УДК 539.3

ДО ПРОБЛЕМИ РОЗРОБКИ НОВИХ НЕКЛАСИЧНИХ ТЕОРІЙ ЗГИНУ ОБОЛОНОК, ПЛАСТИН І БАЛОК (огляд)

Повідомлення 1. Проблеми та принципи побудови класичної та уточнених деформаційних теорій першого рівня для ізотропних пластин і стрижнів

TO THE PROBLEM OF DEVELOPING NEW NON-KLASSICAL THEORIES OF BENDING OF SHELS, PLATES AND BEAMS (review)

Message 1. Problems and principles of classical and refined theories of deformation of the first level for isotropic plates and rods

Ротко С. В., к.т.н., доц., Шваб'юк В.І., д.т.н., проф., Ротко В.О., магістр, Матіящук А.В., магістр (Луцький національний технічний університет, м. Луцьк)

Rotko S.V., Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Shvabyuk V.I., Doctor of Engineering, Professor, Rotko V.O., master, Matiyashchuk A.V., master (Lutsk National Technical University, Lutsk)

Аналізуються переваги та недоліки більшості існуючих теорій згину, починаючи від класичної теорії згину тонких пластин та оболонок Кірхгофа – Лява і закінчуючи існуючими теоріями товстих плит і оболонок великої кривини.

The report analyses the advantages and disadvantages of most existing theories of bending of plates and shells, starting from the classical theory of bending of thin plates and shells Kirchhoff – love and ending the existing theories of thick plates and shells the greater curvature, which results in the degree of accuracy do not differ from the results obtained on the basis of the three-dimensional equations of elasticity theory. Also analyses the effect on the stress-strain state of the aforementioned structural elements of the characteristics of the anisotropy of the material from which they are made.

Ключові слова: некласичні теорії згину, граничні умови, переміщення, деформації поперечного зсуву та обтиснення.

Keywords: non-classical theory of bending, boundary conditions, displacement, deformation, transverse shear and compression.

Вступ. Інженерна практика потребує значного підвищення надійності та міцності інженерних споруд і машин для їх безпечної та економічної експлуатації на виробництві й транспорті. Пластини, оболонки та стрижні є найпоширенішими елементами інженерних конструкцій машинобудівного, приладобудівного, будівельного і транспортного спрямування. Дуже часто вони зазнають впливу небезпечних локалізованих, високоградієнтних навантажень, зокрема й контактної природи. У багатьох випадках використаний для їх виготовлення матеріал є анізотропним. Названі особливості вимагають використання досконаліших фізичних і математичних моделей, здійснення щораз точніших розрахунків із реалістичним урахуванням складних фізичних і механічних властивостей матеріалів, особливостей структури проектованих елементів конструкцій.

1. Принципи побудови класичної теорії тонких пластин

Для визначення напружено-деформованого стану (НДС) у тонкостінних стрижневих, пластинчастих чи оболончастих елементах конструкцій використовують або розрахункові рівняння тривимірної теорії пружності, або рівняння існуючих класичної чи уточнених теорій.

Гіпотези для класичної теорії тонких пластин уперше були запропоновані німецьким механіком і фізиком Г. Кірхгофом [1] (1850 р.):

1. Прямолінійний елемент, що перпендикулярний до серединної поверхні пластини (рис. 1), після деформації може тільки повертатися, залишаючись прямолінійним і перпендикулярним до неї (рис. 2). Довжина цього елемента залишається сталою ($\varepsilon_z = 0$).

2. Окремі шари пластини не тиснуть один на одного, тобто у всіх точках пластини нормальні напруження σ_z вважаються рівними нулю ($\sigma_z \approx 0$).

3. Розтягувальні або стискувальні деформації серединної поверхні *xOy* відсутні. Всі її точки одержують тільки вертикальні переміщення $(w = w(x, y))$.

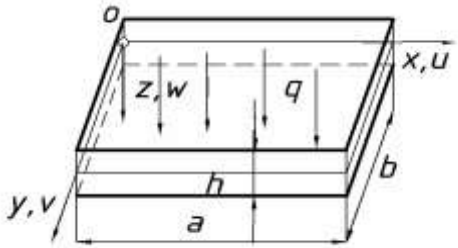

Рис. 1. Схема пластини

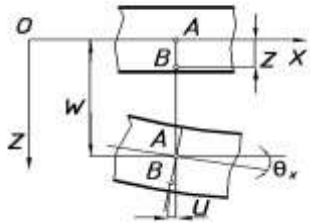

Рис. 2. Деформація елемента пластини

Виходячи з гіпотез Кірхгофа, тангенціальні переміщення u і v довільної точки *B* (рис. 2*)*, що знаходяться на відстані z від серединної поверхні, можна виразити через вертикальне переміщення *w* за допомогою формул:

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x} z; \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y} z; \quad w = w(x, y) \tag{1}$$

Усі силові та деформаційні характеристики цієї теорії визначаються через переміщення $w(x, y)$, яке знаходиться із диференціального рівняння С. Жермен - Лагранжа

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \tag{2}$$

Інтегрування диференціального рівняння (2) веде до появи у його розв'язку двох невідомих сталих. Їх знаходять шляхом задовільнення цього розв'язку двом граничним умовам на краю пластини. Наприклад, для випадку жорсткого закріплення краю $y = 0$ пластинки граничні умови будуть такими

$$w = 0, \ \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Ще одним із найпоширеніших випадків граничних умов є умови для вільного краю пластинки. Нехай край $y = b$ пластинки є вільним від навантаження. Тоді на цьому краю повинні були б використовуватися три умови, які були сформовані ще С. Пуассоном:

$$M_y = 0, \ Q_y = 0, \ M_{xy} = 0. \tag{4}$$

Тобто, у цьому випадку одна з умов стає зайвою. Тому для вільного краю Г. Кірхгоф запропонував другу і третю умови замінити однією для *фіктивної* поперечної сили $Q_y^{\phi} = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$, що веде до певних фізичних невідповідностей у кутах пластини, де з'являються зосереджені реакції. Тому, для усунення цих та деяких інших невідповідностей, необхідно застосовувати нові, *некласичні теорії,* за допомогою яких можна було б одержати розв'язки, котрі неможливо отримати на основі рівнянь *класичної* теорії пластин.

2. Проблеми побудови уточнених деформаційних теорій першого рівня типу С. Тимошенка для ізотропних пластин

Можливо, вперше найбільш систематизовані дослідження у цьому напрямку були розпочаті С.П.Тимошенком у його другій частині книги "Курс теории упругости", виданої 1916 року. Тому всі подальші варіанти теорій балок, пластин та оболонок прийнято називати уточненими *теоріями типу С.Тимошенка* [2].

Спроба системного уточнення теорії оболонок і пластин була зроблена М.О. Кільчевським [3] на початку сорокових років, який використав підхід Коші та Пуассона про можливість розвинення функцій деформацій у степеневі ряди за поперечною координатою із подальшим використанням функціональних співвідношень теореми про взаємність робіт. Одержані результати можуть бути використані для розрахунку товстих плит та оболонок великої кривини.

Закінчений варіант прикладної теорії пластин, що враховував поперечні зсуви та поперечні нормальні напруження, був запропонований Е. Рейсснером [4] у 1944 році. Він запропонував, як вихідні, гіпотези *про лінійний закон зміни напружень* $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ за товщиною пластини та отримав із рівнянь рівноваги *квадратичний закон зміни дотичних напружень* τ_{xz}, τ_{yz} і *кубічний закон для напружень* σ_z. Співвідношення узагальненого закону Гука та граничні умови були виведені ним із варіаційного принципу Кастиліано. Таким чином, друга гіпотеза Кірхгофа була відкинута Е. Рейсснером ($\sigma_z \neq 0$), а першу та третю гіпотези Кірхгофа було

трансформовано до вигляду, еквівалентного усім теоріям *типу С.Тимошенка*:

1. Прямолінійний елемент, що перпендикулярний до серединної поверхні пластини, після деформації може тільки повертатися, залишаючись прямолінійним. Довжина цього елемента залишається сталою ($\varepsilon_z = 0$).

2. Розтягувальні або стискувальні деформації серединної поверхні *xOy* відсутні. Всі її точки одержують тільки вертикальні переміщення $w(x, y)$.

Необхідно також зауважити, що друга гіпотеза Кірхгофа у *теоріях типу С.Тимошенка* залишається чинною $(\sigma_z = 0)$.

У результаті таких допущень і в теоріях типу Тимошенка, і в теорії Е. Рейсснера вирази для переміщень трансформуються до вигляду:

$$u = z\gamma_x; \quad v = z\gamma_y; \quad w = w(x, y), \tag{5}$$

де у теорії Е. Рейсснера шукані вертикальні переміщення $w(x, y)$ розглядаються як деякі усереднені величини —

$w = \dfrac{3}{2h}\int_{-h/2}^{h/2} w_0\left(1-(\dfrac{2z}{h})^2\right)dz$, так само, як і невідомі узагальнені кути повороту нормальних перерізів пластини у площинах xz і yz:

$\gamma_x = \dfrac{12}{h^2}\int_{-h/2}^{h/2}\dfrac{uz}{h}dz,\ \gamma_y = \dfrac{12}{h^2}\int_{-h/2}^{h/2}\dfrac{vz}{h}dz$; $w_0(x, y)$ – вертикальне переміщення серединної поверхні пластини.

Систему розрахункових рівнянь для визначення невідомих γ_x, γ_y і w, як за теоріями типу Тимошенка**,** так і за теорією Е. Рейсснера, можна записати у вигляді:

$$\Delta\gamma_x + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_y}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_x}{\partial y}\right) = \frac{k'Gh}{D}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_x\right)$$

$$\Delta\gamma_y + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_x}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_y}{\partial x}\right) = \frac{k'Gh}{D}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_y\right); \tag{6}$$

$$\frac{\partial\gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_y}{\partial y} + \Delta w = -\frac{q}{k'Gh}.$$

Тут $k' = 5/6$ – коефіцієнт зсуву, який залежить від прийнятого закону розподілу дотичних напружень τ_{xz}, τ_{yz} і використовується у некласичних теоріях згину типу Тимошенка. В теорії Е. Рейсснера та низці деяких інших некласичних теорій приймається, що ці дотичні напруження змінюються за законом квадратної параболи, а замість величини k' використовується число $5/6$.

Одержана система диференціальних рівнянь має сумарний шостий порядок і є значно складнішою (у порівнянні з теорією Кірхгофа) для інтегрування. Тому, здійснивши розклад кутів повороту перерізів γ_x, γ_y через деяку потенціальну функцію $\phi(x,y) = w + \dfrac{D}{k' G_я h}(\Delta w)$ та нову вихрову функцію ψ , у вигляді:

$$\gamma_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\ , \quad \gamma_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\ , \tag{7}$$

Е. Рейснером було отримано нову систему рівнянь шостого порядку із невідомими w та ψ :

$$D\Delta\Delta w = q - \varepsilon_R \Delta q\,; \tag{8}$$

$$\Delta\psi - \frac{10}{h^2}\psi = 0\,. \tag{9}$$

Тут $\varepsilon_R = \dfrac{(2-\nu)}{(1-\nu)}\dfrac{h^2}{10}$ — параметр, що в теорії Е. Рейсснера враховує вплив деформації поперечного зсуву та поперечного напруження σ_z, $\varepsilon_R = \varepsilon_T = \dfrac{0,2h^2}{(1-\nu)}$ — в інших теоріях типу Тимошенка, де не враховуються ні напруження σ_z, ні поперечне обтиснення; ψ — вихрова складова деформації поперечного зсуву, що має властивості функції пограничного шару та описує крайовий ефект Рейсснера.

Одержана система рівнянь відрізняється від розрахункового рівняння класичної теорії тонких пластин (із сумарним четвертим порядком) вищим, шостим, сумарним порядком диференціальних рівнянь і наявністю параметра ε_R, який є результатом врахування деформації поперечного зсуву. Для класичної теорії цей параметр

дорівнює нулю, бо вважається, що поперечна жорсткість тонкої пластини є нескінченно великою $(G_z \to \infty)$. Наявність додаткового рівняння Гельмгольца (9) для *некласичної* теорії дозволяє задовольнити трьом граничним умовам на краю пластини, замість двох – для класичної теорії. Зокрема, для вільного краю пластини умови (4) задовольняються повністю (без введення уявної, фіктивної поперечної сили). Крім відомих класичних умов, *некласичні* теорії допускають більшу варіативність граничних умов на краях пластинок, ніж це допускає теорія тонких пластинок Кірхгофа. Одночасно, граничні умови, які можна сформувати за допомогою рівнянь *некласичні* теорії тонких пластинок, не можна вважати точними порівняно з граничними умовами для товстих плит у постановці просторової задачі теорії пружності. Теорія типу Тимошенка була застосована також для визначення частот і форм поперечних коливань пластин і стрижнів.

Пізніше (у 1957 р.), П. Нагді [5] поширив теорію Е. Рейсснера на розрахунок оболонок, де нормальні переміщення w задавалися вже квадратною параболою

$$w = w(x, y) + zw'(x, y) + 0,5z^2 w''(x, y). \qquad (10)$$

Тут $w'(x, y)$ і $w''(x, y)$ — невідомі функції, що знаходяться із рівнянь змішаного варіаційного принципу Геллінґера-Пранґе-Рейсснера.

Разом з тим, великим недоліком цих теорій є існування першої гіпотези про лінійність (стосовно поперечної координати) переміщень і напружень, паралельних до серединної поверхні пластини, що вносить істотні похибки, якщо її матеріал має низьку поперечну (зсувну) жорсткість. Теорія Е.Рейсснера для випадку ортотропних пластин була узагальнена К. Гіркманом і Р. Біром [6]. Дещо пізніше (у 1975 р.) Е. Рейсснер [7] запропонував також модифікацію своєї теорії для трансверсально-ізотропних та ортотропних пластин, де тангенціальні компоненти вектора переміщень є нелінійними функціями від координати z та частково врахував поперечне обтиснення у вигляді (10). Ще ширше названі фактори були враховані у роботах авторів [8,9].

Вихід у світ обширних монографій та оглядів С.А. Амбарцумяна [10], Я.М. Григоренка та А.Т. Василенка [11], Гольденвейзера А.Л. [12], Б.Л. Пелеха [13] та інших [14], завершив формування уточнених технічних моделей тонких пластин і

оболонок першого наближення для матеріалів, що слабо опираються поперечному зсувові.

1. Kirchoff G.R. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. J. für die reine und angew. Mathematik (*Crelle*), 1850. Bd. 40, № 1, SS. 51-88.
2. Кільчевський М.О. Основні рівняння рівноваги пружних оболонок і деякі методи їх інтегрування // Зб. праць ін-ту математики АН УРСР. 1940. №№ 4,5,6.
3. Timoshenko S.P. On the correction for sher of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Phil. Magasine and J. Sciense, 1921, v.41, ser.6, №245, p.744-746.
4. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates // J. Math. and Phys., 1944, v.33, p.184-191.
5. Naghdi P.M. On the theory of thin Elastic Shells // Quart. of Appl. Mathematics. 1957, v.14, №4, p. 369-380.
6. Girkmann K., Beer R. Anwendungder verschaften Plattentheorie nach Eric Reissner auf orthotrope Platten, Öster. Ing. Arch., 1958, V. 101-110.
7. Reissner E. On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformacion, // Int. J. Solids. Structures, 1975, v.11, p. 569-573.
8. Швабюк В.И. Об одном варианте обобщенной теории трансверсально изотропных плит // Прикл. механика, 1974. Т.10. №11. – С.87-92.
9. Шваб'юк В.І. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини / В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко // Монографія. – Луцьк: РВВ Луцького НТУ, 2015. – 264 с.
10. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
11. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наукова думка, 1987. – 216 с.
12. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко-Райсснера // Механика твердого тела. – М., 1990. № 6. – С.124-138.
13. Пелех Б.Л. Теория оболочек с низкой сдвиговой жесткостью. – К.: Наук. думка, 1973. – 246 с.
14. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 416 с.