

НАПРУЖЕННЯ БІЛЯ ВИСВЕРДЛЕНИХ ОТВОРІВ У ОКОЛІ ВЕРШИН ТРІЩИН

STRESSES NEAR HOLES DRILLED IN THE VICINITY OF CRACK TIP

**Максимович О.В., д.т.н., проф. (Луцький НТУ, м. Луцьк),
Іллюшин О.В., аспірант (Луцький НТУ, м. Луцьк), Лавренчук С.В.,
аспірант (Луцький НТУ, м. Луцьк)**

**Maksimovich O.V., DSc in engineering, professor(Lutsk National
Technical University, Lutsk), Ilyushin O.V., PhD student, (Lutsk National
Technical University, Lutsk), Lavrenchuk S.V., PhD student, (Lutsk
National Technical University, Lutsk)**

Виконано дослідження напружень біля отвору, що створений біля вершини тріщини з метою гальмування її росту, та на їх основі надані рекомендації щодо вибору оптимальних отворів з метою гальмування росту тріщин.

This article has explored tensions near the hole that was created at the crack tip for the purpose of braking its growth. Calculation of stress concentration on the edge of the hole and the stress at the crack tip made by the Muskhelishvili method using conformal mapping. On the basis of research for openings of various shapes offered advice on choosing the best holes for the purpose of growth inhibition cracks.

Ключові слова: напруження, пластинка, тріщина, оптимальний отвір.

Keywords: stress, plate, crack, hole, optimal hole.

Для зупинки тріщин у околі їх вершин висвердлюють отвори, переважно кругової форми. При циклічних навантаженнях на межі отвору часто виникають нові мікротріщини, що приводить до подальшого росту тріщини. Причиною їх росту є високі напруження, які виникають на межі отвору напроти основної тріщини. Виконаємо дослідження концентрації напружень на межі отворів із крайовою тріщиною та коефіцієнтів інтенсивності

напружень (КІН) залежно від їх форми й довжини тріщини. Такі дослідження дозволять оцінити можливість регулювати концентрацію напружень формою отворів. Питанням дослідження напружень біля отворів з тріщинами в літературі присвячено значна кількість робіт [2,4,7,8]. Однак в цих роботах основна увага спрямовувалась на дослідження напружень біля вершин тріщин.

Постановка задачі. Розглянемо пластинку з отвором, яка знаходиться під дією прикладеного навантаження на нескінченності. Прийmemo, що отвір послаблений крайовою прямолінійною тріщиною довжиною L , межа отвору та береги тріщини вільні від навантаження. Розв'язок даної задачі з використанням конформного відображення отримано в [6]. Використаємо цей розв'язок для дослідження НДС пластинок із отворами, що мають крайові тріщини, представивши його в зручному для розрахунків вигляді.

Розв'язок виразимо через комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ [6]. Тут область, яку займає пластинка, віднесена до Декартової системи координат Oxy , $z=x+iy$. Прийmemo, що на нескінченності до пластинки прикладені зусилля, які описуються потенціалами у вигляді

$$\varphi_1(z) \approx a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_M z^M, \quad \psi_1(z) \approx e_1 z + e_2 z^2 \dots + e_M z^M,$$

де $a_1, a_2, \dots, a_M, e_1, e_2, \dots, e_M$ - відомі сталі [6].

Випишемо ці коефіцієнти для деяких випадків навантаження [6]. У випадку, коли на нескінченності головні напруження дорівнюють N_1, N_2 та головна вісь, що відповідає зусиллям N_1 нахилена під кутом α до осі Ox , то ненульовими будуть коефіцієнти

$$\operatorname{Re} a_1 = (N_1 + N_2) / 4, \quad e_1 = -(N_1 - N_2) e^{-2i\alpha} / 2.$$

При чистому зсуві пластинки (коли при $z \rightarrow \infty$ $\tau_{xy} = \tau$) тут $a_1 = 0, e_1 = i\tau$.

Метод конформного відображення. Задача теорії пружності для нескінченної пластинки з отвором, межа якого вільна від навантаження, зводиться до визначення функцій Мусхелішвілі $\varphi_1(z)$ та $\psi_1(z)$ з умови [6]

$$\varphi_1(z) + \overline{z\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = C, \quad z \in L,$$

де C – довільна комплексна стала, L – межа отвору.

Прийmemo, що відома функція, яка конформно відображає зовнішність одиничного круга в площині ζ на область, що займає пластинка

$$\omega(\zeta) = c\zeta + \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{\zeta^n}, \quad (1)$$

де c, c_1, \dots, c_N – відомі коефіцієнти, $|\zeta| > 1$.

Зазначимо, що метод Мухелішвілі розглядався в низці робіт, огляд яких наведено в [4,6]. Реалізація цього методу зводиться до розгляду достатньо громіздких співвідношень, пов'язаних із діями над рядами. Викладемо розв'язок цієї задачі у матричному вигляді, який дозволяє реалізувати його за допомогою процедур сучасних математичних систем, зокрема, "Matlab".

Позначимо $\varphi_1(\omega(\zeta)) = \varphi(\zeta)$, $\psi_1(\omega(\zeta)) = \psi(\zeta)$. В допоміжній системі ζ на нескінченності для цих функцій маємо

$$\varphi(\zeta) \sim U(\zeta), \psi(\zeta) \sim V(\zeta),$$

$$\text{де } U = \sum_{j=1}^M \alpha_j \zeta^j, V = \sum_{j=1}^M \delta_j \zeta^j.$$

Зокрема, при $M = 3$ тут

$$\alpha_1 = c(a_1 + 3a_3cc_1), \alpha_2 = a_2c^2, \alpha_3 = a_3c^3,$$

$$\delta_1 = c(e_1 + 3e_3cc_1), \delta_2 = e_2c^2, \delta_3 = e_3c^3.$$

Функцію $\varphi(\zeta)$ будемо шукати у вигляді

$$\varphi(\zeta) = U(\zeta) - S(1/\zeta), \quad (2)$$

де $S(\zeta) = S_1\zeta + S_2\zeta^2 + \dots + S_{N_1}\zeta^{N_1}$; $N_1 = N + M - 1$; S_1, \dots, S_{N_1} - невідомі сталі, які будуть визначені нижче.

Тоді [6]

$$\psi(\zeta) = -\overline{\varphi(1/\zeta)} - \frac{\overline{\omega(1/\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta), \quad (3)$$

де

$$\varphi'(\zeta) = U'(\zeta) - \sum_{n=1}^{N+2} s_n / \zeta^{n+1}, \quad s_n = nS_n.$$

Зобразимо

$$\bar{\omega}(1/\zeta)/\omega'(\zeta) = \frac{\bar{c}/\zeta + \bar{c}_1\zeta + \dots + \bar{c}_N\zeta^N}{c + c_1'/\zeta + c_2'/\zeta^2 + \dots + c_N'/\zeta^{N+1}} = w(\zeta) + B(\zeta), \quad (4)$$

де $c_j' = -(j-1)c_{j-1}$, $B(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + \dots + b_N\zeta^N$,

$$w(\zeta) = \frac{W(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad W(\zeta) = \frac{W_1}{\zeta} + \frac{W_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{W_N}{\zeta^N}.$$

Функцію $\psi(\zeta)$ перепишемо у вигляд

$$\psi(\zeta) = \psi_A(\zeta) + \psi_B(\zeta), \quad (5)$$

де

$$\psi_A(\zeta) = -\bar{U}(1/\zeta) - w(\zeta)\varphi'(\zeta) + v_1\zeta, \quad v_1 = 3\alpha_3 \frac{W_1}{c},$$

$$\psi_B(\zeta) = -B(\zeta)U'(\zeta) + \bar{S}(\zeta) + B(\zeta)(S(1/\zeta))' - v_1\zeta. \quad (6)$$

Тут функція $\psi_A(\zeta)$ – загасає на нескінченності. Для знаходження коефіцієнтів S_1, \dots, S_{N_1} розкладемо функцію $\psi_B(\zeta)$ в ряд Лорана. Для цього використаємо співвідношення для добутку двох функцій, заданих відрізками рядів при $M > N$

$$\sum_{n=0}^N a_n \zeta^n \sum_{m=0}^M \frac{r_m}{\zeta^m} = \sum_{n=0}^N \alpha_n \zeta^n + \sum_{m=1}^M \frac{\rho_m}{\zeta^m}. \quad (7)$$

Тут коефіцієнти рядів справа визначаються через коефіцієнти рядів зліва за формулами

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_N \\ a_1 & \dots & a_N & 0 \\ \dots & & & \\ a_N & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \dots \\ r_N \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dots \\ \rho_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{M-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{M-2} \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_M \end{pmatrix}, \quad (8)$$

причому тут у останній матриці $a_k = 0$ при $k > N$.

На основі (7) і (8) маємо

$$B(\zeta)(S(1/\zeta))' = -\sum_{n=0}^N b_n \zeta^n \sum_{m=2}^{N+3} \frac{S_{m-1}}{\zeta^m} = \sum_{n=0}^{N-2} D_n \zeta^n + \sum_{m=1}^{N+3} \frac{E_m}{\zeta^m},$$

де

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_{N-2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_3 & b_4 & \dots & b_N \\ b_4 & \dots & b_N & 0 \\ \dots & & & \\ b_N & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_{N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_{N+3} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_N & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_N & 0 & \\ \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ \dots \\ s_{N+2} \end{pmatrix}$$

Звідси

$$\psi_B(\zeta) = - \sum_{n=1}^{N+2} \beta_n \zeta^n + \sum_{n=1}^{N+2} \frac{\overline{s_n}}{n} \zeta^n + \sum_{n=0}^{N-2} D_n \zeta^n + \sum_{m=1}^{N+3} \frac{E_m}{\zeta^m} - v_1 \zeta,$$

де

$$\sum_{n=0}^{N+2} \beta_n \zeta^n = B(\zeta)U'(\zeta) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 \zeta + 3\alpha_3 \zeta^2) \sum_{n=0}^N b_n \zeta^n.$$

Вимагаючи, щоби коефіцієнти при ступенях $\zeta^k, k \geq 4$ у функції ψ дорівнювали нулю, а перші три дорівнювали δ_k , отримуємо систему рівнянь

$$- \begin{pmatrix} b_3 & b_4 & \dots & b_N \\ b_4 & \dots & b_N & 0 \\ b_5 & \dots & b_N & 0 \\ \dots & & & \\ b_N & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \dots \\ s_{N-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1/(N-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{s_1} \\ \overline{s_2} \\ \overline{s_3} \\ \dots \\ \overline{s_{N-2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_4 \\ \dots \\ \beta_{N-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 + v_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\overline{s_n} / n = \beta_n, \quad n = N-1, \dots, N+2.$$

Після розв'язування системи рівнянь (9), отримуємо

$$\psi(\zeta) = V(\zeta) - \overline{U}(1/\zeta) - w(\zeta)\varphi'(\zeta) + \sum_{m=1}^{N+3} \frac{E_m}{\zeta^m}.$$

Допоміжні співвідношення. Для знаходження коефіцієнтів b_j, W_j у формулі (4) можуть бути використані процедури системи Matlab. Напруження у пластинці визначаються за формулами

$$\sigma_y = \text{Re}(2\Phi + F), \quad \sigma_x = \text{Re}(2\Phi - F), \quad \tau_{xy} = \text{Im} F,$$

$$\text{де } F = z \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi}{dz}, \quad \Phi = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Через допоміжну змінну ζ ці функції запишуться у вигляді

$$\Phi = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad F = \overline{\omega(\zeta)[\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)]/[\omega'(\zeta)]^3} + \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta).$$

Результати розрахунків. Розрахунки виконано стосовно до пластинки з отворами наступних форм: 1, 2) квадрата із стороною a та заокругленими вершинами чвертьколами радіуса $R/a=0,25$ і $R/a=0,5$ (рис.1.а); 3) знайденого в [1] отвору оптимальної форми, біля якого виникає низький рівень напружень (рис.1.б); 4) круг; 5) межа отвору близька до перетину кіл (1.в). Прийmemo, що ці отвори послаблені крайовими тріщинами довжиною L (рис. 1) та пластинка розтягується в напрямку осі Oy зусиллями p . Зазначимо, що для вибраних отворів без тріщин коефіцієнти концентрації напружень (ККН) для отворів 1-4 рівні: 3,38; 2,94; 2,24; 3.

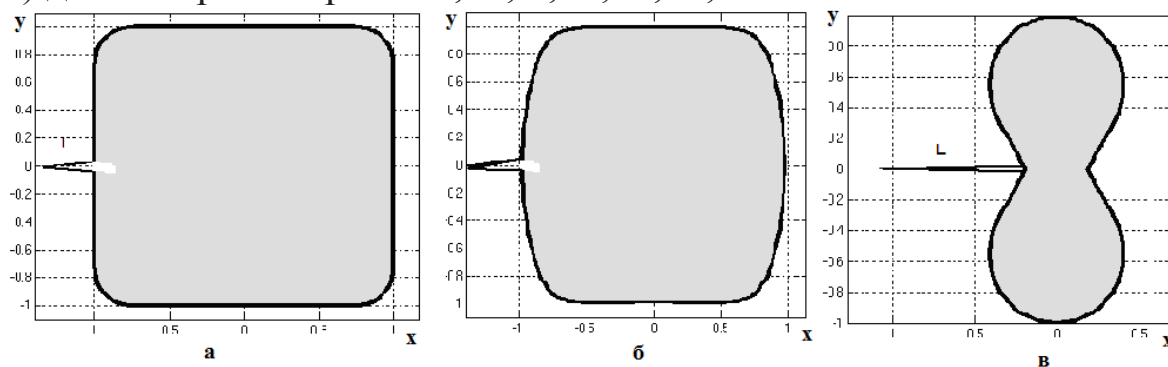


Рис.1. Форми отворів з тріщинами.

Функції, які відображають зовнішність круга одиничного радіуса в площині ζ на зовнішність області, що займає пластинка, наведені в [3]. Розрахунки показали, що при розгляді пластинок із великими тріщинами ряди (1) збігаються повільно. В зв'язку з цим у рядах (1) утримували $\sim 200 - 600$ членів та застосували до цього ряду покращення збіжності ряду, запропонованого в [5].

Розраховані відносні КІН $F_I = K_I / p\sqrt{\pi L}$ для отворів із тріщинами залежно від довжини тріщини зображено на рис.2.а кривими 1-5.

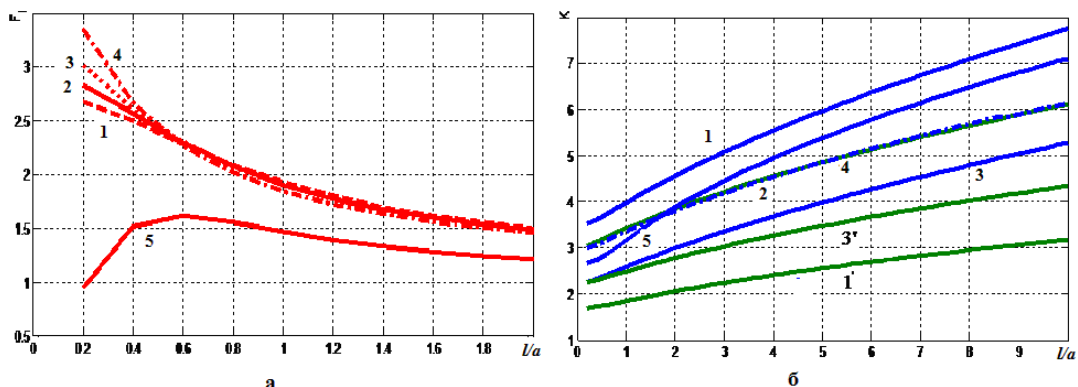


Рис. 2. Значення КІН (а) та ККН (б) для отворів різної форми залежно від відносної довжини тріщини

Знайдені ККН для цих отворів із тріщиною зображено на рис.2.б кривими 1-5. Кривими 1' і 3' зображено значення відносних напружень на отворі в точці на осі Ox , протилежній тріщині для заокругленого квадрата при $R/a=0,25$ та оптимального отвору.

На основі виконаних розрахунків можна зробити висновки: При малих довжинах тріщин найменші КІН на квадратних отворах, за винятком отвору ϵ на рис.1. При відносних відстанях $L/a > 0,4$ КІН для всіх отворів близькі між собою. Руйнування для випадків отворів з номерами 1-3 розпочинатиметься в точках напроти тріщини, які віддалені від осі Ox (оскільки тут досягаються найбільші напруження). Для цих же отворів напруження в точці на межі, що лежить на осі Ox напроти тріщини є меншими за величиною - криві 1 і 1' та 3 і 3' на рис.3. На рис.3 наведено ККН для випадку еліптичного отвору для різних відношень його півосей b/a (піввісь a лежить на продовженні тріщини), які вказані біля відповідних кривих залежно від відношення довжини тріщини до піввісі b .

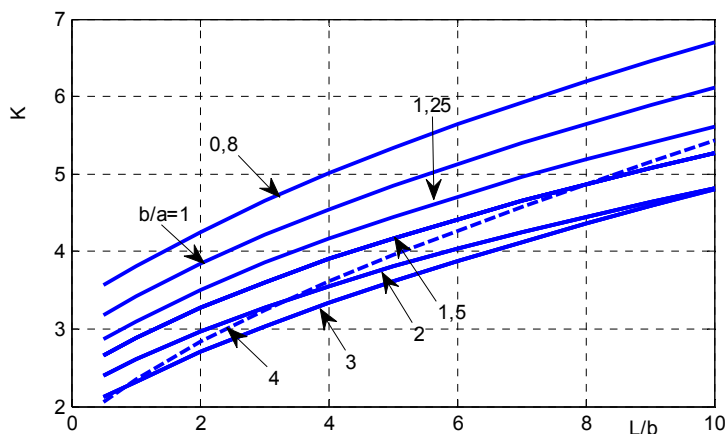


Рис.3. ККН для еліптичного отвору залежно від відносної довжини тріщини

Таким чином, для отворів, близьких за формою до кругового, значення ККН виявились найменшими для оптимального отвору (рис.1.б), причому при збільшенні розмірів тріщини ефективність цього отвору в порівнянні із іншими формами отворів не зменшується. В зв'язку з цим, для загальмовування тріщини доцільно створювати оптимальний отвір (рис.1.б), на якому найменша ймовірність виникнення нових тріщин.

Заслуговують також на увагу отвори еліптичної форми, витягнутих в напрямку перпендикулярному до тріщини. На основі рис.3 можна рекомендувати створювати отвір з відношенням півосей $b/a \approx 2$. Зазначимо, при цьому, що концентрація на такому отворі є близькою до отвору оптимальної форми (рис.1.б). Зазначимо, що заслуговує на особливу увагу отвір, що має форму 1.в, для якого ККН є найменшими.

Висновок. Виконано дослідження напружень біля отвору, що створений біля вершини тріщини з метою гальмування її росту. Розрахунок концентрації напружень на межі отвору та напружень біля вершини тріщини здійснено методом Мусхелішвілі з використанням конформного відображення. На основі проведених досліджень для отворів різної форми запропоновані рекомендації щодо вибору оптимальних отворів з метою гальмування росту тріщин.

1. Божидарнік В. В., Максимович О. В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк, 2003. – 226 с.

2. Божидарнік В.В., Максимович О.В. Визначення напруженого стану біля крайових тріщин у пластинці з отвором складної форми // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. - №1. С.19-26.

3. Иванов В.И. Конформные отображения и их приложения/ Иванов В.И., Попов В.Ю. // М.: Едиториал УРСС. 2002. – 324 с.

4. Каминский А.А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий. –К.: Наук, думка, 1982. –160 с.

5. Максимович В.М., Соляр Т.Я. Спосіб покращення збіжності рядів Фурє та його застосування для числового обернення Лапласа// Прикладні проблеми механіки і математики. – 2015. Вип.7.

6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. –М.: Наука, 1966. –708 с.

7. Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук.думка, 1989. – 248 с.

8. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х томах / Под ред. Ю. Мураками. –М.: Мир, 1990. -т. 1. – 448 с.