами поворотів, записані через комплексні потенціали. Враховуючи закон Гука, знайдено вирази для напружень через внутрішні сили і моменти.

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.– С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1987. –360с.

2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.

3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

4. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит / И.А. Прусов. – Минск: Издательство Беларусского государственного университета, 1975. – 256 с.

5. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наукова думка, 1968. – 887 с.

6. Шваб′юк В.І. Комплексне подання уточнених рівнянь згину ортотропних пластин з тріщинами / В.І. Шваб’юк // Машинознавство. – 1999.– №4.– С. 51–55.

7. Швабюк В.И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально-изотропных плит / В.И. Швабюк // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16. – №9. – С. 71–77.