

УДК 539.3

**ДО ПРОБЛЕМИ РОЗРОБКИ НОВИХ НЕКЛАСИЧНИХ
ТЕОРІЙ ЗГИНУ ОБОЛОНОК, ПЛАСТИН ТА БАЛОК (огляд)**

**Повідомлення 2. Проблема побудови уточнених деформаційних
теорій вищого рівня для оболонок, пластин та балок**

**TO THE PROBLEM OF DEVELOPING NEW NON-
KLASSICAL THEORIES OF BENDING OF SHELS, PLATES
AND BEAMS (review)**

**Message 2. The problem of constructing refined deformation
theories for shells, plates and beams**

**Шваб'юк В.І., д.т.н., проф., Ротко С. В., к.т.н., доц., Маткова А.В.,
к.т.н., доц., Шваб'юк В.В., к.т.н., доц. (Луцький національний
технічний університет, м. Луцьк)**

**Shvabyuk V.I., Doctor of Engineering, Professor, Rotko S.V., Ph.D. in
Engineering, Associate Professor, Matkova A.V., Ph.D. in Engineering,
Associate Professor, Shvabyuk V.V., Ph.D. in Engineering, Associate
Professor, (Lutsk National Technical University, Lutsk)**

Наводяться аналіз та принципи побудови уточнених деформаційних теорій вищого рівня для оболонок, пластин і балок, де основні напруження і відповідні їм переміщення уже змінюються за нелінійним законом. Дається також аналіз теорій, що додатково до деформацій поперечного зсуву враховують ще й деформації поперечного обтиснення.

In the message 1 discussed the principles of creating classic and refined deformation theories first level theories such as Timoshenko and E. Reissner for thin plates and rods. The analysis of these theories shows that most of them in various ways take into account only one of the main clarifying factors – averaged transverse shear deformation.

This report deals with the analysis and the principles of refined deformation theories for shells, plates and beams, where the main voltage and the corresponding displacement already change according to a nonlinear law. Also analyses the theories that in addition to transverse shear deformations into account also the deformation of the transverse compression.

Вступ. У повідомленні I розглядалися принципи побудови класичної та уточнених деформаційних теорій першого рівня — теорій типу С.Тимошенка та Е.Рейснера для тонких пластин і стрижнів. Аналіз згаданих теорій свідчить, що більшість із них різними способами враховують лише один із основних уточнювальних факторів – *усереднену деформацію поперечного зсуву*. Таке уточнення є достатнім для малоградієнтних навантажень, що деформують досить тонкі пластини та оболонки. Але у випадках, коли конструкційні елементи не є дуже тонкими (наприклад, товсті плити чи короткі балки) і/або перебувають під дією локальних навантажень чи контактних впливів, згадані некласичні теорії все ж допускають значні похибки не лише кількісного, але й якісного характеру. У цих випадках і основні напруження, і відповідні переміщення, як показано С.Г. Амбарцумяном [1], Б.Ф.Власовим [2], А.Л. Гольденвейзером [3], а також М.П. Шереметьєвим і Б.Л. Пелехом [4], уже змінюються за нелінійним законом. Крім цього фактору, ще не менш важливим чинником, який повинен враховуватися для адекватного опису контактної взаємодії, є *поперечне обтиснення* [5]. Як показано у роботі [6], моделі, що його не враховують, спроможні лише на інтегральний опис явища контакту та не можуть претендувати на достатньо точне відтворення розподілу напружень і переміщень у зоні контакту тіл з оболонками, пластинами та балками.

Ще одним напрямком розрахунку пластин, що вимагає застосування *некласичних теорій вищого рівня*, є розрахунок пластин із композитних матеріалів, армованих волокнами вуглецю, скла, графіту та іншими матеріалами, які мають високу питому міцність і жорсткість у поздовжньому напрямку, але низьку — у поперечному. Такі теорії було розвинено у працях і монографіях Б.Л.Пелеха [7], О.К.Малмейстера, В.П.Тамужа та Г.О.Тетерса [8], а також Ю.М. Тарнопольського і А.В.Розе [9] та інших.

1. Уточнені теорії вищого порядку, що враховують нелінійність переміщень і напружень

Уточнені теорії вищого порядку, що враховують нелінійність переміщень і напружень (без урахування поперечного обтиснення), майже одночасно були розроблені С.А. Амбарцумяном (1958р.) [1], Б.Ф.Власовим (1957р.) [2], А.Л. Гольденвейзером (1958 р.) [3], М.П. Шереметьєвим і Б.Л. Пелехом (1964р.) [4], І.А. Прусовим (1968р.) [10], Л.Г. Доннелом [11] та ін. А.Л. Гольденвейзер

розширив теорію Е.Рейсснера, ввівши у вирази для переміщень і напружень нелінійні доданки, а також проаналізував межі застосування класичних теорій оболонок і пластин та характер похибок, які вони можуть допускати. Названі автори також використали метод гіпотез, згідно з яким переміщення пластини записувались у вигляді:

$$u = u_0(x, y) + z\gamma_x + z^3\phi_x; \quad v = v_0(x, y) + z\gamma_y + z^3\phi_y; \quad w = w_0(x, y). \quad (1)$$

У цих рівняннях функції ϕ_x і ϕ_y визначаються певним чином через поперечні сили Q_x і Q_y , або відповідні дотичні напруження на рівні серединної поверхні пластини. Якщо у залежностях (1) здійснити заміни у вигляді:

$$\phi_x = -\frac{2Q_x}{Gh^3}, \quad \gamma_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3Q_x}{2Gh}, \quad (x \leftrightarrow y),$$

то дана система може бути записана у формі, з якої добре видно як природу уточнення, так і різницю між класичною та уточненими теоріями тонких пластин:

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3z}{2} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{Q_x}{Gh}; \\ v &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{3z}{2} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{Q_y}{Gh}; \\ w &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Із аналізу формул (2) видно, що в нелінійних доданках тангенціальних переміщень основну роль відіграє множник Q_i / Gh , куди входить поперечна сила (чисельник) та зсувна жорсткість (знаменник). Тому для композитних матеріалів із низькою зсувною жорсткістю цей множник може бути досить значним як для переміщень, так і для напружень.

Широкий спектр варіантів некласичних моделей оболонок і пластин на базі методу гіпотез розроблений також у монографіях і статтях В.В. Васильєвим [12], В.І. Гуляєвим, В.А. Баженовим і П.П. Лізуновим, [13], Л.П. Хорошуном та ін. [14], О.О. Рассказовим, І.І. Соколовською та М.О. Шульгою [15], С. Акавчі та А. Танрікулу [16] та ін. Ці дослідження стосуються різних проблем як для

анізотропних чи композитних матеріалів, так і для матеріалів із фізичною та геометричною нелінійністю. При цьому, в останній роботі [16], де дається аналіз втрати стійкості та коливань шаруватих композитних пластин, С. Акавчі та А.Танрікулу запропонували третій доданок переміщень (2) представляти гіперболічними функціями від z . Разом із тим, кожен із цих моделей можна ідентифікувати із тою чи іншою неklasичною теорією.

Огляд цих моделей досить ґрунтовно розглянуто також у великих оглядових роботах К.З. Галімова [17], Е.І. Григолоука та І.Т. Селезова [18], Я.М. Григоренка, А.Т. Василенка та Г.П. Голуб [19], В.Г. Піскунова і О.О. Рассказова [20] та ін.

2. Уточнені теорії вищого порядку, що враховують поперечне обтиснення

Теорії, що додатково до деформацій поперечного зсуву враховують ще й деформації поперечного обтиснення, є теоріями вищих порядків (порівняно з теоріями типу С. Тимошенка та С.Г. Амбарцумяна). Ними можна вважати теорії плит середньої товщини Х.М. Муштарі (1959р.) [21] та О.Ф. Рябова (1971р.), [22]. У 1970р. С.А. Амбарцумян [23] також доповнив свою теорію членами, що враховують ефект поперечного обтиснення. Згадані теорії, виходячи із різних початкових засад, зводяться практично до одних і тих самих розрахункових рівнянь, які враховують деформації поперечного зсуву та обтиснення (за рахунок ефекту Пуассона, як перше наближення), а також поперечне нормальне напруження σ_z . Крім задачі згину, ці теорії розглядають ще й напружено-деформований стан серединної поверхні пластини. Основним недоліком згаданих теорій є те, що вони не враховують краєвих ефектів, які описуються одним або кількома рівняннями Гельмгольца. Формули для переміщень за цими теоріями (враховуючи зауваження до третьої теорії) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
 u &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3z}{2} \left[1 - \frac{4\beta}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{Q_x}{Gh}; \\
 v &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{3z}{2} \left[1 - \frac{4\beta}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{Q_y}{Gh}; \\
 w &= w_0(x, y) + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{z^2}{2} \Delta w_0.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Тут $\beta = 1 - 0,5\nu$ – параметр, що враховує ефект поперечного обтиснення; ν – коефіцієнт Пуассона.

Правильність запропонованих гіпотез підтверджується абсолютним співпадінням виразів (3) для переміщень із відповідними виразами, одержаними А.Лявом (1935р.), [24, с.503] та А.І. Лур'є (1955р.), [25, с. 205] символічним методом однорідних розв'язків для товстих плит як перше наближення. Аналогічні результати для трансверсально-ізотропної товстої плити одержані С.Г. Лехніцьким (1958р.), [26] уже згаданим методом однорідних розв'язків. У нього переміщення u, v також мають вигляд (3), але з іншим значенням параметра $\beta = 1 - 0,5\nu''G' / G$, а вираз для переміщення w записується у вигляді

$$w = w_0(x, y) + \frac{\nu''}{1-\nu''} \frac{z^2}{2} \Delta w_0,
 \tag{4}$$

де G', ν'' – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу плити у поперечному напрямку. Для випадку ізотропного матеріалу рівняння (4) і (3) співпадають.

Недоліком наближення (4) є те, що у вирази для переміщень, одночасно із доданками, що враховують деформації поперечного зсуву, входять тільки добавки від поперечного обтиснення, що пов'язані з ефектом Пуассона і зовсім відсутні добавки, куди б входило зовнішнє навантаження. Останнє унеможливорює застосування одержаних формул в інженерних розрахунках для випадків контактної взаємодії чи дії високоградієнтних навантажень.

Більш системне врахування деформації поперечного обтиснення (разом із врахуванням ефекту нелінійності тангенціальних переміщень і деформації поперечного зсуву) стало наступним етапом уточнення теорій пластин середньої товщини

методом гіпотез. До таких робіт належать праці автора [5], [6] (1974, 1980 рр.), К. Ло, Р. Крістенсена та Е.Бу [27], (1977р.), Л.Г. Доннела [11], О.О. Рассказова та М.О. Шульги [28], (1977р.), В. Г. Піскунова [29], (1979р.), В.А. Родіонової [30] (1982р.) та деякі інші, що використовують метод гіпотез.

Так, у роботі [5] компоненти вектора переміщень довільної точки пластини, за аналогією М.О. Кільчевського [31], розгорнені автором у вигляді притятих рядів за поперечною координатою z :

$$u_i = \sum_{k=0}^3 u_{ik}(x, y) z^k, \quad (i=1, 2); \quad w = \sum_{k=0}^4 w_k(x, y) \cdot z^k, \quad (5)$$

де 13 невідомих функцій $u_{ik}(x, y)$, $w_k(x, y)$ шукаються із одержаної (з варіаційного принципу Лагранжа для повної енергії пружного середовища) системи диференціальних рівнянь дванадцятого порядку задовільненням рівнянь узагальненого закону Гука та граничних умов для нормальних і дотичних напружень на лицевих поверхнях пластини.

Запропонований метод побудови неklasичних моделей балок і пластин, використаний для побудови узагальненої теорії непологих ортотропних оболонок, розроблений у роботі [32]. Методика розв'язування таких систем рівнянь уже достатньо відпрацьована та уніфікована для оболонок теорії типу Тимошенка, тому інтегрування рівнянь запропонованої моделі не викликає значних ускладнень. При її розв'язуванні для конкретних крайових задач необхідно приєднати ще п'ять граничних умов на краях оболонки, які легко отримати з варіаційного функціоналу Лагранжа.

Подібні до (5) представлення, тільки з меншим числом розвинення (до третьої компоненти w), були застосовані також К. Ло, Р. Крістенсеном і Е.Бу [27]:

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y) + z\varphi_x + z^2\xi_x + z^3\phi_x; \\ v &= v_0(x, y) + z\varphi_y + z^2\xi_y + z^3\phi_y; \\ w &= w_0(x, y) + z\varphi_z + z^2\xi_z. \end{aligned} \quad (6)$$

Для визначення 11-ти узагальнених функцій переміщень (6) побудовано 11 диференціальних рівнянь рівноваги відносно

«полімоментів» та «полісил», отриманих із варіаційного принципу Лагранжа для повної енергії пружної системи із задовільненням 11-ти граничних умов на краях пластини. Побудована модель відрізняється від попередньої складністю рівнянь і граничних умов за приблизно однаковою точністю. Тому практичне використання такої моделі можливе хіба що авторами, котрі її розробили. Необхідно зауважити також, що ще раніше від К. Ло, Р. Крістенсена і Е.Ву у 1974 р. представлення (6), тільки при нульових тангенціальних деформаціях серединної поверхні пластини ($u_0 = v_0 = 0$), були використані К.Іенгаром, К. Чандрасехаром і А.Себастьяном [33]. Подальший розвиток теорій згину оболонок і пластин більшої точності призводить до розв'язування диференціальних рівнянь вище 16-го порядку і за складністю практично еквівалентний розв'язуванню тривимірних рівнянь теорії пружності.

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1987. –360 с. 2. Власов Б.Ф. Об уравнениях теории изгиба пластинок //Изв.АН СССР, ОТН, 1957, № 12. – С.57-60. 3. Гольденвейзер А.Л. О теории изгиба пластинок Рейсснера //Изв. АН СССР, ОТН, 1958. № 4. – С.102. 4. Шереметьев М.П., Пелех Б.Л. К построению уточненной теории пластин // Инж. журнал. 1964. Т.4. В.3.– С.504-509. 5. Швабюк В.И. Об одном варианте обобщенной теории трансверсально изотропных плит // Прикл. механика, 1974. Т.10. №11. – С.87-92. 6. Швабюк В.И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально изотропных плит //Прикл. механика. – К.:1980. Т.16. №. 4.– С.71-77. 7. Пелех Б.Л. Теория оболочек с низкой сдвиговой жесткостью. К.: Наук. думка, 1973. – 246 с. 8. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Соппротивление полимерных и композитных материалов. — 3-е изд. — Рига: Зинатне, 1980. - 572 с. 9. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1969. – 276 с. 10. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во Белорусь. гос. ун-та, 1975.– 256 с. 11. Доннел Л.Г. Балки, пластины и оболочки: Пер. с англ. /Под. ред. Э.И. Григолюка. — М.: Наука. 1982. — 568 с. 12. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. -М.: Машиностроение, 1988, -272 с. 13. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. Неклассическая теория оболочек и её приложение к решению задач инженерных. - Львов: Изд.-во при Львов. ун-те, 1978. – 193 с. 14. Хорошун Л.П. О построении уравнений слоистых пластин и оболочек // Прикл. механика, 1978. Т.14. № 10. – С.3-21.

15. Рассказов А.О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек // Прикл. механика, 1976. Т.12. №11. – С.50-56. 16. Акавчи С. С., Танрикулу А.Г. Анализ потери устойчивости и свободных колебаний пластин из слоистых композитов на основе двух новых теорий гиперболического сдвигового деформирования / Механика композитных материалов. — 2008. — 44, N 2. - С. 217-230. 17. Галимов Ш.К. Уточнённые теории расчёта равномерно нагруженной, свободно опертой трансверсально-изотропной пластины // Исследования по теории пластин и оболочек. -Казань: Изд. Казанского гос. ун-та, 1978, № 13. – С.193-202. 18. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – В кн. Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел. -М.: ВИНТИ, 1973. Т.5.– С.12-101. 19. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наукова думка, 1987. – 216 с. 20. Пискунов В.Г., Рассказов О.О. Развитие теорий слоистых пластин и оболочек // Прикл. механика, 2002. Т. 38. № 2. – С.22-56. 21. Муштари Х.М. Теория изгиба плит средней толщины / Х.М. Муштари // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. – 1959. – №2. – С. 110–115. 22. Рябов А.Ф. Розрахунок багатощарових оболонок. –Київ: Будівельник, 1968. – 96 с. 23. Амбарцумян С.А. Ещё одна теория анизотропных оболочек // Механика полимеров, 1970, № 4. – С.884-896. 24. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.- Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с. 25. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. 492 с. 26. Лехницкий С.Г. К теории анизотропных толстых плит. Изв.АН ССР, ОТН, мех. и машстр., 1959. № 2. – С.141-145. 27. Lo K.N., Christensen R.M., Wu E.M. A High-Order Theory of Plates deformation. Part 1. Homogeneous plates. Part 2.Laminated plates // Trans. ASME, 1977, E44, №4, p.663-676. 28. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища шк. 1986. – 191 с. 29. Пискунов В.Г. Об одном варианте неклассической теории многослойных оболочек и пластин // Прикл. механика, 1979. Т.11. №11. – С.76 - 81. 30. Родионова В.А. Теория тонких анизотропных оболочек с учетом поперечных сдвигов и обжатия. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. – 116 с. 31. Кільчевський М.О. Основні рівняння рівноваги пружних оболонок і деякі методи їх інтегрування // Зб.праць ін-ту математики АН УРСР. 1940. №№ 4,5,6. 32. Шваб'юк В.І. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини / В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко // Монографія. – Луцьк: РВВ Луцького НТУ, 2015. – 264 с. 33. Iyengar K.T.S.R., Chandrashekhara K., Sebastian V.K. On the Anlisis of Thick Rectangular Plates / ZAMM, B. 54, N. 9, 1974.