УДК 539.3

РОЗРАХУНОК НЕКЛАСИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗГИНУ ОРТОТРОПНИХ ПЛИТ МЕТОДОМ ЛІНІЙНОГО СПРЯЖЕННЯ ПОВІДОМЛЕННЯ 2. ЗГИН ПІВНЕСКІНЧЕННОЇ ПЛАСТИНИ ІЗ ЗАВАНТАЖЕНИМ КРАЄМ

CALCULATION OF NON-CLASSICAL MODELS OF BENDING PLATES ORTHOTROPIC METHOD LINEAR CONJUGATION MESSAGE 2. BENDING OF HALF-INFINITE PLATE WITH LOADED EDGE

Шваб'юк В.І., д.т.н., проф., Ротко С.В., к.т.н., доц., Ужегова О.А., к.т.н., доц., Гуда О.В., к.т.н., доц. (Луцький національний технічний університет, м. Луцьк)

Shvabyuk V.I., doctor of engineerings sciences, professor, Rotko S.V., candidate of technical sciences, associate professor, Uzhegova O.A., candidate of technical sciences, associate professor, Guda O.V., candidate of technical sciences, associate professor (Lutsk National Technical University, Lutsk)

Наведено приклад розрахунку методом лінійного спряження півнескінченної пластини із завантаженим розподіленим згинальним моментом краєм. Отримано замкнуті формули для згинальних моментів і напружень на краю плити. Даються порівняння числових результатів.

The example of calculation method of linear conjugation plate with a loaded distributed bending moment edge. Obtained closed formulas for the bending moments and stresses at the edge of the plate. Ehe comparison of the numerical results are given. On the basis of the equations and relations obtained in the first message of the article, expressions for the stresses, internal forces and moments in orthotropic plate by the loaded moment distributed edge. Analysis of presented numerical results shows that in determining the normal stresses effect of transverse deformations of the updated models of bending plates of average thickness can be significant in comparison with the classical Kirchhoff theory. The results of the calculations for isotropic half -

infinite plate loaded with distributed bending moment edge can differ from

Ключові слова: ортотропна пластина, уточнена модель згину, метод лінійного спряження.

Key words: orthotropic plate, a refined model of the bending, the method of linear conjugation.

Вступ. На основі рівнянь та співвідношень, розроблених у першому повідомленні статті, будуються крайові умови та розв'язки задач для пластини, серединна поверхня якої займає пів-нескінченну область. Для ізотропного випадку такі розв'язки одержані за рівняннями тонких пластинок Кірхгофа в роботах [1-3] та уточненої теорії І.О. Прусова у монографії [1].

Наведено приклад розрахунку півнескінченної пластини, завантаженої на краю розподіленим за законом косинуса згинальним моментом. Отримано вирази для визначення нормальних напружень із урахуванням впливу поперечного зсуву та обтиснення уточненої моделі згину ортотропних плит середньої товщини [4].

Основні рівняння та крайові умови для півнескінченної пластини. Розглядається пружна рівновага півнескінченної пластини, коли на її границі $L\left(y=0\right)$ задані згинальні моменти $m\left(x\right)$, крутні моменти $H\left(x\right)$ і поперечні зусилля $Q\left(x\right)$, віднесені до одиниці довжини, як функції відрізка контуру L. Граничні умови, які виконуються на краю пластини і відповідають першій основній задачі, будуть наступними:

$$M_y = m\left(x\right),\ H_{xy} = H\left(x\right),\ Q_y = Q\left(x\right). \tag{1}$$

Поступаючи, так само, як і в [1-3], поширимо означення функції $\Phi\left(z\right)$ на область, яка не зайнята пластиною (обл. D^+), вважаючи, що для $z \in D^+$ функція $\Phi\left(z\right)$ визначається так:

$$\Phi\left(z\right) = -\bar{\Phi}\left(z\right) - \bar{\Psi}\left(z\right) - z\bar{\Phi}'\left(z\right) + \Psi_0\left(z\right), \tag{2}$$

де $\Psi_0(z)$ – довільна аналітична функція, яка визначена тільки в області D^+.

Замінивши у формулі (2) z на $\overline{z}$ (вважаючи, що $z \in D^-$) і виконавши операцію спряження, знайдемо вираз для комплексного потенціалу $\Psi(z)$:

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - \overline{\Phi(\overline{z})} - z\Phi'(z) + \Psi_0(\overline{z}). \quad (3)$$

Підставивши формулу (3) у вирази [4] :

$$M_y + \alpha^2 M_x = -2D_1(\alpha^2 + \nu_{12})\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \frac{2}{5}(\alpha^2 - 1)\Omega''_{xy}\right];$$

$$M_y - \alpha^2 M_x + 2i\alpha H_{xy} = 4D_{66}\left[\Psi(z) + \overline{z}\Phi'(z) + \right.$$
$$\left. +0.4i\left(\alpha\overline{R}_2 - i(\alpha - 1)^2\Omega''_{xy}\right)\right];$$

$$\alpha^2(1 + r)M_x - (\nu_{21} - r)M_y - i\alpha(1 + \nu_{21})H_{xy} =$$
$$= -D_1(\alpha^2 - \nu_{12})(1 + \nu_{21})\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \Psi(z) \quad + \quad \overline{z}\Phi'(z) + \right.$$
$$\left. +\frac{2}{5}i\left(\alpha\overline{R}_2 + 2i(\alpha - 1)\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}\right)\right]^*; \; R_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Omega;$$

$$Q_x - i\lambda Q_y = -4D_1\Phi'(z) - i\alpha K_x\overline{R}_1,$$

отримаємо систему рівнянь, які можна використати при постановці граничних задач для ортотропної плити:

$$\Phi(z) + \Phi(\overline{z}) + (z - \overline{z})\overline{\Phi'(z)} = -\eta_1 f_1 +$$
$$+0,4i\alpha R_2 + 0,8(\alpha - 1)\Omega''_{xy} - \Psi_0(\overline{z});$$
$$\kappa\Phi(z) + \Phi(\overline{z}) - (z - \overline{z})\overline{\Phi'(z)} = -\eta_2 f_2 +$$
$$\frac{4}{5}\kappa_0^*(\alpha - 1)\Omega''_{xy} - \frac{2}{5}i\alpha\left(R_2 + \alpha^2 k_0^2\Omega\right) + \Psi_0(\overline{z});$$
$$2i\alpha \cdot D_1\left[\Phi(z) - \overline{\Phi(z)}\right] = K_y\Omega - P_y + C_0; \quad (4)$$
$$\Phi(z) - \Phi(\overline{z}) + (z - \overline{z})\overline{\Phi'(z)} = g(x) + 0.8i\alpha(R_1)'_x;$$

$$4\varepsilon\overline{\Phi'(z)} = \frac{4}{5}i\alpha R_1 - \left[\left(\gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + i\alpha\left(\gamma_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right],$$

де $f_1(x) = \lambda^2(1+r)M_x - (\nu_{21} - r)M_y + i\alpha(1+\nu_{21})H_{xy}$;

$f_2(x) = M_y - i\alpha\left(H_{xy} + P_y + C_0\right)$; $\kappa = \left(3\alpha^2 + \nu_{12}\right)\left(\alpha^2 - \nu_{12}\right)^{-1}$;

$g(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_x + i\alpha\gamma_y\right) - \Psi_0(\bar{z})$; $\qquad P_y = \int_{x_0}^{x} Q_y dx$;

$D_{66} = \frac{2}{3}G_{12}h^3$, $\eta_1 = 1/\left(2D_{66}(1+\nu_{21})\right)$, $\eta_2 = 0{,}5D_{66}$;

$\kappa_0^* = \left(\alpha^2 + \nu_{12}\right)\left(\alpha^2 - \nu_{12}\right)^{-1}$; $D_i = \frac{2}{3}\tilde{E}_i h^3$, $(1 \leftrightarrow 2)$ $D_{12} = \nu_{12}D_1$,

$\alpha^2 = \left(2D_{66} + D_{12}\right)/D_1 = \sqrt{D_2/D_1} = K_y/K_x = \lambda^{-2}$;

$r = \left(\alpha^2\nu_{21} - \nu_{12}\right)\left(\alpha^2 + \nu_{12}\right)^{-1}$; C_0 – довільна дійсна стала, яка дорівнює P_y у точці x_0.

Необхідно зауважити, що рівняння (4) по формі співпадають із відповідними рівняннями І.О. Прусова [1] для трансверсально-ізотропного матеріалу і відрізняються тільки коефіцієнтами, що враховують ортотропію плити, а також вплив поперечного обтиснення.

Використовуючи записані рівності, можна отримати різні граничні умови, яким повинні задовольняти функції $\Phi(z)$ і $\Omega(x,y)$. При $|y| \to 0$ та $C_0 = 0$ залежності (4) стануть еквівалентними граничним умовам (1):

$$\kappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x) = -\eta_2 f_2(x) + \frac{4}{5}\kappa_0^*(\alpha - 1)\Omega''_{xy} -$$

$$-\frac{2}{5}i\alpha\left(R_2 + \alpha^2 k_0^2\Omega\right) + \Psi_0^+(x); \qquad (5)$$

$$2iD_1\alpha\left[\Phi^-(x) - \overline{\Phi^-(x)}\right] = -P_y + K_y\Omega,$$

де $\Phi^-(x)$ і $\Phi^+(x)$ – граничні значення $\Phi(z)$ на L із сторони D^- і D^+ відповідно.

Згин півнескінченної пластини крайовим моментним навантаженням. Якщо на краю пластинки діє тільки моментне навантаження $M_y^- = m_0 \cos \tau x$, $\left(H_{xy} = Q_y = 0\right)$, то вирази для функцій Φ і Ω можна подати у спрощеному вигляді [1]:

$$\Phi\left(z\right) = ae^{-i\tau z} \text{ при } z \in D^-,\ \Phi\left(z\right) = вe^{i\tau z} \text{ при } z \in D^+,$$

$$\Omega\left(x, y\right) = ir\left(e^{i\tau x} - e^{-i\tau x}\right) e^{\beta y}, \qquad \left(y < 0\right), \tag{6}$$

де a, $в$, r, τ – довільні дійсні сталі. Функції $f_i\left(x\right)$ і $F_i\left(\tau\right)$ при такому навантаженні можна записати таким чином:

$$2f_2\left(x\right) = m_0\left(e^{i\tau x} + e^{-i\tau x}\right);\ 2F_0\left(\tau\right) = m_0,\ \ f_1\left(x\right) = F_1\left(\tau\right) = 0.$$

Розв'язки системи (5) за таких умов мають вигляд:

$$\beta = \sqrt{\tau^2\left(1 + k_1^2\right) + k_0^2};\ k_1^2 = \left(1 - \alpha^2\right)D_1 / D_{66},,$$

$$a\left(\tau\right) = -\frac{\eta_2 \cdot m_0}{4\varepsilon\tau\left(\beta - \tau\right) - 2\kappa};\ в\left(\tau\right) = \frac{2\varepsilon\eta_2 m_0 \tau\left(\tau + \beta\right)}{4\varepsilon\tau\left(\beta - \tau\right) - 2\kappa};$$

$$r\left(\tau\right) = -\frac{2,5\varepsilon\eta_1 m_0}{4\varepsilon\tau\left(\beta - \tau\right) - 2\kappa}.$$

Використавши формул системи (4), знаходимо вираз для згинального моменту M_x:

$$M_x = -m_0\left[1 - \frac{2\left(1 + \nu\right)\left(\tau + \beta\right)}{\left(3 + \nu\right)\left(\tau + \beta\right) - 4\tau}\right]\cos \tau x. \tag{7}$$

Цей вираз за формою співпадає із відомим виразом І.О. Прусова [1] у частковому випадку трансверсально-ізотропного матеріалу. Але значеннями вони будуть відрізнятись при певних величинах β і G_{13} / G_{12}. Причина в тому, що згідно теорії І.О. Прусова величина $k_0^2 = 3h^{-2}G_{13} / G_{12}$, а параметр $\beta = \sqrt{\tau^2 + k_0^2}$. У даній теорії $k_0^2 = 2,5h^{-2}G_{13} / G_{12}$, а величина β є ще функцією від α^2. Тому, якщо в формулі (7) покласти

$\tau = \pi / \lambda_0 \equiv h^{-1}$, $\beta = \sqrt{3,5}\tau$, то для ізотропного матеріалу будемо мати:

$$M_x = -m_0 \left[1 - \frac{2(1+\nu)\left(1+\sqrt{3,5}\right)}{(3+\nu)\left(1+\sqrt{3,5}\right)-4} \right] \cos x / h. \qquad (8)$$

Тоді, як за теорією І.О. Прусова [1] $\beta = 2\tau$, тому

$$M_x = -m_0 \left[1 - \frac{6(1+\nu)}{3(3+\nu)-4} \right] \cos x / h\,. \qquad (9)$$

Згідно з розв’язком класичної теорії тонких пластинок [1] ($\tau / k_0 \to 0$) отримаємо:

$$M_x = -\frac{(1-\nu)}{(3+\nu)} m_0 \cos x / h. \qquad (10)$$

Якщо в одержаних формулах для M_x вибрати значення коефіцієнта Пуассона $\nu = 1/3$, то відповідні значення згинальних моментів будуть такими: за розробленою теорією — $M_x = 0,37 m_0 \cos x / h;$ за теорією І.О. Прусова — $M_x = 0,33 m_0 \cos x / h;$ за класичною теорією Кірхгофа — $M_x = -0,2 m_0 \cos x / h$. Тобто, у даному випадку результати класичної теорії не співпадають із відповідними результатами уточнених теорій навіть за знаком.

Ще більшою буде різниця між результатами при визначенні напружень σ_x. Згідно з формулами [4] напруження σ_x для трансверсально–ізотропного матеріалу можна представити у вигляді:

$$\sigma_x = \frac{3M_x}{2h^3} \cdot \gamma + \frac{0,3}{(1-\nu)} \cdot \frac{G}{G'} \cdot \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \cdot \frac{\gamma}{h} \left(1 - \frac{5}{3} \cdot \frac{\gamma^2}{h^2} \right). \qquad (11)$$

Поклавши $\gamma = \pm h$, будемо мати:

$$\sigma_x = \pm \frac{3M_x}{2h^2} \mp \frac{G/G'}{5(1-\nu)} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right). \tag{12}$$

У формулі (12) перший член відповідає теорії І.О. Прусова, а також теорії тонких пластинок Кірхгофа. Другий член є уточненням теорії [4] формули для нормального напруження σ_x за рахунок нелінійності (відносно товщинної координати γ) тангенціальних переміщень. Вираз у дужках формули (12) записується через функції $\Phi(z)$ і $\Omega(x, y)$ таким чином:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -2(1-\nu) D\left[\Phi''(z) + \overline{\Phi''(z)}\right] - (1-\nu) \cdot K'\Omega''_{xy}. \tag{13}$$

З урахуванням представлень (6) одержимо:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -\frac{m_0 \tau^2 \left(e^{-i\tau z} + e^{i\tau \bar{z}}\right)}{\kappa - 1.6D \cdot \tau(\beta - \tau)/K'} + \\ + \frac{m_0 \tau \cdot \beta \cdot \left(e^{i\tau x} + e^{-i\tau x}\right) \cdot e^{\beta y}}{\kappa - 1.6D \cdot \tau(\beta - \tau)/K'}. \tag{14}$$

Граничні значення виразу (13) на краю $L(y = 0)$ пластини будуть такими:

$$\frac{\partial Q_x^-}{\partial x} + \nu \frac{\partial Q_y^-}{\partial y} = \frac{2m_0 \tau k_0^2 (1-\nu)}{(3+\nu)(\tau+\beta) - 4\tau} \cos \tau x. \tag{15}$$

Підставивши формулу (15) в (12), отримаємо:

$$\sigma_x = \mp \frac{3m_0}{2h^2} \left[1 - \frac{2(1+\nu)(\tau+\beta) - 2\tau/3}{(3+\nu)(\tau+\beta) - 4\tau} \right] \cos \tau x. \tag{16}$$

Аналіз формули (16) показує, що для отримання розв'язку класичної теорії тонких пластинок досить спрямувати параметр $\tau/k_0 \to 0$. У результаті будемо мати:

$$\sigma_x = \mp \frac{3(1-\nu) m_0}{2(3+\nu) h^2} \cos \tau x. \tag{17}$$

Кінцеве числове значення напруження σ_x за формулою (16) для випадку ізотропної пластини ($\nu = 1/3$) можна записати у вигляді:

$$\sigma_x = \pm 0,25 \frac{3}{2} \frac{m_0}{h^2} \cos x / h \,. \qquad (18)$$

Отже, із формули (18) видно, що напруження σ_x на поверхнях пластини $\gamma = \pm h$, так само як і згинальні моменти, не співпадають за знаком із відповідними значеннями, отриманими за рівняннями [1] для тонких ізотропних пластинок Кірхгофа. Тобто, формула (17) для таких задач є неточною.

Висновки. На основі рівнянь та співвідношень, одержаних у першому повідомленні статті, знайдено вирази для напружень, внутрішніх сил і моментів у півнескінченній ортотропній пластині, яка завантажена по краю розподіленим моментом. Аналіз числових результатів показує, що при визначенні нормальних напружень σ_x вплив поперечних деформацій уточнених моделей згину плит середньої товщини [1,4] може бути значним порівняно з класичною теорією Кірхгофа [1,2]. Результати розрахунків для ізотропної півнескінченної пластини із завантаженим розподіленим згинальним моментом краєм можуть різнитися між собою навіть знаками.

1. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит / И.А. Прусов. – Минск: Издательство Беларусского государственного университета, 1975. – 256 с.

2. Прусов И.А. Изгиб полубесконечной плиты, частично защемленной, частично шарнирно опертой / И.А. Прусов, В.И. Швабюк //Сопротивление материалов и теория сооружений. К.: Будівельник. 1970. В.12.– С.69-75.

3. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наукова думка, 1968. – 887 с.

4. Шваб′юк В.І. Комплексне подання уточнених рівнянь згину ортотропних пластин з тріщинами / В.І. Шваб'юк // Машинознавство. – 1999.– №4.– С. 51–55.